

UNIVERSITE DE BOURGOGNE

UFR Sciences et Techniques

THESE

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Bourgogne

Discipline : Mathématiques

par
Lucie DRUOTON

soutenue le 04 avril 2013

**Recollements de morceaux de cyclides de Dupin
pour la modélisation et la reconstruction 3D
- Étude dans l'espace des sphères -**

Directeur de thèse
Rémi LANGEVIN

Co-encadrant
Lionel GARNIER

Jury

Rémi Langevin
Lionel Garnier
Dominique Michelucci
Pascal Schreck
Frédéric Chazal
Marco Paluszny
Raphaëlle Chainé
Rémy Besnard

Professeur à l'Université de Bourgogne
Maître de conférences à l'Université de Bourgogne
Professeur à l'Université de Bourgogne
Professeur à l'Université de Strasbourg
Directeur de Recherches à l'INRIA Saclay
Professeur à l'Université nationale de Colombie
Maître de conférences à l'Université de Lyon 1
Assistant scientifique au CEA Valduc

Directeur de thèse
Co-encadrant
Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, **Rémi Langevin**, ainsi que mon co-encadrant, **Lionel Garnier**, pour leur disponibilité, leur patience et leur aide précieuse.

Je remercie les membres du laboratoire CDI du CEA Valduc, particulièrement les chefs de laboratoire **Frédéric Sulpice** et **Hervé Marcellier** qui se sont succédés pendant ces trois dernières années. Je remercie aussi les chefs de service, de département et le directeur du centre qui m'ont permis d'effectuer ma thèse au CEA. Je remercie aussi **Rémy Besnard**, assistant scientifique du département RFN où je travaillais.

Je remercie les membres des laboratoires IMB et Le2i, particulièrement les équipes Modélisation Géométrique et Synthèse d'Images du Le2i et Géométrie et Synthèse Dynamiques de l'IMB, ainsi que leurs doctorants.

Je remercie **Marco Paluszny**, Professeur à l'Université nationale de Colombie, et **Laurent Fuchs**, Maître de conférences à l'Université de Poitiers, avec qui nous avons eu des conversations enrichissantes.

Je remercie **Jean-Claude Sifre**, Professeur au lycée Louis le Grand à Paris pour son aide sur le problème des trois contacts.

Je remercie **Pascal Schreck**, Professeur à l'Université de Strasbourg, et **Frédéric Chazal**, Directeur de Recherches à l'INRIA Saclay, pour avoir accepté d'être rapporteurs.

Je remercie **Raphaëlle Chaine**, Maître de conférences à l'Université de Lyon 1, et **Dominique Michelucci**, Professeur à l'Université de Bourgogne, pour avoir accepté d'être membres du jury.

Je remercie mes amis et ma famille, particulièrement ma mère pour le temps qu'elle a passé à relire mes rédactions et ma sœur qui sait toujours me faire rire.

Je remercie aussi **Thierry**, pour son soutien, sa patience et son attention.

Résumé

La thèse porte sur le raccordement de surfaces canal en modélisation géométriques en utilisant des morceaux de cyclides de Dupin. Elle tente de répondre à un problème de reconstruction de pièces contrôlées et usinées par le CEA de Valduc. En se plaçant dans l'espace adéquat, l'espace des sphères, dans lequel nous pouvons manipuler à la fois les points, les sphères et les surfaces canal, nous simplifions considérablement certains problèmes. Cet espace est représenté par une quadrique de dimension 4 dans un espace de dimension 5, muni de la forme de Lorentz : l'espace de Lorentz. Dans l'espace des sphères, les problèmes de recollements de surfaces canal par des morceaux de cyclides de Dupin se simplifient en problèmes linéaires. Nous donnons les algorithmes permettant de réaliser ce type de jointures en utilisant l'espace des sphères puis nous revenons dans l'espace à 3 dimensions usuel. Ces jointures se font toujours le long de cercles caractéristiques des surfaces considérées. En résolvant le problème dit des trois conditions de contact, nous mettons en évidence une autre courbe particulière, sur une famille à un paramètre de cyclides, que nous appelons courbe de contact qui permettrait d'effectuer des jointures le long d'autres courbes.

Mots clés : recollements, jointures, surfaces canal, cyclides de Dupin, espace des sphères.

Abstract

The thesis deals with the blending of canal surfaces in geometric modeling using pieces of Dupin cyclides. We try to solve a problem of reconstructing real parts manufactured and controlled by the CEA of Valduc. Using the space of spheres in which we can manipulate both points, spheres and canal surfaces, we simplify some problems. This space is represented by a 4-dimensional quadric in a 5-dimensional space, equipped with the Lorentz form, it is the Lorentz space. In the space of spheres, problems of blending canal surfaces by pieces of Dupin cyclides are simplified in linear problems. We give algorithms to make such blends using the space of spheres and after we come back to 3 dimensions to draw the result. These blends are always made along characteristics circles of the considered surfaces. By solving the problem of three contact conditions, we highlight another particular curve, on a one parameter family of cyclides, that we call contact curve along which we could also make this kind of blends.

Keywords : joins, blends, canal surfaces, Dupin cyclides, space of spheres.

Table des matières

1	Introduction	23
1.1	Contexte de l'étude et problématique	23
1.1.1	Contexte	23
1.1.2	Problématique	25
1.2	Types de représentations 3D	25
1.3	Choix d'une méthode de reconstruction	26
1.3.1	Méthodes de reconstruction étudiées	26
1.3.2	Méthode en cours de développement	27
2	Surfaces canal et cyclides de Dupin	29
2.1	Surface canal	29
2.2	Quadriques de révolution	29
2.3	Tore de révolution	33
2.4	Cyclides de Dupin dans \mathcal{E}_3	34
2.4.1	Définitions	34
2.4.2	Equations	35
3	Algorithmes de jointures G^1 dans \mathcal{E}_3	43
3.1	Algorithmes de jointures existants	43
3.1.1	Algorithmes de jointures	43
3.1.2	Détermination des bornes de la partie utile d'une cyclide pour la jointure	44
3.2	De nouveaux algorithmes de jointures G^1 en utilisant des cyclides de Dupin	44
3.2.1	Jointures entre deux sphères ou plans par une cyclide de Dupin en anneau	44
3.2.1.1	Principe des algorithmes	44
3.2.1.2	Exemples numériques	47
3.2.2	Jointures entre une surface canal et un plan	52
3.2.2.1	Principe de la méthode	52
3.2.2.2	Exemples numériques	53
4	L'espace des sphères	59
4.1	Construction de l'espace des sphères	59
4.2	Représentation des points, sphères et plans orientés de \mathcal{E}_3	61
4.3	Représentation des faisceaux linéaires de sphères	66
4.4	Position relative de deux sphères de \mathcal{E}_3 via leur représentation dans Λ^4	69
4.5	Représentation des surfaces canal	71

4.6	Représentation des cyclides de Dupin non dégénérées	72
4.7	Représentation des cyclides de Dupin dégénérées	77
4.7.1	Le tore de révolution	77
4.7.2	Le cylindre de révolution	77
4.7.3	Le cône de révolution	78
4.8	Représentation des cercles caractéristiques	78
5	Visualisation dans \mathcal{E}_3 d'une cyclide de Dupin à partir de sa représentation dans Λ^4	81
5.1	Un algorithme de calcul des paramètres d'une cyclide de Dupin et de son repère dans \mathcal{E}_3	81
5.2	Construction itérative de carreaux de cyclides de Dupin	82
5.2.1	Modélisation d'arcs de cercles	83
5.2.2	Construction itérative d'arcs d'ellipses et d'hyperboles	85
5.2.2.1	Cas d'un arc borné de conique	85
5.2.2.2	Cas de composantes non connexes	87
5.2.3	Exemples numériques	89
6	Jointures de surfaces par des cyclides de Dupin le long de cercles caractéristiques	95
6.1	Jointure d'une sphère le long d'un cercle avec une autre sphère par un morceau de cyclide de Dupin	95
6.2	Les cyclides de Dupin tangentes le long d'un cercle caractéristique	95
6.3	Jointure entre une surface canal et une sphère (ou plan) le long d'un cercle caractéristique	96
6.3.1	Exemple de jointure entre un cylindre de révolution et un plan	96
6.3.2	Exemple de jointure entre une cyclide de Dupin et un plan	98
6.4	Recollement de deux surfaces canal sur une même sphère le long de deux cercles	100
6.5	Jointure G^1 entre deux surfaces canal par deux morceaux de cyclides de Dupin le long de deux cercles	105
6.5.1	Principe et algorithme	105
6.5.2	Exemple numérique	106
6.6	Les cyclides passant par un cercle et tangentes à une sphère le long d'un autre cercle	110
6.7	Un algorithme de construction de carreaux de cyclides de Dupin à bords circulaires passant par quatre points	113
6.7.1	Principe de la méthode	114
6.7.2	Construction et algorithme	115
6.7.3	Exemple numérique	122
7	Jointures par des cyclides de Dupin le long d'autres courbes	127
7.1	Problème des trois conditions de contact	127
7.1.1	Les homographies pang, pong et ping	130
7.1.2	L'application $ping \circ pong \circ pang$	131
7.2	La courbe de contact	134

7.3	Algorithmes	137
7.3.1	Détermination d'une famille de Cyclides de Dupin tri-tangentes	137
7.3.2	Détermination d'une deuxième famille de cyclides de Dupin tri-tangentes	139
7.3.3	Détermination de la courbe de contact	140
8	Conclusion et perspectives	149
8.1	Conclusion	149
8.2	Perspectives	151
A	Espace des points massiques	153
B	Justifications des algorithmes 9 et 10	155
B.1	Justification de l'algorithme 9	155
B.1.1	Lemmes	155
B.1.2	Démonstration de la formule (5.7)	158
B.1.3	Démonstration de la formule de récurrence, formule (5.8)	159
B.1.4	Rappels et lemmes	163
B.1.4.1	Rappels	163
B.1.4.2	Lemmes	163
B.1.5	Démonstration de la formule (5.10)	165
B.1.6	Démonstration de la formule de récurrence, formule (5.12)	168
B.1.7	Montrons que le triangle $\sigma_0 N_1 \sigma_3$ est $\mathcal{L}_{4,1}$ -isocèle en N_1	170
C	Construction de carreaux de cyclides à bords circulaires passant par quatre points : lemmes	171

Liste des tableaux

2.1	Équations de quadriques.	32
2.2	Types des points fixes M_ε et M'_ε en fonction des paramètres a , c et μ d'une cyclide.	38
2.3	Classification des cyclides de Dupin en fonction du nombre et du lieu de leurs points singuliers.	39
2.4	Paramètres de la CD4 à partir des cercles principaux dans P_y	42
2.5	Paramètres de la CD4 à partir des cercles principaux dans P_z	42
4.1	Différents types de vecteurs de $\overrightarrow{L_{4,1}}$ et de plans de $L_{4,1}$ et $\overrightarrow{L_{4,1}}$	60
4.2	Correspondance entre les points de \mathcal{E}_3 et les points du paraboloïde Π	65
4.3	Correspondance entre les sphères orientées de \mathcal{E}_3 et les points de Λ^4 . L'orientation d'une sphère est donnée par le signe de son rayon r et l'orientation d'un plan par le sens de son vecteur normal	66
4.4	Définition de l'intérieur et de l'extérieur du cône \mathcal{C}_σ , de sommet σ , de dimension 3, défini par : $\mathcal{C}_\sigma = \Lambda^4 \cap T_\sigma \Lambda^4$	69
4.5	Type de la conique Γ selon le type de P	72
4.6	Classification des différents types de cyclides de Dupin quartiques.	80
6.1	Sphères définies par le carreau de cyclide de Dupin.	124
6.2	Sphères qui définissent la cyclide de Dupin.	124
7.1	Valeurs des coordonnées des points M_i et des composantes des vecteurs orientés \vec{n}_i définissant les plans Q_i de la figure 7.6. Les plans Q_i admettent les vecteurs \vec{n}_i comme vecteurs normaux et passent par les points M_i	138
7.2	Paramètres des cyclides de Dupin déterminées par l'algorithme 15 à partir de trois contacts de la cyclide initiale de la figure 7.6.	142
7.3	Coordonnées des points M_i et des centres de sphères $S(t_i)$ et valeur des rayons des sphères $S(t_i)$ définissant les conditions de contact de la figure 7.9.	142

Table des figures

1.1	Une Machine de Mesures Tridimensionnelles dite MMT.	24
1.2	Les points mesurés sur une pièce.	24
2.1	Deux exemples de surfaces canal. (a) Une surface canal quelconque. (b) Un serpent.	30
2.2	Les quadriques à centre. (a) un cône. (b) un hyperboloïde à deux nappes. (c) un ellipsoïde. (d) un hyperboloïde à une nappe.	30
2.3	Les quadriques usuelles à axe. (a) un cylindre. (b) un parabololoïde de révolution.	31
2.4	Les trois types de tores de révolution.	33
2.5	(a) Un tore de révolution. (b) Les deux cercles C_1 et C_2 contenus dans un plan de symétrie du tore précédent d'axe Δ	33
2.6	Une cyclide de Dupin de degré 4 et ses deux anti-coniques (une ellipse et une hyperbole).	35
2.7	Les deux familles de sphères dont l'enveloppe est la cyclide de Dupin de la figure 2.6.(a) Famille de sphères centrées sur l'ellipse. (b) Famille de sphères centrées sur l'hyperbole.	35
2.8	(a) Cercles caractéristiques d'une CD4 avec θ constant. (b) Faisceau de plans contenant ces cercles caractéristiques.	36
2.9	(a) Cercles caractéristiques d'une CD4 avec ψ constant. (b) Faisceau de plans contenant ces cercles caractéristiques.	37
2.10	Cyclide de Dupin en anneau, CD4A.	39
2.11	Cyclide de Dupin à croissant. (a) interne. (b) externe.	40
2.12	Cyclide de Dupin à croissant nul. (a) interne. (b) externe.	40
2.13	Cercles principaux d'une CD4. (a) CD4A, cyclide en anneau. (b) CD4I, cyclide à croissant interne. (c) CD4E, cyclide à croissant externe.	41
2.14	Cercles principaux d'une CD4 dans le plan P_y . (a) CD4A ou CD4E. (b) CD4I.	41
2.15	Cercles principaux d'une CD4 dans le plan P_z . (a) CD4A ou CD4I. (b) CD4E.	41
3.1	Construction d'une jointure 2D permettant la jointure 3D entre un cylindre et un plan.	44
3.2	Une jointure par un morceau de cyclide de Dupin le long de cercles caractéristiques avec ψ constant. (a) Une jointure de type poteau sans point singulier. (b) Une jointure de type récipient sans point singulier. (c) et (d) Une jointure de type récipient avec un point singulier.	45
3.3	Ensemble des cercles tangents (verts, violets, jaunes et bleus) à trois autres cercles (rouges).	46

3.4	Le plan de construction (en rouge). (a) Lors d'une jointure sphère-plan avec l'algorithme 2. (b) Lors d'une jointure plan-plan avec l'algorithme 2.	47
3.5	Jointure sphère-sphère en utilisant l'algorithme 1. (a) Les deux sphères de départ (brique et rose) et trois sphères tangentes (rouge, verte et grise). (b) Construction des deux cercles principaux C_{t_0} et C_{t_1} de la cyclide de jointure dans le plan P , tangents aux trois cercles C_0 , C_1 et C_2	48
3.6	Jointure sphère-sphère en utilisant l'algorithme 1. (a) Les deux cercles principaux de la cyclide de jointure. (b) La cyclide de jointure entre deux sphères, définie à partir des trois sphères tangentes aux deux sphères à joindre. (c) La partie utile de la cyclide de jointure située entre les deux sphères.	49
3.7	Jointure sphère-plan en utilisant l'algorithme 2. (a) Les deux primitives à joindre et la sphère supplémentaire (bleue). (b) Construction des deux cercles principaux C_{t_0} et C_{t_1} de la cyclide de jointure dans le plan P , tangents aux trois cercles C_0 , C_1 et C_2	49
3.8	Jointure sphère-plan en utilisant l'algorithme 2. (a) Les deux cercles principaux de la cyclide de jointure. (b) La cyclide de jointure entre la sphère et le plan, tangente à la sphère supplémentaire. (c) La partie utile de la cyclide pour la jointure entre les deux primitives.	50
3.9	(a) Les deux plans à joindre et la sphère supplémentaire (bleue). (b) Construction des deux cercles principaux C_{t_0} et C_{t_1} de la cyclide de jointure dans le plan P , tangents aux trois cercles C_0 , C_1 et C_2	51
3.10	(a) Les deux cercles principaux de la cyclide de jointure. (b) La cyclide de jointure entre les deux plans, tangente à la sphère supplémentaire. (c) La partie utile de la cyclide pour la jointure située entre les deux plans.	51
3.11	Le tube et le plan à joindre.	54
3.12	Les cercles principaux de la cyclide de jointure obtenus grâce aux trois sphères tangentes au tube et au plan (deux vues).	55
3.13	(a) La CD4A de jointure entre le tube et le plan. (b) La jointure entre le tube et le plan.	55
3.14	Les deux cercles principaux de la cyclide de jointure dans P_y , déterminés par l'algorithme 4.	56
3.15	Le serpent et le plan à joindre.	56
3.16	Les deux cercles principaux de la cyclide de jointure. (a) La cyclide de jointure est une CD4A. (b) La cyclide de jointure est une CD4I.	57
3.17	La jointure entre le serpent et le plan. (a) En utilisant une CD4A. (b) En utilisant une CD4I.	57
4.1	Construction du paraboloidé Π isométrique à l'espace affine euclidien usuel \mathcal{E}_3 . \vec{l} , \vec{l}^* , $\vec{\mathcal{H}}$, et \mathcal{H} sont de type lumière. L'hyperplan $\vec{\mathcal{H}}$ est tangent à \mathcal{C}_l . Toute direction lumière \vec{l}^* , distincte de \vec{l} , permet d'obtenir un point de \mathcal{E}_3 via le paraboloidé Π	61
4.2	Construction du paraboloidé Π isométrique à l'espace affine euclidien usuel \mathcal{E}_3 . L'hyperplan \mathcal{H} est de type lumière, la restriction de la forme de Lorentz à cet hyperplan est dégénérée et les directions en bleu annulent la forme de Lorentz.	62

4.3	Faisceau de sphères à base cercle. (a) Dans \mathcal{E}_3 . (b) Représentation dans l'espace des sphères.	68
4.4	Faisceau de sphères à points limites. (a) Dans \mathcal{E}_3 . (b) Représentation dans l'espace des sphères.	69
4.5	Faisceau de sphères tangentes. (a) Dans \mathcal{E}_3 . (b) Représentation dans l'espace des sphères.	70
4.6	Cônes \mathcal{C}_σ et \mathcal{C}_{σ^-} de sommets σ et $\sigma^- : \mathcal{C}_\sigma = \Lambda^4 \cap T_\sigma \Lambda^4$ et $\mathcal{C}_{\sigma^-} = \Lambda^4 \cap T_{\sigma^-} \Lambda^4$	71
4.7	Représentation d'une cyclide de Dupin en anneau dans l'espace des sphères par deux ellipses.	75
4.8	Représentation d'une cyclide de Dupin à croissant dans l'espace des sphères par une ellipse et une hyperbole.	76
4.9	Représentation d'une cyclide de Dupin à croissant nul dans l'espace des sphères par une ellipse et une parabole.	76
4.10	Un cylindre de révolution est une cyclide de Dupin à croissant nul dégénérée dont le point singulier est rejeté à l'infini.	77
4.11	Un cône de révolution est une cyclide de Dupin à croissant dégénérée dont l'un des points singuliers est le sommet du cône et l'autre est rejeté à l'infini.	78
4.12	Représentation d'un cercle caractéristique d'une cyclide de Dupin dans l'espace des sphères et dans \mathcal{E}_3	79
5.1	Principe de la construction itérative d'un arc de cercle dans un plan affine euclidien, à partir de trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$. La formule (5.4) traduit le fait que $\alpha = 2\alpha_1$	84
5.2	Exemple de construction itérative d'un arc d'hyperbole dans un 2-plan de type temps de $L_{4,1}$, à partir de trois points pondérés $(\sigma_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(\sigma_2; 1)$, $\omega > 1$	85
5.3	Exemple de construction itérative d'un arc d'hyperbole dans un 2-plan de type temps de $\widetilde{L}_{4,1}$, à partir de deux points massiques $(\sigma_0; 1)$ et $(\vec{l}_2; 0)$	89
5.4	Les cercles caractéristiques de la cyclide de jointure. (a) Après deux itérations. (b) Après trois itérations. Les cercles obtenus lors de la première itération sont en bleu, les cercles obtenus lors de la seconde itération sont en vert et les cercles obtenus après la troisième itération sont en violet.	91
5.5	Le carreau de cyclide de Dupin en anneau effectuant la jointure entre la cyclide $Cycl_0$ et le plan \mathcal{P}_0	91
5.6	Les cercles caractéristiques de la cyclide de jointure. (a) Après deux itérations. (b) Après trois itérations. Les cercles obtenus lors de la première itération sont en bleu, les cercles obtenus lors de la deuxième itération sont en vert et les cercles obtenus lors de la troisième itération sont en violet.	92
5.7	Le carreau de cyclide effectuant la jointure entre la cyclide de Dupin $Cycl_0$ et le plan \mathcal{P}_0	92
5.8	Maillage du carreau de cyclide en anneau effectuant la jointure entre la cyclide de Dupin $Cycl_0$ et le plan \mathcal{P}_0 . (a) Après deux itérations. (b) Après trois itérations.	93
5.9	Maillage du carreau de cyclide à croissant interne effectuant la jointure entre la cyclide de Dupin $Cycl_0$ et le plan \mathcal{P}_0 . (a) Après deux itérations. (b) Après trois itérations.	93

6.1	Le cylindre de révolution et le plan à joindre.	97
6.2	Les deux sphères principales et la CD4A de jointure.	98
6.3	La jointure réalisée entre le cylindre et le plan avec une partie de la CD4A précédente.	98
6.4	La cyclide de Dupin et le plan à joindre.	99
6.5	Les deux sphères principales et la CD4A de jointure.	99
6.6	La jointure réalisée entre la cyclide de Dupin $Cycl_0$ et le plan avec une partie de la CD4A précédente.	100
6.7	(a) Coupe de la CD4, enveloppe de la famille contenant les sphères S_A, S_B et S_C , par le plan de symétrie P_y dans \mathcal{E}_3 . (b) Illustration du changement d'orientation de la sphère S_B sur la CD4 enveloppe dans \mathcal{E}_3 . Dans la figure (a), les vecteurs normaux de la sphère S_B sont dirigés vers le centre Ω_B alors que dans la figure (b), ils sont de sens inverses. Dans cet exemple, le changement d'orientation transforme la CD4A en CD4I.	101
6.8	Jointure entre le cylindre de révolution et le plan par une CD4I.	102
6.9	Jointure entre la CD4A et le plan par une CD4I.	102
6.10	Les cercles caractéristiques des surfaces canal sont sécants sur la sphère de jointures.	102
6.11	(a) Un exemple de jointure G^1 entre deux surfaces canal le long de deux cercles tangents. (b) La surface obtenue en recollant les autres parties des deux surfaces canal et de la sphère est singulière.	103
6.12	(a) Un exemple de jointure G^1 entre deux surfaces canal le long de deux cercles disjoints. (b) La surface obtenue en recollant les autres parties des deux surfaces canal et de la sphère est singulière.	103
6.13	Représentation des cercles orientés d'une sphère S correspondant au point σ dans Λ^4	104
6.14	Représentation du problème dans Λ^4 . (a) Les deux courbes γ_i correspondant aux surfaces canal $Surf_i$ ont un point commun σ et les vecteurs courbure géodésique au point σ sont les vecteurs k_{g_i} . (b) Les courbes $\dot{\gamma}_i(t)$ et leurs projections $\alpha_i(t)$ sur $\Lambda^3(\sigma)$	105
6.15	Illustration de l'algorithme 11 dans l'espace des sphères. (a) Cas général, les deux vecteurs tangents au point σ ne sont pas colinéaires. (b) Jointure G^1 , le point σ est calculé afin que les deux vecteurs tangents au point σ soient colinéaires.	108
6.16	Exemple de jointure entre deux cylindres dans \mathcal{E}_3 par deux morceaux de cyclides de Dupin, contrairement à W. Boehm, nous imposons les cercles bleus sur les cylindres.	109
6.17	Deux cercles cosphériques sur un tore à collier.	111
6.18	Illustration de l'algorithme 12 dans l'espace des sphères. La conique $\Gamma_{0,t}$ est obtenue comme section de Λ^4 par le plan affine défini par $\gamma_1(t)$, σ et \vec{v}_0 . Nous cherchons la valeur de t qui permet d'obtenir un vecteur tangent à la conique $\Gamma_{0,t}$ en σ colinéaire à \vec{v}_0	112
6.19	Exemple de jointure entre deux cercles dans \mathcal{E}_3 par deux morceaux de cyclides de Dupin tangentes à une sphère donnée en l'un des deux cercles.	113

6.20 Exemple de jointure entre un serpentín et un cône à l'aide de deux morceaux de cyclides de Dupin en anneau tangentes le long de leur cercle caractéristique commun. 113

6.21 Conditions permettant d'obtenir un carreau de cyclide de Dupin à bords circulaires dans \mathcal{E}_3 . Les points M_{00} , M_{01} , M_{11} et M_{10} appartiennent à un cercle. Les points M_{00} , M_{01} (resp. M_{10}) et le vecteur $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\theta_0}}}$ (resp. $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\psi_0}}}$) définissent un arc de cercle. Les vecteurs $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\theta_0}}}$ et $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\psi_0}}}$ sont orthogonaux. 115

6.22 Construction d'un carreau de cyclide à bords circulaires dans Λ^4 . Les droites $(\sigma_{\theta_0}\sigma_{\psi_0})$, $(\sigma_{\theta_2}\sigma_{\psi_0})$, $(\sigma_{\theta_2}\sigma_{\psi_2})$ et $(\sigma_{\theta_0}\sigma_{\psi_2})$, sont de type lumière et ont chacune pour vecteur directeur respectif $\overrightarrow{m_{00}}$, $\overrightarrow{m_{10}}$, $\overrightarrow{m_{11}}$, et $\overrightarrow{m_{01}}$. Le 2-plan rose (resp. vert) est le plan contenant le faisceau de sphères à base cercle \mathcal{C}_{θ_0} (resp. \mathcal{C}_{ψ_0}). Chacun des deux faisceaux de sphères est représenté par un des cercles obtenus comme section de Λ^4 par un 2-plan affine passant par O_5 de type espace. 120

6.23 Construction d'un carreau de cyclide à bords circulaires dans Λ^4 . Le 2-plan rose est le plan contenant le cercle représentant la famille de sphères passant par \mathcal{C}_θ . Le 2-plan bleu est le plan contenant le cercle représentant une famille de sphères de la cyclide de Dupin déterminée par l'algorithme 13. Ce plan est déterminé par la sphère σ_{θ_2} et le cercle caractéristique défini par le couple $(\sigma_{\theta_0}; \overrightarrow{\gamma'_\theta(\theta_0)})$ 121

6.24 Les sommets M_{00} , M_{01} , M_{11} et M_{10} appartiennent au cercle noir contenu dans le plan $P_z : z = 0$. Les autres cercles seront deux cercles caractéristiques de la cyclide de Dupin à déterminer. Les segments représentent les vecteurs tangents orthogonaux en M_{00} 123

6.25 La cyclide de Dupin est déterminée par les trois sphères correspondantes aux points σ_{θ_0} , σ_{θ_2} et $\sigma_{\theta_0}^\bullet$ (les deux sphères de droite sont orthogonales et permettent de déterminer le cercle \mathcal{C}_θ). 123

6.26 Deux vues de la cyclide de Dupin permettant de construire le carreau à bords circulaires de sommets M_{00} , M_{01} , M_{11} et M_{10} . Le plan en verre contient les quatre sommets du carreau. 125

6.27 Deux vues du carreau de la cyclide de Dupin de la figure 6.26 obtenue en utilisant l'algorithme 13. 126

7.1 La droite lumière qui représente un faisceau de sphères tangentes à une cyclide en un point. 128

7.2 Illustration de l'application *ping* \circ *pong* \circ *pang* 132

7.3 Une cyclide ayant deux points singuliers, tangente aux deux points de contact M_2 et M_3 aux sphères rouges et ayant M_1 comme point singulier. 133

7.4 Les espaces \widehat{P} , \widehat{P}' et \widehat{P}_λ 136

7.5 Une cyclide et un tore tangents le long d'une courbe de contact définie par trois conditions de contact. 136

7.6 Initialisation du problème : trois conditions de contact sur une cyclide, table 7.1. 139

7.7	Deux cyclides de Dupin en anneau, solutions du problème des trois contacts à partir de la cyclide initiale de la figure 7.6. (a) La cyclide initiale est représentée en verre. (b) La cyclide initiale est représentée couleur bois.	140
7.8	Deux cyclides de Dupin avec deux points singuliers, solutions du problème des trois contacts à partir de la cyclide initiale de la figure 7.6. (a) La cyclide initiale est représentée en verre. (b) La cyclide initiale est représentée en bois.	141
7.9	Deux cyclides de Dupin tangentes en uniquement trois points.	144
7.10	Une courbe de contact sur une cyclide.	145
7.11	Une courbe de contact sur une cyclide obtenue avec l'algorithme 17.	145
7.12	Cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin en anneau. (a) Deux cercles. (b) Plusieurs cercles.	147
7.13	Une cyclide et un tore tangents le long d'une courbe de contact qui est un cercle de Villarceau.	147
A.1	Espace $\tilde{\mathcal{P}}$ des points massiques réunissant les points pondérés du plan affine \mathcal{P} d'équation $\omega = 1$ et les vecteurs (muni d'un poids nul) du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ d'équation $\omega = 0$	154

Liste des algorithmes

1	Jointure sphère-sphère par une CD4A	46
2	Jointure sphère-sphère par une CD4A	47
3	Jointure entre une surface canal et un plan	53
4	Jointure entre une surface canal et un plan	53
5	Détermination d'un cercle caractéristique d'une cyclide de Dupin, figures 4.12.	79
6	Détermination des paramètres d'une CD4 connue par l'une des deux coniques de Λ^4 correspondante à l'une des deux familles de sphères dont elle est l'enveloppe	82
7	Détermination des paramètres d'une CD4 connue par l'une des deux coniques de Λ^4 correspondante à l'une des deux familles de sphères dont elle est l'enveloppe	82
8	Construction itérative d'un arc de cercle dans un plan affine euclidien.	84
9	Construction itérative d'un arc de conique Γ dans un plan de $L_{4,1}$	86
10	Construction itérative d'un arc d'hyperbole ayant une direction lumière comme extrémité.	88
11	Jointure G^1 entre deux surfaces canal par deux morceaux de cyclides de Dupin le long de deux cercles donnés	107
12	Jointure G^1 entre un cercle sur une sphère et un autre cercle.	112
13	Détermination d'une cyclide de Dupin permettant d'obtenir un carreau à bords circulaires.	119
14	Construction de cyclides tangentes en trois points à trois plans donnés	129
15	Détermination d'une cyclide satisfaisant trois conditions de contact s'il en existe.	138
16	Détermination d'une cyclide tri-tangente à une cyclide initiale.	143
17	Détermination d'une courbe de tangence définie par trois conditions de contact sur une cyclide	146

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte de l'étude et problématique

1.1.1 Contexte

Cette thèse s'inscrit dans un contexte industriel concernant l'étude de la reconstruction 3D de pièces précises fabriquées et mesurées au CEA pour lesquelles nous disposons de nuages de points. Les progrès des techniques d'acquisitions, les nouvelles générations de scanners ainsi que les fortes puissances de calcul des ordinateurs permettent, de nos jours, la conception et la visualisation de modèles 3D de plus en plus réalistes et précis qui incluent non seulement des informations géométriques décrivant leurs formes, leurs dimensions mais également des attributs d'apparence. Dans la majorité des cas, ces données sont stockées sous forme de maillages triangulaires qui sont parfois de tailles très importantes.

Les surfaces des pièces concernées par la reconstruction 3D sont des surfaces de révolution. Les pièces sont demi-sphériques. La caractérisation dimensionnelle des profils de ces pièces se fait à l'aide de Machines de Mesures Tridimensionnelles (MMT), figure 1.1. Les mesures des MMT sont effectuées selon deux « axes » : les méridiens (axe vertical) et les parallèles (axe horizontal). La combinaison de ces lignes de mesures va définir un plan de contrôle, figure 1.2. Aujourd'hui, le plan de contrôle est généralement constitué de six méridiens et de trois parallèles. L'une des questions soulevée consiste à juger de la suffisance du plan de contrôle actuel et à étudier la possibilité d'améliorer ce dernier, en considérant notamment de nouveaux paramètres dépendants de la pièce étudiée. La combinaison actuelle de méridiens / parallèles permet de mesurer des écarts aux profils théoriques et de détecter des défauts globaux de type ovalisation ou dérive machine.

Malheureusement, il n'est pas évident que ce plan de contrôle soit suffisant pour permettre la détection de défauts locaux tels que des « enfoncements » ou des « arrachements » de matière liés au procédé de fabrication et à la manutention. Il est donc essentiel de développer des outils nécessaires à l'étude et à l'optimisation de ce plan de contrôle afin de garantir la suffisance et la pertinence des contrôles. Il ne s'agit donc pas d'augmenter arbitrairement le nombre de points de mesure mais de définir la meilleure combinaison garantissant que la pièce contrôlée sera suffisamment connue.



FIGURE 1.1 – Une Machine de Mesures Tridimensionnelles dite MMT.

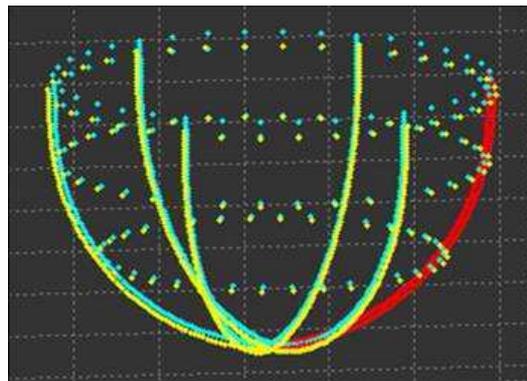


FIGURE 1.2 – Les points mesurés sur une pièce.

Ce travail ne peut être effectué sans le développement préalable d'un outil de reconstruction 3D. Le but est de reconstruire les points non mesurés à partir des informations disponibles, à savoir, les données mesurées par le contrôle dimensionnel selon le plan de contrôle initial, le profil théorique de la pièce, le matériau utilisé et le procédé de fabrication. Le nuage de points dense issu de la reconstruction 3D permettrait de simuler une infinité de plan de contrôle et de définir ainsi un plan de contrôle optimal. L'accent est porté sur la précision de reconstruction qui devra atteindre l'échelle micrométrique pour des pièces dont le rayon sera d'environ 100 mm.

Les algorithmes actuels ne satisfaisant pas les impératifs de précision, de justesse et de robustesse face aux diverses géométries des défauts, il est nécessaire d'étudier d'autres techniques de reconstruction. Les pièces principalement contrôlées ici sont des demi-sphères déformables.

1.1.2 Problématique

La reconstruction 3D permet la représentation informatique d'objets mesurés via des machines de contrôles tridimensionnelles ou des capteurs optiques. Cet outil apparaît de plus en plus dans l'industrie avec les prototypages rapides, les « reverse ingeneering » ou bien dans les expertises globales. De nombreux logiciels permettant la reconstruction 3D sont commercialisés (GEOMAGIC, 3Dreshaper, COPYCAD,...). Le développement de ces programmes a suivi l'essor des techniques de numérisation sans contact. Ils sont aujourd'hui un outil indispensable au traitement des nuages de points fournis généralement par ces capteurs. Dans ce cas, la reconstruction 3D permet d'augmenter par interpolation le nombre de points de mesure sans allonger le temps de contrôle. Le but est donc de densifier le nuage de points décrivant la pièce et de permettre une visualisation 3D de l'objet en affichant les écarts aux profils théoriques. Ces logiciels, bien que très performants, sont inadéquats par rapport à la précision désirée ici. Cette étude est réalisée dans le but de développer un algorithme de reconstruction spécifique, répondant à ce problème. Pour cela, nous avons pris en considération le modèle théorique de la pièce, les données de mesures selon le plan de contrôle actuel et le procédé de fabrication par tournage. Ce dernier implique une connaissance très intéressante sur les surfaces des pièces réelles : ce sont nécessairement des surfaces de révolution (à la précision près du tournage) qui sont des surfaces canal particulières. La connaissance du matériau n'est jusqu'ici pas encore prise en compte dans le modèle de reconstruction étudié.

1.2 Types de représentations 3D

Les différents types de représentations 3D en modélisation géométrique peuvent être classés en deux catégories : les modèles surfaciques et les modèles volumiques.

La modélisation surfacique fait intervenir la représentation par frontière et ne tient pas compte du volume d'un objet 3D.

Cette frontière est définie par des sommets, des arêtes et des facettes. Trois types de représentation sont alors possibles :

- n'utiliser que des polygones (le plus souvent des triangles ou des quadrilatères) c'est-à-dire se donner les sommets et leur appariement. Le modèle obtenu est appelé maillage.

- utiliser des surfaces implicites qui sont des surfaces de niveau d'applications de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} (plans, quadriques,...).

- utiliser des surfaces possédant une équation paramétrique c'est-à-dire soit des portions de quadriques, de tores, de superquadriques, de cyclides de Dupin, de supercyclides, soit des carreaux de Bézier, de B-splines, de NURBS. La visualisation de ces frontières nécessite une discrétisation de celles-ci. Pour cela, le morceau de surface à représenter est approximé par des polygones qui sont le plus souvent des triangles ou des quadrilatères.

Dans tous les cas, pour obtenir un rendu réaliste, le nombre de facettes doit être relativement important. La dernière méthode est très avantageuse : lors de l'animation d'un objet, le modèle reste cohérent c'est-à-dire que les facettes sont solidaires les unes des autres tandis que dans le premier modèle, bouger une facette oblige un traitement des facettes de son voisinage en calculant les normales aux sommets des facettes. Ces normales sont déterminées à partir de la surface réelle et sont utilisées pour lisser le rendu en modifiant l'incidence de la lumière. Cette

approche présente cependant des faiblesses puisque, les facettes étant indépendantes les unes des autres, elles peuvent se croiser ou se joindre approximativement. Afin de contourner ce problème, on peut envisager d'ajouter un niveau de topologie « locale » à un objet garantissant la cohérence de la représentation et des déformations de celui-ci. Un objet n'est plus alors un ensemble de facettes élémentaires mais un ensemble cohérent de noeuds, arcs et faces. La modélisation ne s'intéressant qu'à la frontière de l'objet, on n'a pas de notion de volume. Cette notion peut cependant être introduite en utilisant des faces orientées.

Les modélisations volumiques s'appuient sur des associations et des combinaisons de primitives de dimension trois (volumiques). Les objets ne sont plus représentés par leurs contours mais par leurs volumes.

Quelle que soit la manière adoptée pour représenter des objets 3D, une problématique générale consiste à pouvoir décrire des objets complexes sous la forme de combinaisons d'objets plus simples. Pour ce faire, l'une des méthodes les plus intuitives consiste à décrire ces objets complexes sous la forme de combinaisons d'opérations de type booléen sur des objets simples : union, différence, intersection. Sur la base de ces opérations, un ensemble de plusieurs opérateurs appelés les « opérateurs booléens régularisés » (EOBR) permet de garantir que les résultats d'opérations booléennes sur des solides aboutissent dans tous les cas à un solide.

Le modèle CSG [AAGR92, Man98] combine des primitives simples à l'aide d'opérateurs booléens régularisés qui font alors partie intégrante de la modélisation. Un objet réalisé par la technique CSG est constitué d'un arbre dont les noeuds sont des opérateurs booléens ou des transformations géométriques et dont les feuilles sont des primitives simples. Pour déterminer les propriétés physiques d'un objet CSG, il faut combiner les propriétés des feuilles de l'arbre en explorant celui-ci en profondeur.

Dans notre cas, nous cherchons à modéliser des objets en utilisant la modélisation surfacique et, particulièrement, des jointures de surfaces canal, à l'aide de cyclides de Dupin et de quadriques de révolution.

1.3 Choix d'une méthode de reconstruction

1.3.1 Méthodes de reconstruction étudiées

Dans ce contexte plusieurs méthodes de reconstruction ont été étudiées et développées dans des travaux précédents du CEA. D'abord, une première méthode de reconstruction consistait à utiliser des courbes Splines pour interpoler chaque parallèle non mesurée d'une surface selon la connaissance de quelques points situés sur les méridiens mesurés. Cette méthode, bien que toujours utilisée aujourd'hui, présente des défauts dimensionnels importants : les données sont interpolées « par couches » et ne tiennent compte en aucun cas des défauts tridimensionnels. Un défaut local 3D sur un parallèle n'est pas propagé sur les autres parallèles proches interpolés. Cette méthode, qui permet tout de même d'avoir une vague idée de la surface réelle après reconstruction, a donc été remise en cause et reste non utilisable pour la simulation d'assemblage puisqu'elle ne restitue pas une surface fidèle à la surface réelle.

Ensuite, une méthode de reconstruction utilisant une approximation par superquadrique déformée par Free Form Deformation ou déformations libres a été testée. Une fois les déformations libres déterminées et appliquées sur la superquadrique approchant au mieux les points de

départ, la perte de l'équation implicite de la superquadrique est inévitable. La surface obtenue n'est plus connue que par un nombre fini de points de contrôle. Ainsi, il est impossible de réitérer les processus de déformation pour améliorer encore l'approximation lorsque des défauts locaux apparaissent. De plus, les déformations agissent globalement sur la surface, un défaut local peut alors se propager sur toute la pièce via les déformations globales calculées. Il a donc fallu améliorer encore la méthode.

Cette fois, nous nous sommes tournés vers une reconstruction dissociée, c'est-à-dire en deux phases. D'abord une première approximation globale de la surface et ensuite une reconstruction locale où l'approximation globale ne satisfait pas la précision voulue. Etant donnée la forme théorique de la surface, il n'est plus nécessaire de l'approcher globalement par des surfaces aussi complexes que des superquadriques : les quadriques suffisent, en particulier l'ellipsoïde. Localement, des surfaces de Bézier sont utilisées pour déformer des carreaux de l'ellipsoïde pour modéliser les défauts locaux.

1.3.2 Méthode en cours de développement

Un autre point de vue est alors étudié : voyons la pièce comme la surface canal particulière qu'elle est. Une surface canal, que nous détaillerons ensuite, est totalement définie par une famille à un paramètre de sphères. Il suffirait d'extraire du nuage de points mesurés des sphères représentatives et d'en interpoler une famille à un paramètre approchant globalement la surface canal mesurée. Mais alors, il faut pouvoir récupérer la surface canal obtenue en tant que surface décrite par une ou des équations implicites ou paramétriques. Dans le cas général, nous ne connaissons pas les équations de surfaces canal quelconques. On pourrait alors penser joindre ces sphères par des morceaux de quadriques de révolution mais ces dernières n'offrent pas une très grande diversité de formes au vue des déformations globales pouvant survenir sur la pièce étudiée. Il est nécessaire, à ce stade, de faire un bon compromis entre la complexité des surfaces utilisées et la manipulation de ces dernières via des équations paramétriques ou implicites.

C'est dans ce cadre qu'entrent en scène les cyclides de Dupin, surfaces canal particulières, assez simple de manipulation (de degré quatre pour ce qui est des cyclides de Dupin quartiques ici considérées). Elles sont définies comme enveloppes de sphères particulières et connues selon deux équations implicites équivalentes et une équation paramétrique. Déjà utilisées en C.A.O pour effectuer des jointures entre différentes primitives, elles sont aussi convertibles en carreaux de Bézier pour rester dans la même idée que la méthode précédente.

Notre choix s'est alors tourné vers une reconstruction par jointure de sphères par des cyclides de Dupin quartiques. Bien sûr, il ne faut pas oublier l'étape préalable à ces jointures, l'extraction des sphères du nuage de points de départ. Après une recherche bibliographique, nous nous sommes tournés vers une méthode de squelettisation d'un nuage de points qui a déjà fait ses preuves, le power crust, qui permet non seulement d'obtenir le squelette du nuage mais aussi les sphères maximales centrées sur le nuage. Le développement de cette méthode a été confié à une stagiaire, Sophie Thuringer. Une fois un ensemble de sphères représentatives du nuage de points déterminé, il a fallu étudier les différentes manières de les joindre par des morceaux de cyclides de Dupin. Plusieurs algorithmes ont été développés et testés en 3D mais une question importante s'est posée concernant les temps de calcul. C'est alors qu'une nouvelle idée est venue : puisque nous travaillons avec des sphères et des enveloppes de sphères pourquoi ne pas

étudier ces jointures dans l'espace des sphères ? Ainsi, nous avons étudié longuement cet espace de dimension 4 contenu dans l'espace de Lorentz de dimension 5 où une sphère orientée de \mathbb{R}^3 est représentée par un point et une cyclide de Dupin par deux cercles pour la forme quadratique considérée (vus comme des coniques de manière euclidienne).

Après avoir assimilé les propriétés de cet espace et de la forme quadratique considérée, nous avons pu étudier les jointures par des cyclides dans cet espace qui se révèlent plus simples puisque nous joignons des morceaux de coniques plutôt que des morceaux de surfaces. De plus, les courbes caractéristiques des cyclides de Dupin, qui sont des cercles, sont aussi représentables dans l'espace des sphères ce qui nous a permis encore de simplifier les algorithmes de jointures et de construire ces dernières itérativement pour la visualisation du résultat de la reconstruction.

Enfin, cette représentation a permis de résoudre des problèmes plus généraux tel que le problème dit des 3 contacts que nous ne savons pas résoudre dans \mathbb{R}^3 . Il s'agit de déterminer les cyclides de Dupin tangentes en trois points donnés à trois plans donnés. Ce problème est apparu lorsque s'est posé la question des limites de l'utilisation des cyclides de Dupin dans notre démarche de reconstruction 3D. En considérant des homographies dans l'espace de Lorentz, nous avons trouvé une condition d'existence d'une famille à un paramètre de cyclides satisfaisant les conditions de 3 contacts alors qu'il est naturellement raisonnable de penser qu'il n'y en ait qu'une seule (lorsque c'est possible) puisqu'une cyclide dépend de 9 paramètres. Dans la suite, nous allons exposer toute la partie recherche concernant les algorithmes de jointures par des cyclides de Dupin, en nous plaçant d'abord dans \mathbb{R}^3 puis dans l'espace des sphères.

Chapitre 2

Surfaces canal et cyclides de Dupin

Nous allons considérer des surfaces canal dans la suite, c'est pourquoi nous rappelons ci-après leur définition dans \mathcal{E}_3 , espace affine euclidien usuel à trois dimensions. Comme nous allons joindre des morceaux de quadriques usuelles avec des parties de cyclides de Dupin, nous rappelons ensuite les définitions des quadriques usuelles et leurs équations. Nous les utiliserons aussi dans les exemples illustrant différents algorithmes de jointures présentés plus loin. Enfin, avant de parler des cyclides de Dupin qui sont les surfaces auxquelles nous nous intéressons le plus, nous reprenons la définition du tore de révolution.

2.1 Surface canal

Toutes les surfaces sont les enveloppes d'une famille à deux paramètres de sphères (les rayons des sphères sont les inverses des courbures principales). Les surfaces canal, elles, sont des enveloppes d'une famille à un paramètre de sphères, figure 2.1(a). Les centres de ces sphères sont situés sur une courbe centrale γ_0 . Les surfaces canal sont engendrées par des cercles centrés sur γ_0 contenus dans un plan normal à γ_0 . Ces cercles sont les courbes de tangence entre les sphères et la surface enveloppe et sont appelés cercles caractéristiques de la surface canal. Certaines surfaces de révolution comme le cylindre, le cône, le tore et d'autres types de surfaces comme, par exemple, les tubes (les sphères de l'enveloppe sont de même rayon) ou encore les serpentins (la courbe centrale est une hélice et les sphères de l'enveloppe sont de même rayon), figure 2.1(b), sont des surfaces canal.

2.2 Quadriques de révolution

Une quadrique S est une surface d'équation $F = 0$ tel que l'application F :

$$F : \mathcal{E}_3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

est de la forme $F = q + f$ q est une forme quadratique homogène (polynôme homogène de degré 2) et f est une forme affine (polynôme de degré 1) [LFA91]. Les directions principales de S sont orthogonales et il existe une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs propres de la forme quadratique q . Nous notons (α, β, γ) les valeurs propres associées aux vecteurs propres

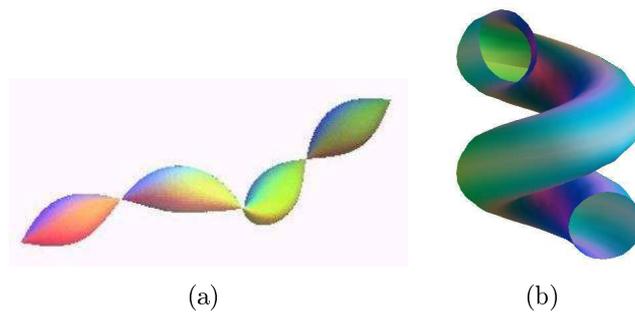


FIGURE 2.1 – Deux exemples de surfaces canal. (a) Une surface canal quelconque. (b) Un serpentin.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Il existe différents types de quadriques selon le rang de q , les quadriques peuvent avoir un centre ou non.

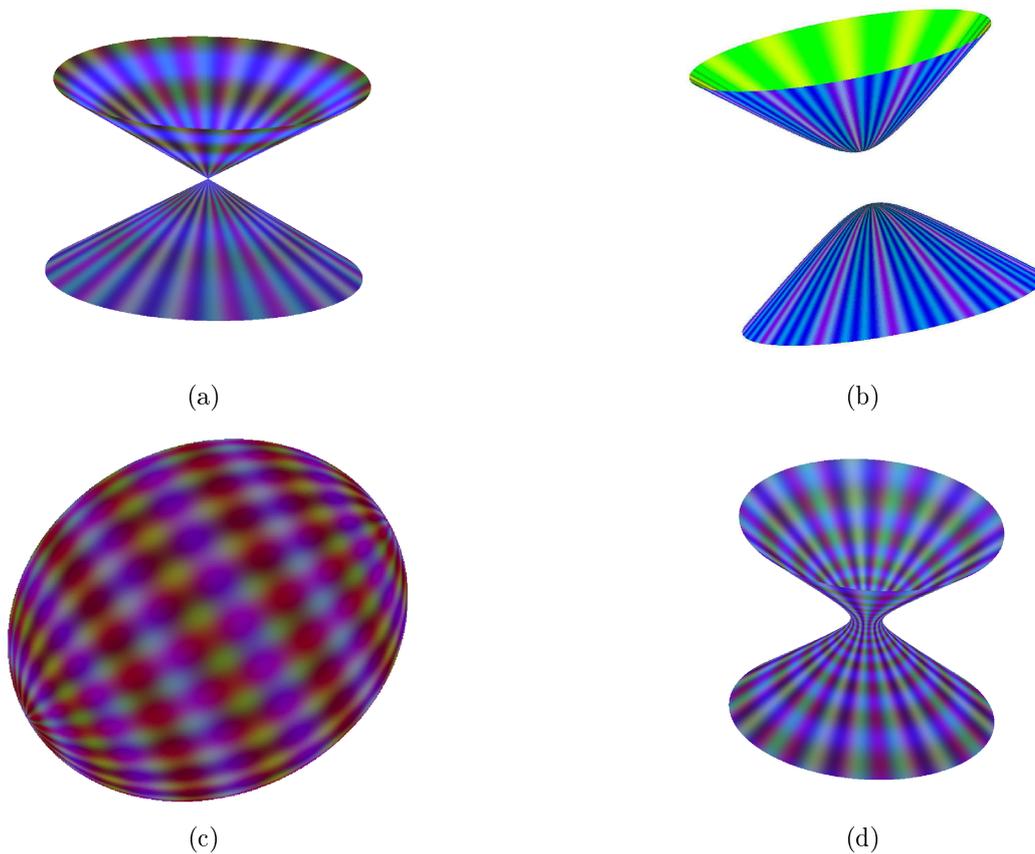


FIGURE 2.2 – Les quadriques à centre. (a) un cône. (b) un hyperboloïde à deux nappes. (c) un ellipsoïde. (d) un hyperboloïde à une nappe.

Lorsque le rang de q est 3, la quadrique est dite à centre, de centre Ω , et son équation dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + k = 0, \quad k \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

avec $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$. La quadrique S est une quadrique de révolution si et seulement si deux des valeurs propres (α, β, γ) sont égales. Dans ce cas, il s'agit de surfaces canal particulières, enveloppe d'une famille à un paramètre de sphères centrées sur son axe de révolution. De plus, dans le cas du cône et du cylindre de révolution, il existe une autre famille à un paramètre, cette fois-ci une famille de plans, qui enveloppe la surface. Nous verrons que ces surfaces sont des cyclides de Dupin (les plans sont considérés comme des sphères particulières) et nous donnerons leur représentation dans l'espace des sphères.

Les quadriques peuvent être décrites par des équations implicites et des équations paramétriques, table 2.1.

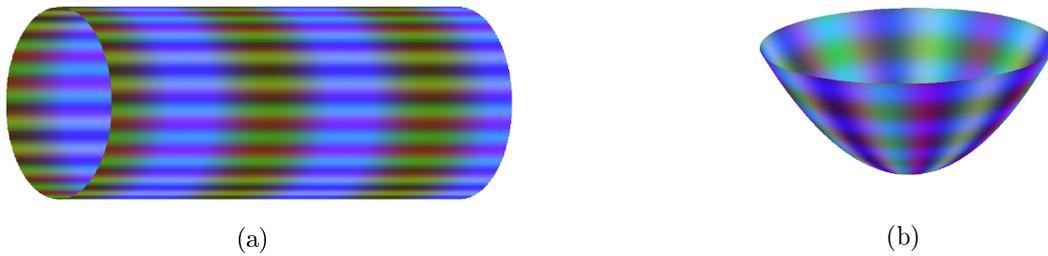


FIGURE 2.3 – Les quadriques usuelles à axe. (a) un cylindre. (b) un parabolôïde de révolution.

Il existe six types de quadriques à centre distinctes, selon la signature de la forme quadratique associée (de rang 3). Deux sont sans intérêt pour la modélisation géométrique puisqu'il s'agit de l'ensemble vide et d'un singleton.

Les quadriques les plus utilisées en informatique graphique sont les quadriques dites naturelles, à savoir : le cône, l'ellipsoïde (dont la sphère), figure 2.2, le cylindre et le parabolôïde, figure 2.3. Le cylindre ou le parabolôïde de révolution sont des quadriques à axe et sont obtenus lorsque la forme quadratique est dégénérée, de rang 2. Il existe un repère, appelé repère principal [LFA91], dont l'origine est le centre de la quadrique (si elle en possède un), dans lequel on peut obtenir les équations données dans le tableau 2.1, [Gar07].

Nom	Équation implicite	Équation paramétrique
Cône	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$\begin{pmatrix} at \cos(\theta) \\ bt \sin(\theta) \\ ct \end{pmatrix}$ $(\theta; t) \in [0; 2\pi] \times \mathbb{R}$
Ellipsoïde	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	$\begin{pmatrix} a \cos(\theta) \cos(\psi) \\ b \sin(\theta) \cos(\psi) \\ c \sin(\psi) \end{pmatrix}$ $(\theta; \psi) \in [0; 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
Hyperboloïde à une nappe	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	$\begin{pmatrix} a \cos(\theta) \operatorname{ch}(t) \\ b \sin(\theta) \operatorname{ch}(t) \\ c \operatorname{sh}(t) \end{pmatrix}$ $(\theta; t) \in [0; 2\pi] \times \mathbb{R}$
Hyperboloïde à deux nappes	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	$\begin{pmatrix} a \cos(\theta) \operatorname{sh}(t) \\ b \sin(\theta) \operatorname{sh}(t) \\ \varepsilon c \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix}$ $(\theta; t; \varepsilon) \in [0; 2\pi] \times \mathbb{R} \times \{-1; 1\}$
Cylindre	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$\begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ b \sin(\theta) \\ t \end{pmatrix}$ $(\theta; t) \in [0; 2\pi] \times \mathbb{R}$
Paraboloïde de révolution	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$	$\begin{pmatrix} at \cos(\theta) \\ bt \sin(\theta) \\ \frac{t^2}{2p} \end{pmatrix}$ $(\theta; t) \in [0; 2\pi] \times \mathbb{R}$

TABLE 2.1 – Équations de quadriques.

2.3 Tore de révolution

Le tore de révolution est engendré par la rotation d'un cercle \mathcal{C} autour d'un axe Δ , \mathcal{C} et Δ étant coplanaires. Chaque plan contenant cet axe est un plan de symétrie du tore et contient deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayon r , figure 2.5. La droite Δ est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$. Notons Ω l'intersection de Δ avec le segment $[O_1O_2]$. Nous dirons que Ω est le centre du tore, que $R = \Omega O_1$ est le rayon majeur du tore et que r est le rayon mineur du tore. De plus, nous pouvons distinguer trois types de tores de révolution selon que la droite Δ coupe ou non les cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , figure 2.4. Lorsque Δ ne coupe pas \mathcal{C}_1 , le tore est dit à collier. Lorsque Δ est tangente à \mathcal{C}_1 en un point, le tore est dit à collier nul et lorsque Δ coupe \mathcal{C}_1 en deux points, le tore est dit croisé.

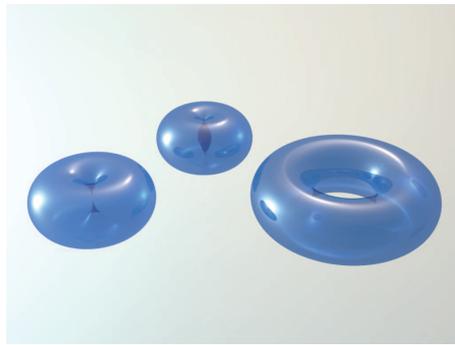


FIGURE 2.4 – Les trois types de tores de révolution.

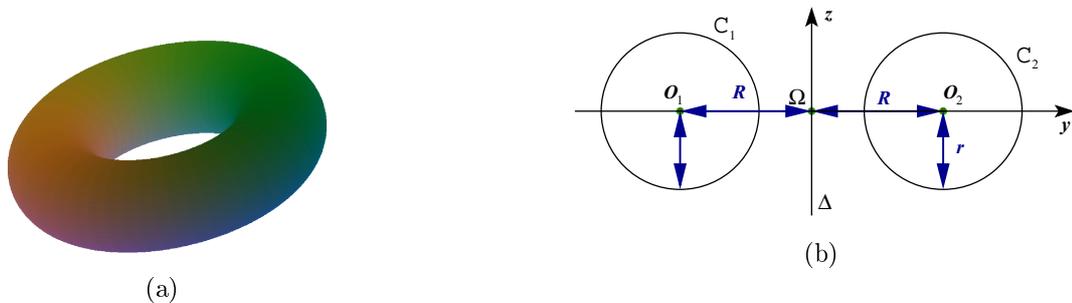


FIGURE 2.5 – (a) Un tore de révolution. (b) Les deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 contenus dans un plan de symétrie du tore précédent d'axe Δ .

Dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{\|O_1O_2\|} \overrightarrow{O_1O_2}$, \vec{k} vecteur directeur de Δ et $\vec{j} = \vec{i} \times \vec{k}$, l'équation du tore est :

$$\Gamma_T(\theta, \psi) = \begin{cases} x(\theta, \psi) &= (R + r \cos \theta) \cos \psi \\ y(\theta, \psi) &= (R + r \cos \theta) \sin \psi \\ z(\theta, \psi) &= r \sin \theta \end{cases} \quad (2.2)$$

où $\theta \in [0; 2\pi]$, $\psi \in [0; 2\pi]$ et \times est le produit vectoriel. Son équation implicite algébrique [LFA91] est :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0 \quad (2.3)$$

Pour chaque valeur de θ (resp. ψ) constante, nous obtenons les cercles caractéristiques du tore qui sont plus usuellement appelés parallèles (resp. méridiens).

Nous pouvons remarquer que le tore de révolution est lui-aussi une surface canal, enveloppe de deux familles à un paramètre de sphères, l'une centrée sur un cercle de centre Ω et de rayon r et l'autre, centrée sur la droite double de support Δ . Nous pourrions définir les cyclides de Dupin à partir d'inversion de tores de révolution, [Gar07].

2.4 Cyclides de Dupin dans \mathcal{E}_3

Les cyclides de Dupin ont été inventées par P. Dupin en 1822 [Dup22] et introduites en CAO par R. Martin en 1982 [Mar82]. De nombreux mathématiciens ont étudié leurs propriétés géométriques, citons entre autres G. Darboux [Dar87, Dar17], A. Forsyth [For12] et A. Cayley [Cay73]. Aujourd'hui, elles sont très largement utilisées pour effectuer des jointures 3D entre deux primitives, en se plaçant uniquement dans l'espace euclidien usuel [AD97a, AD97b, DMP93, Pra97a, GFN04, Gar07].

2.4.1 Définitions

Il est possible de donner plusieurs définitions équivalentes des cyclides de Dupin, [Dar87, Gar07] :

Définition 1 *Les cyclides de Dupin sont les surfaces enveloppes des sphères tangentes à trois sphères fixes.*

Définition 2 *Une cyclide de Dupin est l'image d'un cône de révolution, d'un cylindre de révolution ou d'un tore de révolution par une inversion.*

Définition 3 *Les cyclides de Dupin sont les enveloppes de sphères centrées sur une conique, appelée **déférente**, et orthogonales à une sphère fixe, appelée **sphère d'inversion**, centrée sur l'axe focal de la cyclide [Cay73].*

Définition 4 *Une cyclide de Dupin est, de deux manières différentes, l'enveloppe d'une famille à un paramètre de sphères.*

Nous utiliserons principalement la définition 4 d'une cyclide de Dupin. Les centres des sphères de chacune des deux familles sont situés sur une conique, figures 2.7(a) et 2.7(b), et les sphères d'une famille passent toutes par un point fixe (réel ou imaginaire) de la seconde conique [For12, Dar87, Dar17]. Elles sont tangentes à l'enveloppe le long de cercles caractéristiques. Lorsqu'il s'agit d'une cyclide de Dupin de degré quatre, appelée cyclide de Dupin quartique, les coniques sont une ellipse et une hyperbole, figure 2.6. Ces dernières sont des anti-coniques,

c'est-à-dire qu'elles sont situées dans deux plans orthogonaux et les foyers de l'une sont les sommets de l'autre. Nous avons une double génération de la cyclide de Dupin grâce aux deux familles de sphères à un paramètre dont elle est l'enveloppe. Lorsque l'hyperbole génératrice dégénère en une double droite (et donc l'ellipse devient un cercle), la cyclide est dite dégénérée et est un tore.

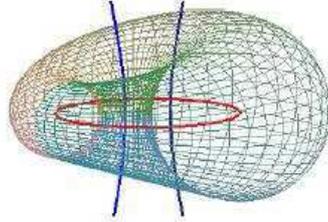


FIGURE 2.6 – Une cyclide de Dupin de degré 4 et ses deux anti-coniques (une ellipse et une hyperbole).

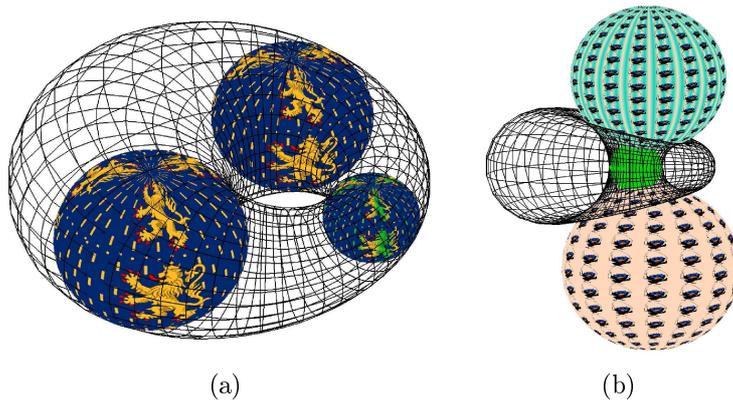


FIGURE 2.7 – Les deux familles de sphères dont l'enveloppe est la cyclide de Dupin de la figure 2.6. (a) Famille de sphères centrées sur l'ellipse. (b) Famille de sphères centrées sur l'hyperbole.

Notons que les termes cyclide ou CD4 seront utilisés dans la suite pour désigner une cyclide de Dupin quartique.

2.4.2 Equations

Nous nous plaçons dans \mathcal{E}_3 . Nous allons montrer qu'une CD4 dépend de trois paramètres réels a , c et μ , avec a et c non nuls (ce qui élimine les cas dégénérés), et $|a| > |c|$ en reprenant les travaux de A.M. Forsyth [For12]. Nous considérons le repère d'origine le centre commun des anti-coniques et dont les trois axes sont les axes des anti-coniques (un axe est commun aux deux coniques). La manipulation de formules algébriques nous amènera parfois à considérer des solutions dans \mathbb{C}^3 .

Pour obtenir les équations implicites d'une CD4, il suffit de calculer l'enveloppe des sphères la définissant. Considérons :

► l'ellipse, dans le repère précédent, située dans le plan $P_z : z = 0$, d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.4)$$

► les sphères $S_1(\theta)$ de centres :

$$\Omega_1(\theta) = (a \cos(\theta); b \sin(\theta); 0)$$

► le point fixe $M(\alpha; 0; \beta)$ appartenant à l'hyperbole par lequel passent toutes les sphères $S_1(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Le point M peut être réel ou imaginaire selon le type de la cyclide (table 4.6). L'équation de $S_1(\theta)$ s'écrit alors :

$$(x - a \cos(\theta))^2 + (y - b \sin(\theta))^2 + z^2 = (\alpha - a \cos(\theta))^2 + (b \sin(\theta))^2 + (\beta)^2 \quad (2.5)$$

ce qui se simplifie en :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(x - \alpha)a \cos(\theta) - 2by \sin(\theta) - \alpha^2 - \beta^2 = 0 \quad (2.6)$$

L'enveloppe de ces sphères est la réunion des cercles caractéristiques de l'enveloppe, figure 2.8(a), obtenus par l'intersection des sphères $S_1(\theta)$ avec les plans $P_1(\theta)$, dont les équations sont les équations dérivées des sphères $S_1(\theta)$ en θ , définis par :

$$P_1(\theta) : a(x - \alpha) \sin(\theta) - by \cos(\theta) = 0 \quad (2.7)$$

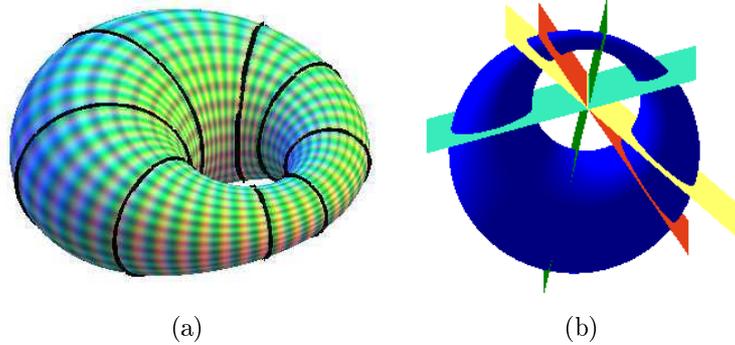


FIGURE 2.8 – (a) Cercles caractéristiques d'une CD4 avec θ constant. (b) Faisceau de plans contenant ces cercles caractéristiques.

La famille de plans $P_1(\theta)$ forme un faisceau, figure 2.8(b), dans lequel nous retrouvons le plan P_y . La droite commune à tous ces plans est la droite d'équation $x = \frac{c\mu}{a}$ et $y = 0$.

A partir des équations (2.6) et (2.7) et après quelques calculs, la cyclide de Dupin doit vérifier l'équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 = 4a^2(x - \alpha)^2 + 4b^2y^2 \quad (2.8)$$

Pour déterminer α et β , nous devons considérer :

► l'hyperbole située dans le plan $P_y : y = 0$ d'équation :

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.9)$$

Une condition est à ajouter pour que les coniques soient deux anti-coniques :

$$c^2 = a^2 - b^2$$

► les sphères $S_2(\psi)$ de centres :

$$\Omega_2(\psi) \left(\frac{c}{\cos(\psi)}; 0; -b \tan(\psi) \right)$$

avec $\psi \in [0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$

► le point fixe $M'(\gamma; \delta; 0)$ appartenant à l'ellipse par lequel passent toutes les sphères $S_2(\psi)$.

En déterminant les autres cercles caractéristiques, figure 2.9(a), sections des sphères $S_2(\psi)$ par des plans $P_2(\psi)$ d'équation $S_2'(\psi) = 0$ définis par :

$$P_2(\psi) : c(\gamma - x) \sin(\psi) + bz = 0 \quad (2.10)$$

nous obtenons la seconde équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 - \delta^2)^2 = 4c^2(x - \gamma)^2 + 4b^2z^2 \quad (2.11)$$

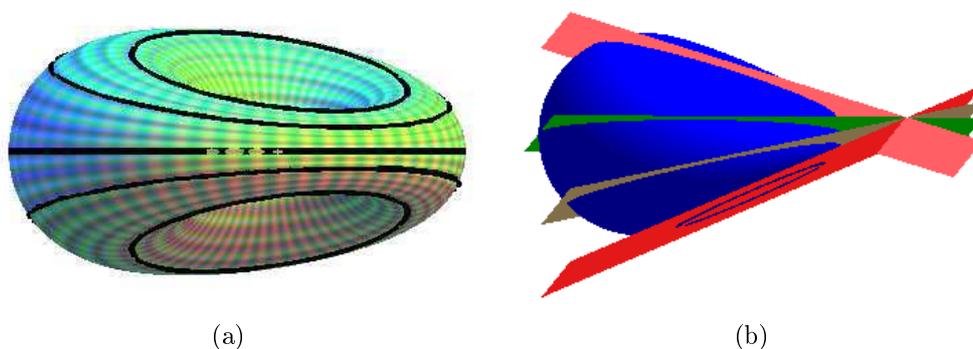


FIGURE 2.9 – (a) Cercles caractéristiques d'une CD4 avec ψ constant. (b) Faisceau de plans contenant ces cercles caractéristiques.

Comme pour la première famille de sphères, les plans $P_2(\psi)$ forment eux aussi un faisceau de plans contenant le plan P_z . La droite commune à tous ces plans est la droite d'équations $x = \frac{a\mu}{c}$ et $z = 0$. Notons que pour $\psi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, les sphères, dont les centres sont rejetés à l'infini, sont les plans $P_2(\psi_0)$.

Pour que les deux équations (2.8) et (2.11) représentent la même CD4, il faut avoir la relation, [For12] :

$$a^2\alpha = c^2\gamma$$

Le paramètre μ est alors introduit :

$$\mu = \frac{\alpha a}{c} = \frac{\gamma c}{a}$$

ce qui permet d'obtenir deux équations implicites équivalentes d'une CD4 :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 + b^2)^2 - 4(ax - c\mu)^2 - 4b^2y^2 = 0 \quad (2.12)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 - b^2)^2 - 4(cx - a\mu)^2 + 4b^2z^2 = 0 \quad (2.13)$$

Il est possible de vérifier que les points fixes sont :

$$M_\varepsilon \left(\frac{\mu c}{a}; 0; \varepsilon \frac{b}{a} \sqrt{\mu^2 - a^2} \right)$$

et :

$$M'_\varepsilon \left(\frac{\mu a}{c}; \varepsilon \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - \mu^2}; 0 \right)$$

avec $\varepsilon \in \{-1; 1\}$. Les points M_ε et M'_ε sont respectivement sur l'hyperbole et l'ellipse génératrices.

Suivant les différentes valeurs des paramètres a , c et μ , nous avons différents types de points fixes M_ε et M'_ε , table 2.2.

paramètres	M_ε	M'_ε
$ a > \mu > c $	2 points imaginaires distincts	2 points imaginaires distincts
$ \mu > a > c $	2 points réels distincts	2 points imaginaires distincts
$ a > c > \mu $	2 points imaginaires distincts	2 points réels distincts
$ a = \mu > c $	1 point double réel	2 points imaginaires distincts
$ a > \mu = c $	2 points imaginaires distincts	1 point double réel

TABLE 2.2 – Types des points fixes M_ε et M'_ε en fonction des paramètres a , c et μ d'une cyclide.

Les différents types (réel ou imaginaire) ainsi que le nombre de points fixes vont déterminer le type et le nombre de points singuliers de la CD4. Ainsi, un point fixe réel correspondra à un point singulier de la cyclide de Dupin. Lorsque ce dernier correspondra à la famille de sphères $S_1(\theta)$ (resp. $S_2(\psi)$), il sera contenu dans le plan P_z (resp. P_y). Une classification différentielle et topologique des cyclides de Dupin est possible à partir du nombre et de la disposition des points singuliers de ces dernières, [Gar07], table 2.3.

Dans le cadre de la géométrie conforme, les CD4I et CD4E ainsi que les CD4In et CD4En sont équivalentes en tant que surfaces à un ou deux point(s) singulier(s). Nous faisons la distinction car nous les considérons comme bords de solides différents. En utilisant la seconde définition d'une cyclide de Dupin en tant qu'image d'un tore de révolution par une inversion, nous retrouvons les trois types de cyclides de Dupin conformes en tant qu'images des trois types de tores (à collier, croisé ou à collier nul) par une inversion, figure 2.4.

Pour plus de détails sur l'obtention des deux équations implicites d'une CD4, le lecteur peut se reporter à [For12]. Nous pouvons aussi remarquer que les cercles caractéristiques de l'enveloppe sont aussi les cercles de courbure de la CD4, [Gar07].

Grâce aux coordonnées des points M_ε et M'_ε , nous pouvons maintenant déterminer le rayon des sphères de chaque famille, le rayon de $S_1(\theta)$ est :

$$r_1(\theta) = |\mu - c \cos(\theta)| \quad (2.14)$$

paramètres	Points singuliers dans P_z	Points singuliers dans P_y	Type de la CD4	Illustration
$ a > \mu > c $	0	0	Cyclide de Dupin en anneau, CD4A	figure 2.10
$ \mu > a > c $	0	2	Cyclide de Dupin à croissant interne, CD4I	figure 2.11(a)
$ a > c > \mu $	2	0	Cyclide de Dupin à croissant externe, CD4E	figure 2.11(b)
$ a = \mu > c $	0	1	Cyclide de Dupin à croissant interne nul, CD4In	figure 2.12(a)
$ a > \mu = c $	1	0	Cyclide de Dupin à croissant externe nul, CD4En	figure 2.12(b)

TABLE 2.3 – Classification des cyclides de Dupin en fonction du nombre et du lieu de leurs points singuliers.



FIGURE 2.10 – Cyclide de Dupin en anneau, CD4A.

tandis que celui de $S_2(\psi)$ est :

$$r_2(\psi) = \left| \mu - \frac{a}{\cos(\psi)} \right|, \quad \psi \notin \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} \quad (2.15)$$

Pour obtenir l'équation paramétrique de la CD4, il suffit de considérer les points de cette dernière comme intersection de deux cercles caractéristiques avec θ constant ou avec ψ constant. Ces cercles sont obtenus comme sections de $S_i(t)$ par $P_i(t)$ (équations (2.7) ou (2.10)) pour $i \in \{1; 2\}$ et $t \in [0, 2\pi]$. L'équation paramétrique d'une CD4 est alors :

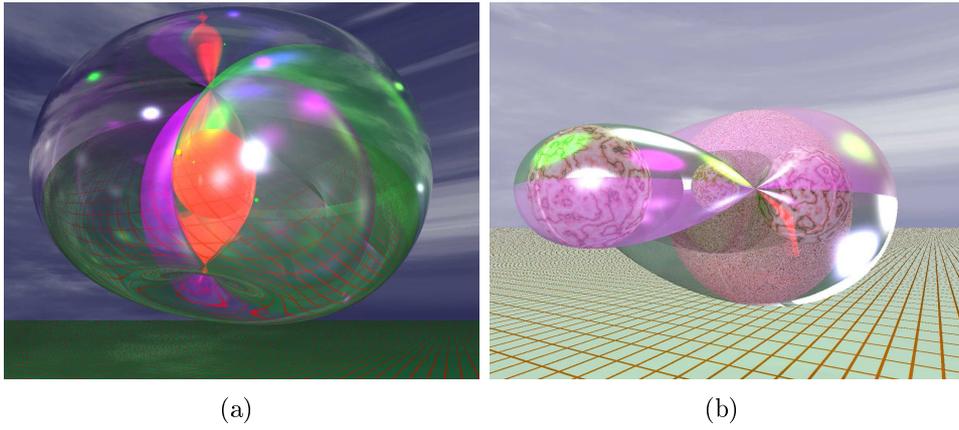


FIGURE 2.11 – Cyclide de Dupin à croissant. (a) interne. (b) externe.

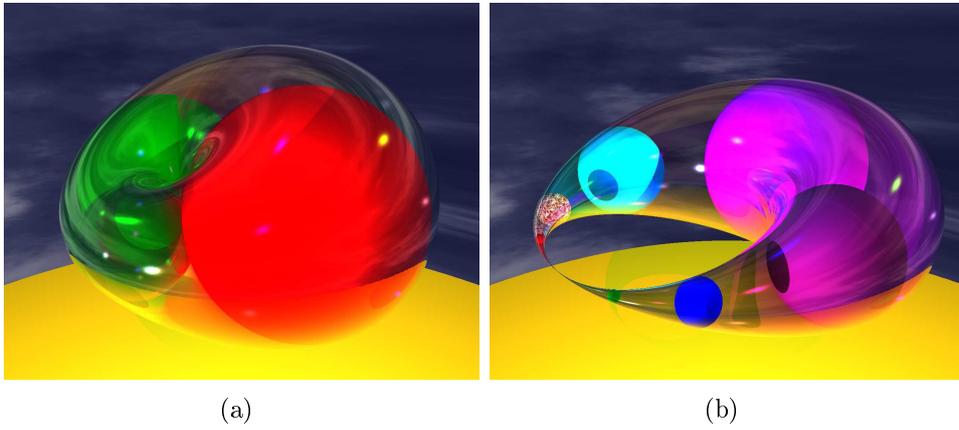


FIGURE 2.12 – Cyclide de Dupin à croissant nul. (a) interne. (b) externe.

$$(\theta, \psi) \rightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{\mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ \frac{b \sin \theta \times (a - \mu \cos \psi)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ \frac{b \sin \psi \times (c \cos \theta - \mu)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \end{array} \right) \quad (2.16)$$

où $(\theta, \psi) \in [0, 2\pi]^2$.

Les différents types de CD4 cités dans la table 2.3 vont dépendre des valeurs respectives des paramètres a , c et μ . Nous pouvons déterminer ces paramètres selon des cercles caractéristiques particuliers : ceux contenus dans les plans P_y et P_z . Ces cercles sont appelés cercles principaux. Ils sont les sections des sphères $S_1(0)$ et $S_1(\pi)$ par P_y et de $S_2(0)$ et $S_2(\pi)$ par P_z (figures

2.13(a), 2.13(b) et 2.13(c)). Les rayons de ces cercles valent alors $|\mu - c|$ et $|\mu + c|$ dans P_y et $|\mu - a|$ et $|\mu + a|$ dans P_z (figures 2.14(a), 2.15(a), 2.14(b) et 2.15(b)).

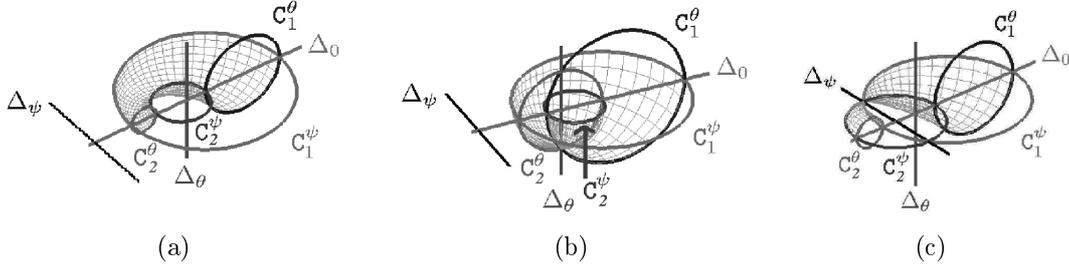


FIGURE 2.13 – Cercles principaux d’une CD4. (a) CD4A, cyclide en anneau. (b) CD4I, cyclide à croissant interne. (c) CD4E, cyclide à croissant externe.

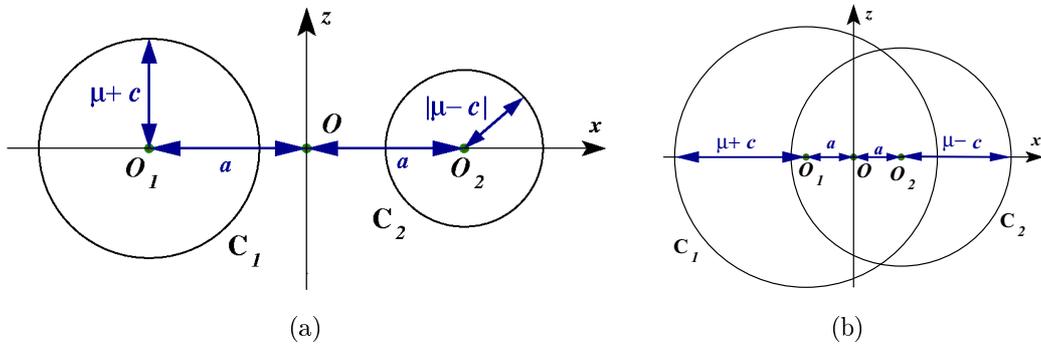


FIGURE 2.14 – Cercles principaux d’une CD4 dans le plan P_y . (a) CD4A ou CD4E. (b) CD4I.

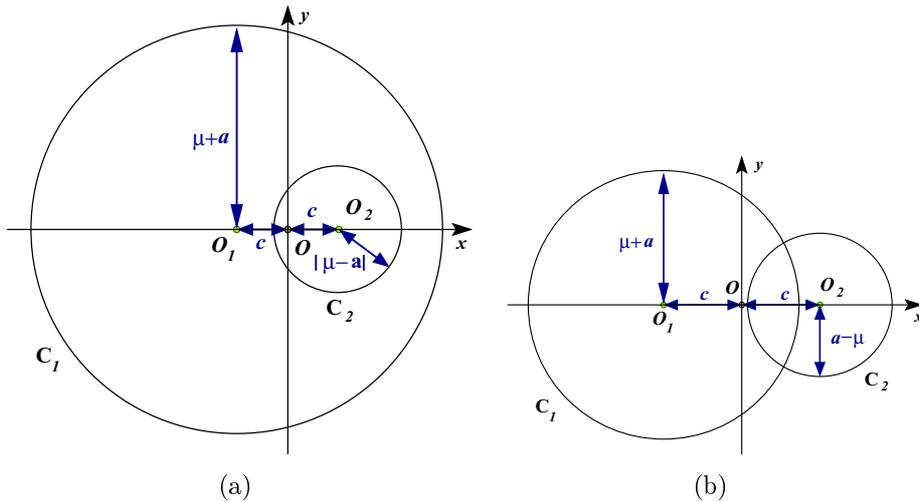


FIGURE 2.15 – Cercles principaux d’une CD4 dans le plan P_z . (a) CD4A ou CD4I. (b) CD4E.

Notons $C(O, r)$ le cercle de centre O et de rayon r . Dans la suite, nous considérons que les paramètres a et c sont strictement positifs et que le paramètre μ est positif ou nul. Connaissant

le type de la CD4, il suffit alors d'avoir deux des cercles principaux coplanaires de la CD4 afin d'en déterminer les paramètres [Gar07].

Notons $C_1(O_1, r_1)$ et $C_2(O_2, r_2)$ les deux cercles principaux de la CD4 dans le plan P_y ou dans le plan P_z avec $r_1 > r_2$. Les tableaux 2.4 et 2.5 donnent les valeurs des paramètres selon ces cercles.

type	a	c	μ
CD4A ou CD4E	$\frac{O_1O_2}{2}$	$\frac{r_1 - r_2}{2}$	$\frac{r_1 + r_2}{2}$
CD4I	$\frac{O_1O_2}{2}$	$\frac{r_1 + r_2}{2}$	$\frac{r_1 - r_2}{2}$

TABLE 2.4 – Paramètres de la CD4 à partir des cercles principaux dans P_y .

type	a	c	μ
CD4A ou CD4I	$\frac{r_1 + r_2}{2}$	$\frac{O_1O_2}{2}$	$\frac{r_1 - r_2}{2}$
CD4E	$\frac{r_1 - r_2}{2}$	$\frac{O_1O_2}{2}$	$\frac{r_1 + r_2}{2}$

TABLE 2.5 – Paramètres de la CD4 à partir des cercles principaux dans P_z .

La table 4.6, chapitre 4, reprend de manière concise la relation entre les différentes valeurs des paramètres, les différents types de CD4, le nombre de points singuliers, le type et le nombre de points fixes de leur enveloppe.

Chapitre 3

Algorithmes de jointures G^1 dans \mathcal{E}_3

Dans ce chapitre, nous donnons de nouveaux algorithmes de jointures de surfaces canal par des cyclides de Dupin en nous plaçant dans \mathcal{E}_3 . Dans les chapitres suivants, nous simplifierons les algorithmes en nous plaçant dans l'espace des sphères et en utilisant la représentation des cyclides dans cet espace.

Nos algorithmes de jointures, décrits dans ce chapitre, sont plus généraux que les algorithmes existants pour recoller une quadrique de révolution et une sphère ou un plan avec des morceaux de cyclides de Dupin. Nous travaillons en dimension 3 en utilisant la définition des cyclides de Dupin en tant qu'enveloppe de sphères alors que les méthodes existantes se restreignent à un plan de symétrie de la cyclide.

Ainsi, le lecteur uniquement intéressé par ce type de jointures peut utiliser ces algorithmes sans avoir à assimiler toute la théorie de l'espace des sphères. Nous traiterons, par la suite, de jointures géométriques. Rappelons qu'une jointure entre deux surfaces est dite G^0 lorsque les deux surfaces ont une courbe commune et la jointure est de type G^1 le long de cette courbe lorsque les espaces tangents aux deux surfaces aux points de la courbe sont confondus.

3.1 Algorithmes de jointures existants

3.1.1 Algorithmes de jointures

Dans la littérature, il existe plusieurs algorithmes de jointures entre surface de révolution et sphère ou plan en utilisant des cyclides de Dupin [Pra97b, GFN04]. Ils consistent à construire deux cercles caractéristiques d'une cyclide de Dupin contenus dans un plan de symétrie des deux primitives initiales. Cela revient à effectuer une jointure 2D dans ce plan. La figure 3.1 illustre un exemple de construction pour joindre un cylindre et un plan : dans le plan de construction, les droites Δ_1 et Δ_2 sont deux génératrices du cylindre tandis que Δ est la section du plan par le plan de construction. Il suffit de déterminer deux cercles C_i , $i \in \{1, 2\}$, tangents aux droites Δ_i aux points B_i et tangents à la droite Δ aux points A_i . Les points B_i sont symétriques par rapport à la droite Δ .

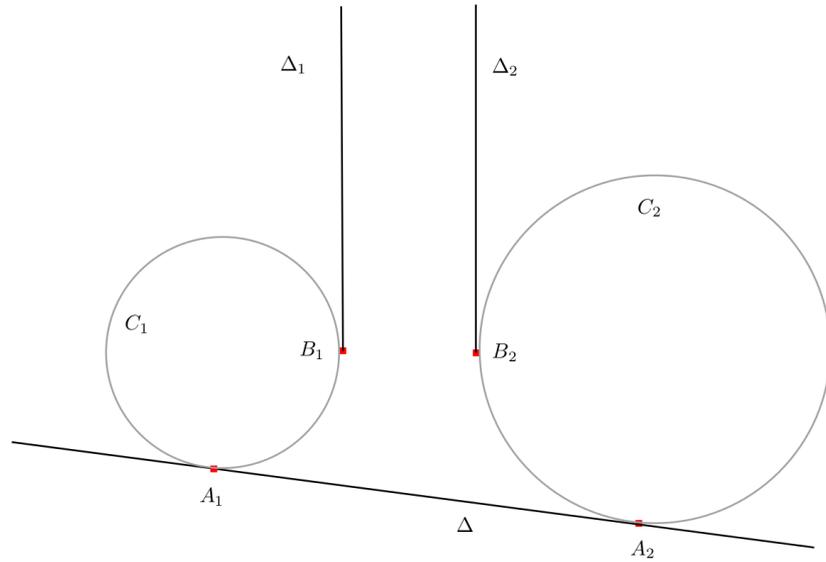


FIGURE 3.1 – Construction d’une jointure 2D permettant la jointure 3D entre un cylindre et un plan.

3.1.2 Détermination des bornes de la partie utile d’une cyclide pour la jointure

Lorsque nous utilisons une CD4 pour effectuer une jointure, nous devons déterminer la partie utile de la CD4 à conserver [Gar07]. La jointure entre deux sphères se fait le long de deux cercles caractéristiques de la CD4, cercles obtenus avec θ ou ψ constant. On peut obtenir plusieurs types de jointures : une jointure de type poteau sans point singulier (figure 3.2(a)) ou une jointure de type récipient avec zéro, un ou plusieurs points singuliers (figure 3.2(b)). Dans [Gar07], l’auteur donne les algorithmes permettant de déterminer les bornes de la partie utile à la jointure dans \mathcal{E}_3 .

3.2 De nouveaux algorithmes de jointures G^1 en utilisant des cyclides de Dupin

3.2.1 Jointures entre deux sphères ou plans par une cyclide de Dupin en anneau

3.2.1.1 Principe des algorithmes

Rappelons qu’un plan peut être vu comme une sphère particulière. Dans la suite de ce document, le terme sphère désignera une sphère ou un plan de \mathcal{E}_3 . Nous précisons lorsque nous voudrions faire la différence entre les deux cas. Les algorithmes 1 et 2 permettent la réalisation de jointures sphère-sphère par des cyclides.

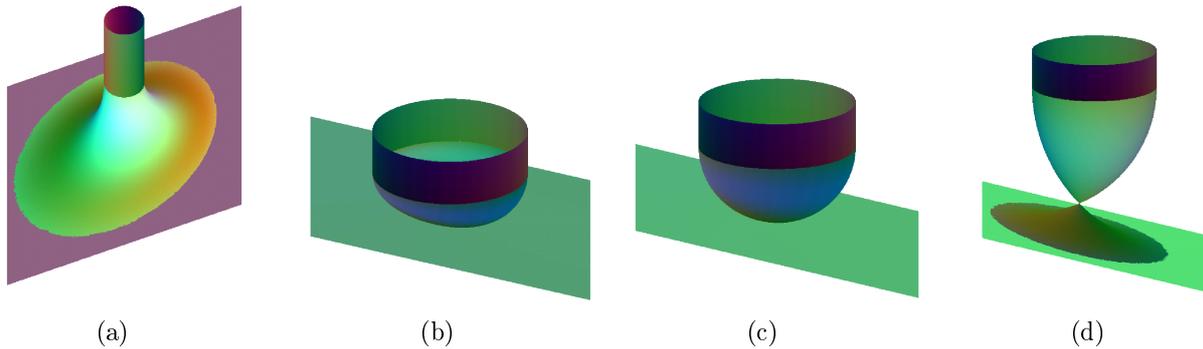


FIGURE 3.2 – Une jointure par un morceau de cyclide de Dupin le long de cercles caractéristiques avec ψ constant. (a) Une jointure de type poteau sans point singulier. (b) Une jointure de type récipient sans point singulier. (c) et (d) Une jointure de type récipient avec un point singulier.

Dans l'algorithme 1, à partir de deux sphères données, l'utilisateur construit trois sphères tangentes (en se donnant par exemple trois points) aux deux sphères originelles et l'algorithme détermine alors la cyclide qui est tangente aux trois sphères construites le long de cercles caractéristiques. Quant à l'algorithme 2, il permet à l'utilisateur, à partir de deux sphères données, d'en créer une troisième et de construire la cyclide.

Étant donné trois sphères fixes de centres non alignés, nous désirons construire une CD4A en considérant que ces trois sphères sont de la même famille de sphères dont la cyclide est l'enveloppe. Pour construire les cercles principaux de cette CD4A, on se place dans le plan défini par les centres de ces sphères (ces centres appartiennent à l'une des coniques de la figure 2.6). La section de chaque sphère par ce plan est un cercle. Les cercles principaux de la CD4A sont des cercles tangents aux trois cercles précités. En fait, il en existe au total quatre paires (figure 3.3). Les points à égale distance de deux des cercles initiaux forment deux hyperboles. L'intersection des quatre hyperboles à partir de deux couples de cercles donne huit points. Ces points sont les centres des cercles tangents aux trois cercles initiaux, la distance aux cercles initiaux permet d'obtenir leurs rayons. Comme nous ne considérons que des CD4A, nous ne pouvons avoir que des cercles tangents non sécants (figures 2.14(a) et 2.15(a)). Il y a cependant deux cas :

- Si l'un des cercles est à l'intérieur du disque qui a pour bord l'autre cercle, on se place dans le plan de symétrie P_z de la CD4A, figure 2.15(a).
- Sinon on se place dans le plan de symétrie P_y de la CD4A, figure 2.14(a).

Ces cercles sont alors les cercles principaux de la CD4A de jointure. Selon leurs dispositions respectives (figures 2.14(a) et 2.15(a)), on se place dans un des plans de symétrie P_y ou P_z de la cyclide. Enfin, il reste à déterminer les bornes de la partie utile de la cyclide pour la jointure. Notons que si la sphère est un plan, la borne correspondante de la CD4 est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

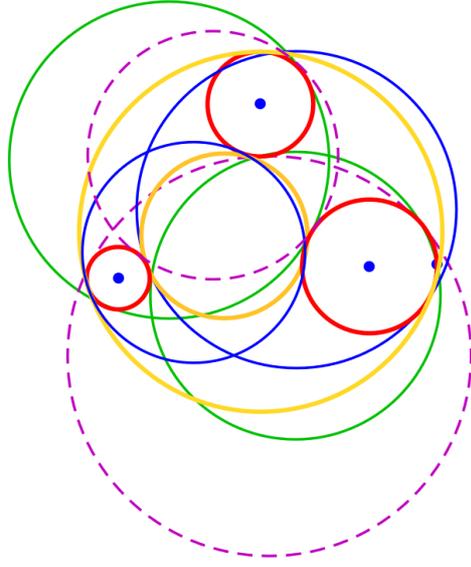


FIGURE 3.3 – Ensemble des cercles tangents (verts, violets, jaunes et bleus) à trois autres cercles (rouges).

Algorithme 1 Jointure sphère-sphère par une CD4A

Entrée : Deux sphères S_0 et S_1 .

1. Choix de trois sphères St_0 , St_1 et St_2 tangentes à S_0 et S_1 , de centres distincts et ne contenant pas un même point.
2. Détermination du plan de symétrie P de la CD4.
3. Détermination des cercles C_0 , C_1 et C_2 sections de St_0 , St_1 et St_2 par P .
4. Détermination des deux cercles C_{t_0} et C_{t_1} non sécants tangents à C_0 , C_1 et C_2 et détermination du plan de symétrie de la CD4A qu'ils définissent (figure 3.5(b)).
5. Calcul des paramètres a , c et μ de la CD4A à partir des cercles principaux C_{t_0} et C_{t_1} .
6. Détermination des éventuelles translations et rotations à effectuer pour placer la CD4A dans le repère de la scène.
7. Calcul des bornes de la partie utile de la CD4A pour la jointure.

Sortie : La partie utile de la CD4A effectuant la jointure G^1 entre les deux sphères S_0 et S_1 .

Remarque 1

- a. Il est possible d'adapter l'algorithme 2 pour effectuer une jointure de type récipier par une CD4I. Plusieurs jointures de ce type sont possibles en considérant les paires de cercles sécants tangents à C_0 , C_1 et C_2 dans l'étape 3 (figure 3.3) et en calculant les paramètres de la CD4I correspondante à l'étape 4 [Gar07].

Algorithme 2 Jointure sphère-sphère par une CD4A

Entrée : Deux sphères S_0 et S_1 .

1. Choix d'une troisième sphère S_2 .
2. Détermination du plan de symétrie P de la CD4.
3. Détermination des cercles C_0 , C_1 et C_2 sections de S_0 , S_1 et S_2 par P .
4. Détermination des deux cercles C_{t_0} et C_{t_1} non sécants tangents à C_0 , C_1 et C_2 et détermination du plan de symétrie de la CD4A qu'ils définissent (figures 3.7(b) et 3.9(b)).
5. Calcul des paramètres a , c et μ de la CD4A à partir des cercles principaux C_{t_0} et C_{t_1} .
6. Détermination des éventuelles translations et rotations à effectuer pour placer la CD4A dans le repère de la scène.
7. Calcul des bornes de la partie utile de la CD4A pour la jointure.

Sortie : La partie utile de la CD4A effectuant la jointure G^1 entre les deux sphères S_0 et S_1 .

- b. Le plan de construction dans le cas d'une jointure sphère-plan avec l'algorithme 4 est orthogonal au plan et passe par les centres des deux sphères (figure 3.4(a)). Dans le cas d'une jointure plan-plan, il est orthogonal aux deux plans et passe par le centre de la sphère (figure 3.4(b)).
- c. La position de la troisième sphère ne permet pas toujours d'obtenir comme jointure une CD4A. La détermination de l'ensemble des positions convenables de cette troisième sphère peut se faire en utilisant l'espace des sphères, chapitre 4. Nous nous plaçons, pour l'instant, dans les cas favorables.

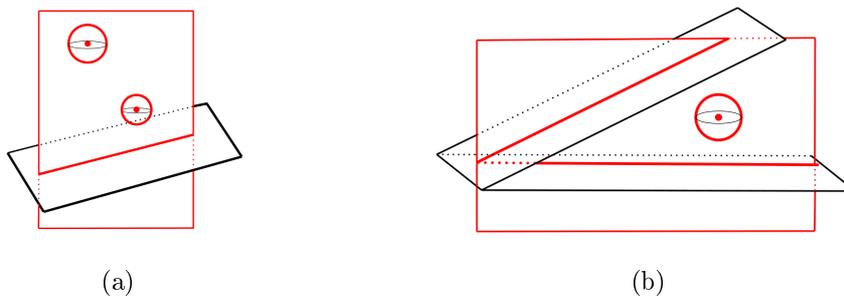


FIGURE 3.4 – Le plan de construction (en rouge). (a) Lors d'une jointure sphère-plan avec l'algorithme 2. (b) Lors d'une jointure plan-plan avec l'algorithme 2.

3.2.1.2 Exemples numériques

Jointure sphère-sphère en utilisant l'algorithme 1

Soit S_0 la sphère de centre $O_0(0, 35; 0; 6, 1)$ de rayon 5, 11 et S_1 la sphère de centre $O_1(0, 35; 0; -6, 1)$ de rayon 5, 11, les deux sphères à joindre.

L'étape 1 de l'algorithme 1 consiste à se donner trois autres sphères tangentes à S_0 et S_1 :

- S_{t_0} centrée en $O_{t_0}(-5; 0; 0)$ de rayon 3, sphère en rouge sur la figure 3.5(a);
- S_{t_1} centrée en $O_{t_1}(4; 0; 0)$ de rayon 2, sphère en vert sur la figure 3.5(a);
- S_{t_2} centrée en $O_{t_2}(-4, 75; 4, 75; 0)$ de rayon 4,15, sphère en gris sur la figure 3.5(a).

Le plan de construction est le plan P d'équation $z = 0$ défini par O_{t_0} , O_{t_1} et O_{t_2} (Étape 2) et les deux cercles principaux, cercles non sécants et tangents aux cercles sections de S_{t_0} , S_{t_1} et S_{t_2} par P , (figure 3.5(b)) permettent de déterminer les paramètres $a \simeq 5,08$, $c \simeq 1,41$ et $\mu \simeq 2,98$ de la cyclide de jointure (figures 3.6(a) et 3.6(b)). Dans cet exemple, nous avons $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\psi \in [\psi_m, \psi_M]$ avec $\psi_m \simeq \frac{-\pi}{3}$ et $\psi_M \simeq \frac{\pi}{3}$ (Étape 7 et figure 3.6(c)).

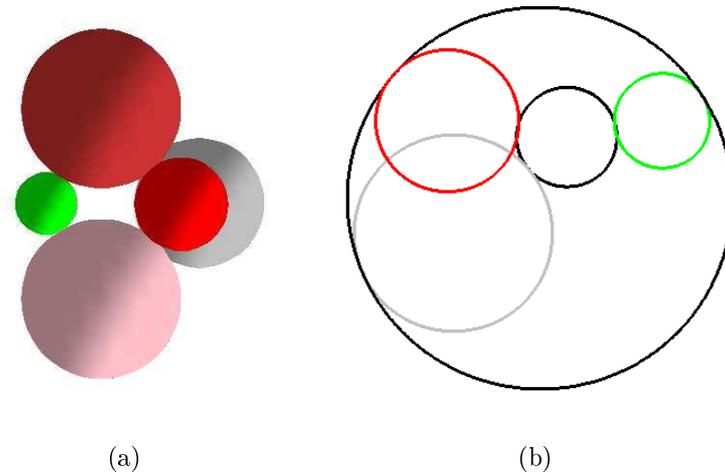


FIGURE 3.5 – Jointure sphère-sphère en utilisant l'algorithme 1. (a) Les deux sphères de départ (brique et rose) et trois sphères tangentes (rouge, verte et grise). (b) Construction des deux cercles principaux C_{t_0} et C_{t_1} de la cyclide de jointure dans le plan P , tangents aux trois cercles C_0 , C_1 et C_2 .

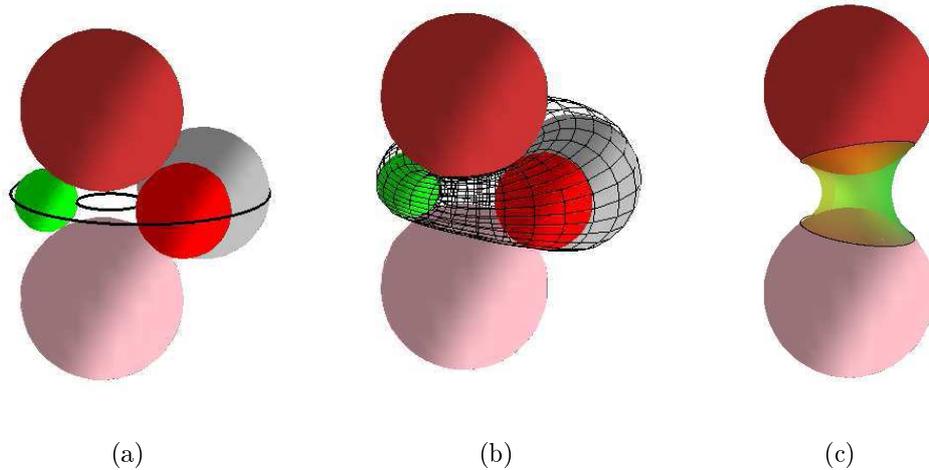


FIGURE 3.6 – Jointure sphère-sphère en utilisant l’algorithme 1. (a) Les deux cercles principaux de la cyclide de jointure. (b) La cyclide de jointure entre deux sphères, définie à partir des trois sphères tangentes aux deux sphères à joindre. (c) La partie utile de la cyclide de jointure située entre les deux sphères.

Jointure sphère-plan en utilisant l’algorithme 2

Soit S_0 la sphère de centre $O_0(-1; 5; 0)$ de rayon 2 et le plan P_y d’équation $y = 0$, les deux primitives à joindre.

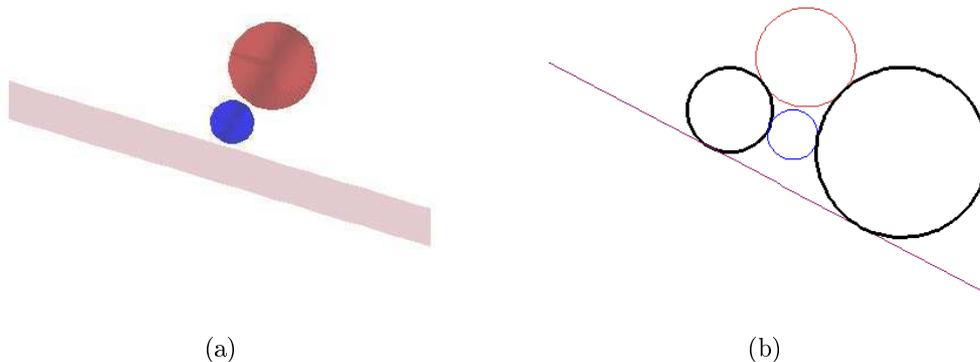


FIGURE 3.7 – Jointure sphère-plan en utilisant l’algorithme 2. (a) Les deux primitives à joindre et la sphère supplémentaire (bleue). (b) Construction des deux cercles principaux C_{t_0} et C_{t_1} de la cyclide de jointure dans le plan P , tangents aux trois cercles C_0 , C_1 et C_2 .

L’étape 1 de l’algorithme 2 consiste à se donner une sphère supplémentaire S_1 de rayon 1, centrée en $O_1(0; 2; 0)$ (figure 3.7(a)).

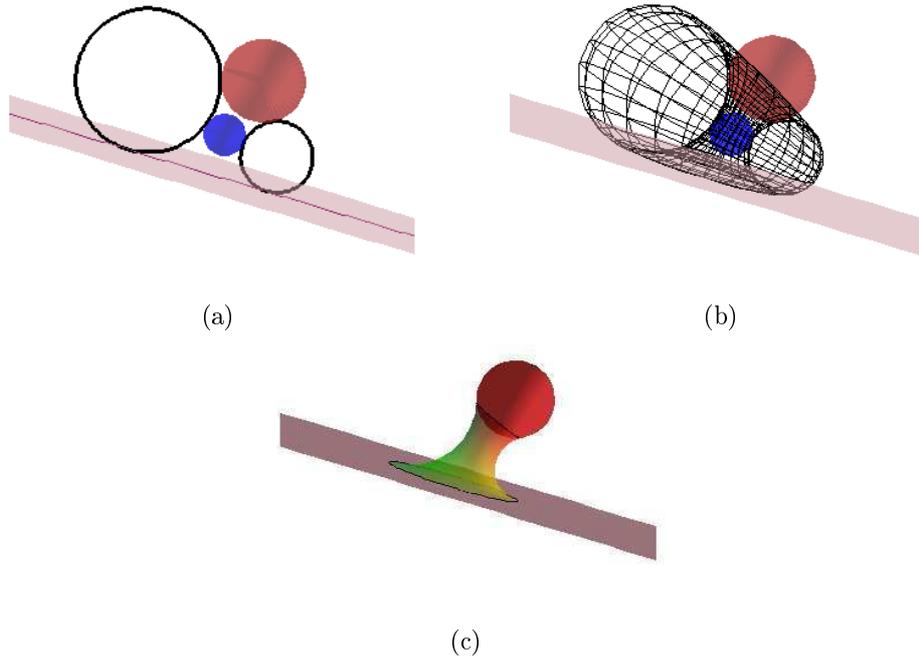


FIGURE 3.8 – Jointure sphère-plan en utilisant l'algorithme 2. (a) Les deux cercles principaux de la cyclide de jointure. (b) La cyclide de jointure entre la sphère et le plan, tangente à la sphère supplémentaire. (c) La partie utile de la cyclide pour la jointure entre les deux primitives.

Le plan de construction est le plan P orthogonal à P_y , passant par O_0 et O_1 et son équation est $z = 0$. Les deux cercles principaux sont disjoints et tangents aux deux cercles obtenus comme sections de S_0 et S_1 par P et à la droite obtenue comme section de P_y par P (figure 3.7(b)). Ils permettent de déterminer les paramètres $a \simeq 3,54$, $c \simeq 0,86$ et $\mu \simeq 2,56$ de la cyclide de jointure (figures 3.8(a) et 3.8(b)). Dans cet exemple, nous avons $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\psi \in [\psi_m, \psi_M]$ avec $\psi_m = \frac{-\pi}{2}$ et $\psi_M \simeq \frac{\pi}{5}$ (étape 7 et figure 3.8(c)).

Jointure plan-plan en utilisant l'algorithme 2

Soit P_0 le plan d'équation $z = \frac{-1}{2}x$ et le plan P_1 d'équation $z = \frac{1}{2}x$, les deux plans à joindre.

L'étape 1 de l'algorithme 2 consiste à se donner une sphère supplémentaire S centrée en $O(3; 0; 0)$ de rayon 0,8 (figure 3.9(a)).

Le plan de construction est le plan P orthogonal à P_0 et P_1 passant par O et a pour équation $y = 0$. Les deux cercles principaux, cercles non sécants et tangents au cercle et aux droites sections de P_0 , P_1 et S par P , (figure 3.9(b)) permettent de déterminer les paramètres $a \simeq 2,75$, $c \simeq 1,23$ et $\mu \simeq 1,90$ de la cyclide de jointure (figures 3.10(a) et 3.10(b)). Dans cet exemple, nous avons $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\psi \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (étape 7 et figure 3.10(c)).

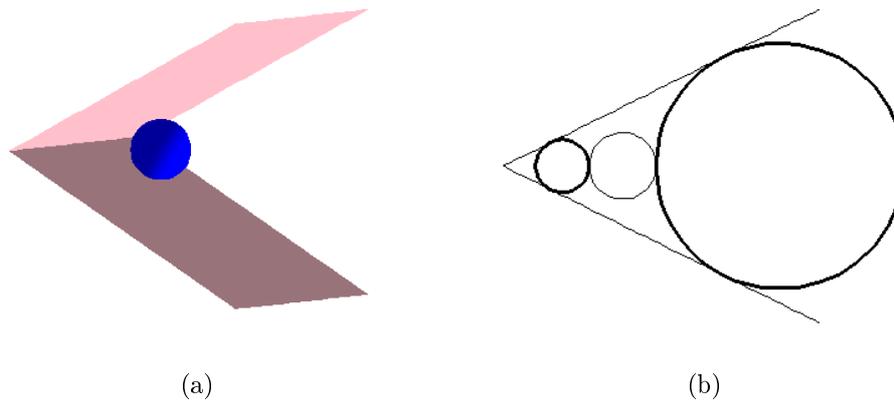


FIGURE 3.9 – (a) Les deux plans à joindre et la sphère supplémentaire (bleue). (b) Construction des deux cercles principaux C_{t_0} et C_{t_1} de la cyclide de jointure dans le plan P , tangents aux trois cercles C_0 , C_1 et C_2 .

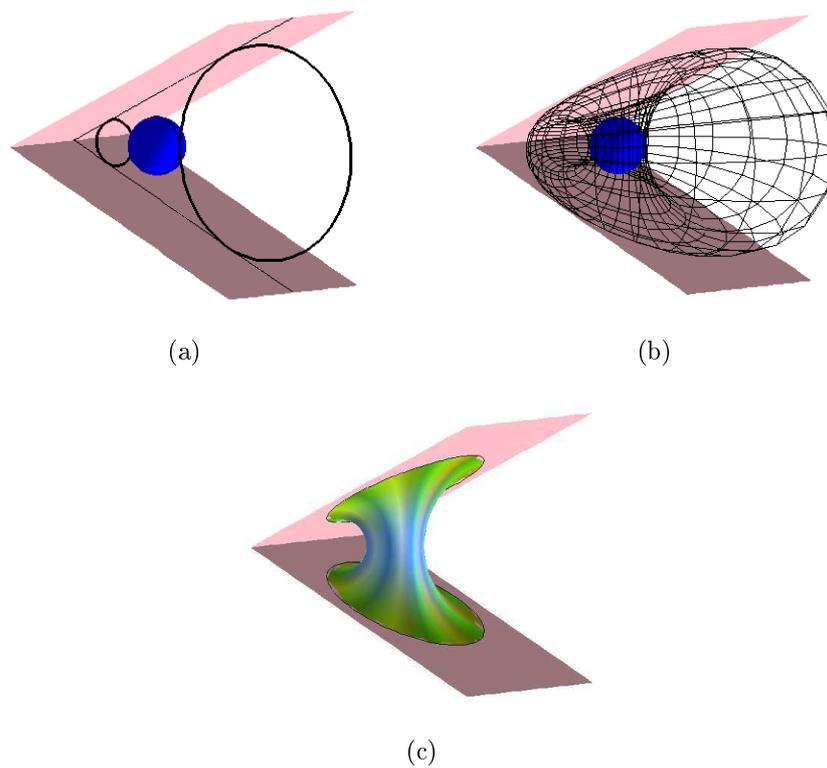


FIGURE 3.10 – (a) Les deux cercles principaux de la cyclide de jointure. (b) La cyclide de jointure entre les deux plans, tangente à la sphère supplémentaire. (c) La partie utile de la cyclide pour la jointure située entre les deux plans.

3.2.2 Jointures entre une surface canal et un plan

3.2.2.1 Principe de la méthode

En considérant la cyclide de Dupin en tant qu'enveloppe de sphères et particulièrement les définitions 1 et 3, nous pouvons donner deux nouveaux algorithmes permettant d'effectuer une jointure G^1 entre une surface canal et un plan. A partir de trois sphères tangentes au plan, d'une part, et tangentes à la surface canal le long d'un cercle caractéristique (cercle de jointure) d'autre part, l'algorithme 3 permet de déterminer une cyclide de Dupin en tant qu'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre à laquelle les trois premières appartiennent. Ensuite, nous considérons le plan contenant les trois centres des sphères tangentes comme le plan de construction qui est aussi un plan de symétrie de la cyclide solution. Cet algorithme est basé sur la définition 1 d'une cyclide de Dupin. Quant à l'algorithme 4, il n'utilise que des déductions géométriques. Il généralise celui proposé dans [GFN04]. Nous déterminons le plan de construction à partir des primitives initiales et nous utilisons un algorithme similaire à celui donné dans l'article [GFN04] dans ce plan de construction. Dans les méthodes existantes, des contraintes spatiales étaient imposées pour réaliser la jointure. Avec nos algorithmes, ce n'est plus le cas. Le plan contenant le cercle de jointure est un plan du faisceau avec ψ constant, figure 2.9. Dans notre méthode, nous considérons la droite intersection du plan à joindre et du plan contenant le cercle de jointure. Cette droite est orthogonale au plan P_y induit par le repère de la cyclide de jointure. Ce dernier plan est totalement déterminé puisqu'il contient le centre du cercle de jointure.

Dans les deux cas, le cercle de jointure est un cercle caractéristique de la surface canal initiale. Une fois le plan de construction déterminé (P_z dans l'algorithme 3 et P_y dans l'algorithme 4), les deux algorithmes permettent de déterminer les cercles principaux de la cyclide de jointure dans le plan de symétrie considéré et de calculer les paramètres de cette dernière. Enfin, les bornes de la partie utile de la cyclide et les transformations possibles à effectuer pour la remettre dans le repère de la scène sont déterminées [Gar07]. Nous pouvons noter que la borne de la partie utile de la cyclide correspondant au plan est soit $\psi = \frac{\pi}{2}$ soit $\psi = \frac{-\pi}{2}$.

Remarque 2 *Deux cercles principaux contenus dans un plan de symétrie d'une cyclide ne suffisent pas à la déterminer complètement. Il faut considérer les deux paires de cercles principaux. Avec une seule paire, comme c'est le cas ici, il existe parfois deux cyclides distinctes, de types différents, pouvant effectuer la jointure. Ainsi, l'utilisateur doit faire un choix sur le type de la cyclide utilisée pour, par exemple, préférer une jointure de type poteau ou de type récipient. Ainsi, dans l'algorithme 3, l'utilisateur doit choisir le type de la cyclide ($CD4A$ ou $CD4I$) à utiliser après avoir déterminé ces cercles principaux, alors que dans l'algorithme 4, ces cercles principaux sont déterminés en fonction du choix du type de la cyclide effectué auparavant. Nous ne considérons pas le cas où la cyclide de jointure est un tore de révolution (les calculs étant triviaux dans ce cas particulier).*

Algorithme 3 Jointure entre une surface canal et un plan

Entrée : Une surface canal $Surf_0$ et un plan P_0 .

1. Choix d'un cercle caractéristique C_0 sur $Surf_0$.
2. Choix de trois sphères distinctes S_1, S_2 et S_3 tangentes à $Surf_0$ le long de C_0 et à P_0 .
3. Détermination du plan de symétrie P_z de la CD4, contenant les trois centres des sphères S_1, S_2 et S_3 .
4. Détermination des cercles C_1, C_2 et C_3 sections de S_1, S_2 et S_3 par P_z .
5. Détermination des deux cercles principaux C_{t_1} et C_{t_2} , non sécants, tangents à C_1, C_2 et C_3 , figure 3.3.
6. Calcul des paramètres a, c et μ de la CD4 à partir des cercles principaux C_{t_1} et C_{t_2} , selon le type de la CD4 de jointure désirée (CD4A ou CD4I).
7. Détermination des éventuelles translations et rotations à effectuer pour placer la CD4 dans le repère de la scène, [Gar07].
8. Calcul des bornes de la partie utile de la CD4 pour la jointure, [Gar07].

Sortie : La partie utile de la CD4 effectuant la jointure G^1 entre la surface canal $Surf_0$ et le plan P_0 .

Algorithme 4 Jointure entre une surface canal et un plan

Entrée : Une surface canal $Surf_0$ et un plan P_0 .

1. Choix d'un cercle caractéristique C_0 sur $Surf_0$ et détermination du plan P_1 contenant C_0 .
2. Détermination de la droite Δ_0 , intersection de P_0 et P_1 .
3. Détermination du plan P_y orthogonal à Δ_0 passant par le centre O_0 de C_0 .
4. Détermination des deux points B_1 et B_2 section de C_0 par P_y .
5. Détermination de la droite Δ par $\Delta = P_0 \cap P_y$
6. Détermination des deux droites Δ_1 et Δ_2 tangentes à $Surf_0$ en B_1 et B_2 dans P_y
7. Détermination des deux cercles C_{t_1} tangent à Δ et Δ_1 en B_1 et C_{t_2} tangent à Δ et Δ_2 en B_2 , selon le type de la cyclide de jointure désirée, [GFN04]
8. Calcul des paramètres a, c et μ de la CD4 à partir des cercles principaux C_{t_1} et C_{t_2} .
9. Détermination des éventuelles translations et rotations à effectuer pour placer la CD4 dans le repère de la scène, [Gar07].
10. Calcul des bornes de la partie utile de la CD4 pour la jointure, [Gar07].

Output : La partie utile de la CD4 effectuant la jointure G^1 entre la surface canal $Surf_0$ et le plan P_0 .

3.2.2.2 Exemples numériques

En utilisant les deux algorithmes précédents, nous pouvons donner les exemples suivant de jointures entre une surface canal et un plan. Dans le premier exemple, la surface canal est

un tube et dans le second, un serpent. Afin de montrer que seule la dernière sphère de la surface canal joue un rôle, nous avons choisi des surfaces canal qui ne sont pas des surfaces de révolution.

Jointure entre un tube et un plan en utilisant l'algorithme 3

Un tube est une surface canal particulière, enveloppe de sphères de rayon constant. Nous considérons, d'une part, le tube de courbe centrale Γ_0 telle que $\Gamma_0(u) = (u, 0, \cos(u))$ est défini par :

$$Tube(u; v) = \begin{pmatrix} u + \frac{(r \cos(v)) \sin(u)}{\sqrt{1 + \sin(u)^2}} \\ r \sin(v) \\ \cos(u) + \frac{r \cos(v)}{\sqrt{1 + \sin(u)^2}} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

avec $r = 0,8$, $u \in [-5; 5]$ et $v \in [0; 2\pi]$ et, d'autre part, le plan P_0 d'équation $z = -0,6x + 10$. On veut joindre le tube au plan P_0 le long du cercle caractéristique C_0 d'équation $Tube(5; v)$ avec $v \in [0; 2\pi]$ (figure 3.11).

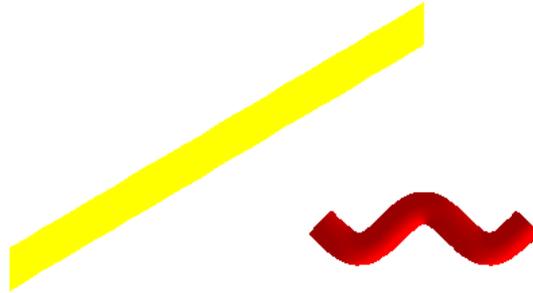


FIGURE 3.11 – Le tube et le plan à joindre.

Soient les trois sphères S_1 , S_2 et S_3 tangentes au plan P_0 et au tube le long de C_0 qui ont pour centres respectifs $O_1(5; 6,88; 0,28)$, $O_2(5; -6,88; 0,28)$ et $O_3(2,48; 3,86; 3,21)$ (en coordonnées approchées) et de rayons respectifs $r_1 \simeq 6,08$, $r_2 \simeq 6,08$ et $r_3 \simeq 4,66$.

On se place dans le plan P_z défini par O_1, O_2 et O_3 . On détermine les cercles C_1 , C_2 et C_3 , sections des sphères S_1 , S_2 et S_3 par P_z , puis on détermine les cercles principaux de la CD4A, tangents à C_1 , C_2 et C_3 (figure 3.12).

Ensuite, on calcule les paramètres de la cyclide de jointure $a \simeq 7,30$, $c \simeq 2,33$ et $\mu \simeq 6,52$, figure 3.13(a), ce qui correspond à une cyclide en anneau ou CD4A. Après avoir déterminé les rotations et translations pour replacer la CD4A dans le repère de la scène, on obtient la CD4A illustrée en figure 3.13(a). La jointure s'effectue pour $\psi \in [0; \frac{\pi}{2}]$, figure 3.13(b).

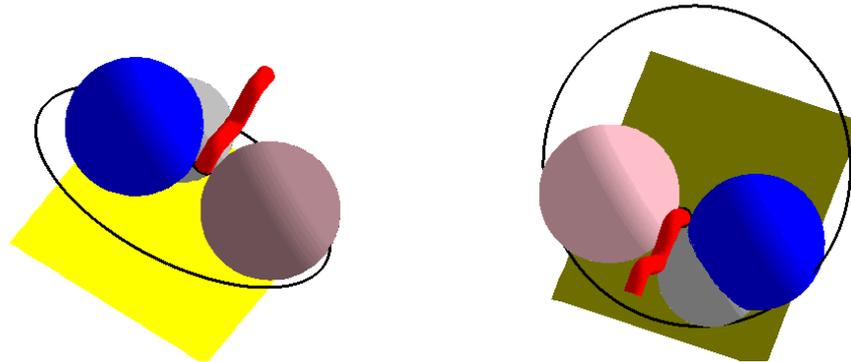


FIGURE 3.12 – Les cercles principaux de la cyclide de jointure obtenus grâce aux trois sphères tangentes au tube et au plan (deux vues).

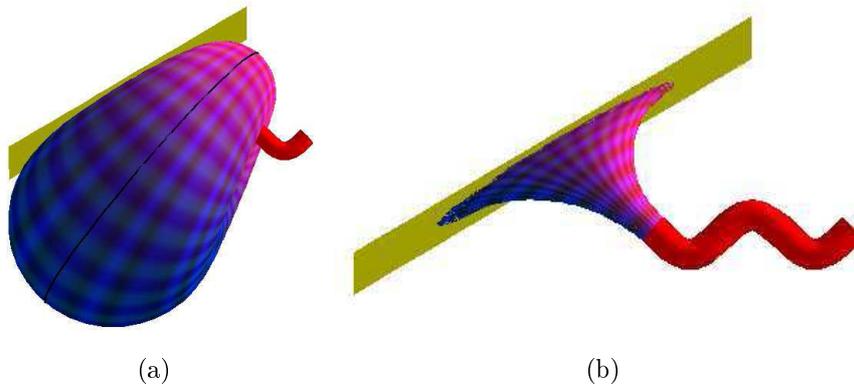


FIGURE 3.13 – (a) La CD4A de jointure entre le tube et le plan. (b) La jointure entre le tube et le plan.

Remarque 3 On obtient le même résultat avec l’algorithme 4. Le plan de construction orthogonal au plan contenant le cercle C_0 et à P_0 est le plan P_y . Les points, sections de C par P_y , sont les points $B_1(4, 44; 0; 0, 86)$ et $B_2(5, 55; 0; -0, 29)$ (coordonnées approchées). Les cercles Ct_1 et Ct_2 , tangents à P et au tube aux points B_1 et B_2 sont illustrés en figure 3.14.

En calculant à nouveau les paramètres de la CD4A de jointure avec ces cercles principaux, on trouve bien $a \simeq 7,3$, $c \simeq 2,33$ et $\mu \simeq 6,52$. On obtient la même jointure que précédemment (figure 3.13).

Jointure entre un serpent in et un plan en utilisant l’algorithme 4

On cherche à joindre, avec l’algorithme 4, un serpent in $Serp$ et un plan P_0 le long d’un cercle caractéristique C_0 du serpent in. L’équation de $Serp$ est donnée par la formule (3.2) :

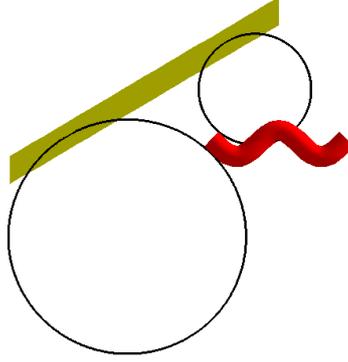


FIGURE 3.14 – Les deux cercles principaux de la cyclide de jointure dans P_y , déterminés par l’algorithme 4.

$$Serp(u; v) = \begin{pmatrix} (a_0 + b_0 \cos(u)) \cos(v) + \frac{b_0 h_0}{\sqrt{a_0^2 + h_0^2}} \sin(u) \sin(v) \\ (a_0 + b_0 \cos(u)) \sin(v) - \frac{b_0 h_0}{\sqrt{a_0^2 + h_0^2}} \sin(u) \cos(v) \\ h_0 v + \frac{b_0 a_0}{\sqrt{a_0^2 + h_0^2}} \sin(u) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

avec $a_0 = 3$, $b_0 = 2$ et $h_0 = 1$. Le plan P_0 a pour équation $y = x - 10$ et C_0 , donné par $Serp(u; 0)$, a pour centre $O_0 = \Gamma_0(0)$ et pour rayon b_0 (figure 3.15).

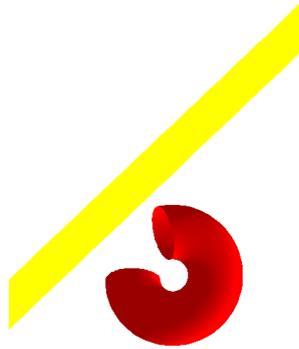


FIGURE 3.15 – Le serpent in et le plan à joindre.

Dans le plan P_y , orthogonal au plan P_0 et au plan contenant C_0 , on détermine les deux cercles C_{t_1} et C_{t_2} tangents à P_0 et à $Serp$ le long de C_0 , adéquats pour obtenir une CD4A, figure 3.16(a), ou une CD4I de jointure, figure 3.16(b).

Dans le premier cas, les paramètres de la CD4A sont $a \simeq 14,84$, $c \simeq 10,84$ et $\mu \simeq 12,94$ tandis que, dans le second cas, les paramètres de la CD4I sont $a \simeq 6,49$, $c \simeq 4,71$ et $\mu \simeq 8,49$. Après avoir effectué les rotations et translations nécessaires pour replacer la CD4 dans le repère

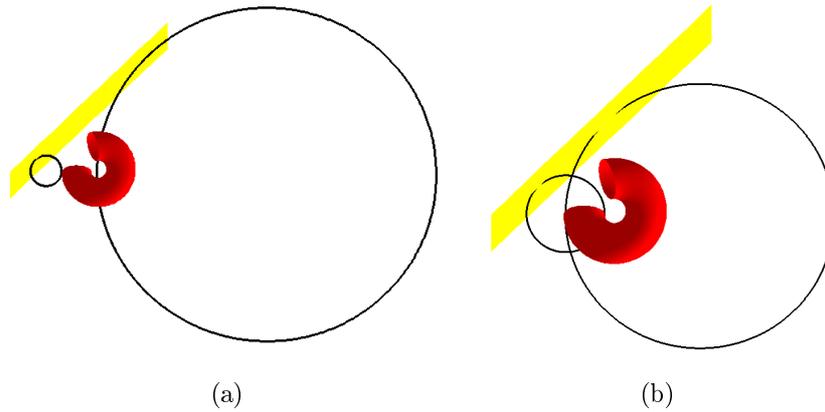


FIGURE 3.16 – Les deux cercles principaux de la cyclide de jointure. (a) La cyclide de jointure est une CD4A. (b) La cyclide de jointure est une CD4I.

de la scène, on obtient la partie utile de la jointure pour $\psi \in [0; \frac{\pi}{2}]$, dans les deux cas (figure 3.17(a) et 3.17(b)).

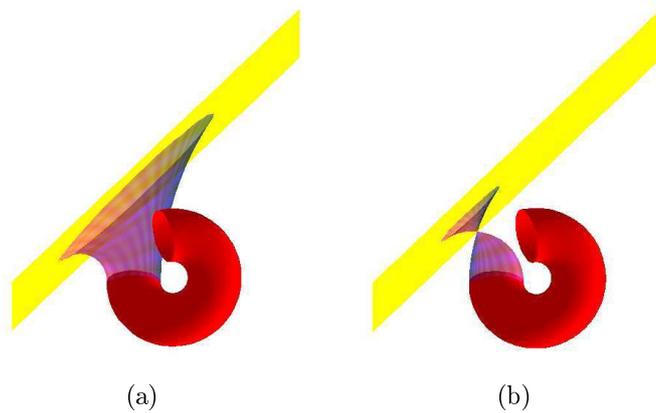


FIGURE 3.17 – La jointure entre le serpent et le plan. (a) En utilisant une CD4A. (b) En utilisant une CD4I.

Chapitre 4

L'espace des sphères

Nous venons de voir différents algorithmes de jointures dans l'espace \mathcal{E}_3 . Nous pouvons traduire ces algorithmes dans l'espace des sphères où une sphère orientée est représentée par un point d'une quadrique de dimension 4. Une famille de sphères dont une cyclide de Dupin est l'enveloppe est représentée par une courbe particulière. Ainsi, nous ramenons nos problèmes de jointures de surfaces à des problèmes linéaires dans un espace de dimension 5.

4.1 Construction de l'espace des sphères

L'espace de Lorentz, noté $\overrightarrow{L}_{4,1}$, est le R-espace vectoriel \mathbb{R}^5 muni de la forme de Lorentz $\mathcal{L}_{4,1}$, bilinéaire, définie, symétrique, telle que, pour $\overrightarrow{u}(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$ et $\overrightarrow{v}(y_0; y_1; y_2; y_3; y_4)$, [LW08], nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

et la forme quadratique associée $\mathcal{Q}_{4,1}$ est :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{u}) = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

En prenant comme point particulier $O_5(0; 0; 0; 0; 0)$, nous obtenons l'espace affine $L_{4,1}$ d'espace vectoriel attaché $\overrightarrow{L}_{4,1}$

La quadrique, de dimension 4, représentant l'espace des sphères est définie par :

$$\Lambda^4 = \{M \in L_{4,1}, \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{O_5M}) = 1\} \quad (4.1)$$

Le cône de lumière, quant à lui, est défini par :

$$\mathcal{C}_l = \{M \in L_{4,1}, \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{O_5M}) = 0\} \quad (4.2)$$

Notons que pour la forme quadratique de Lorentz, les points de Λ^4 sont à une « pseudo »-distance 1 de l'origine O_5 . Nous pouvons donc voir la surface Λ^4 comme une sphère(-Lorentz) de rayon 1. Il en est de même pour le cône de lumière, dont les points sont à une « pseudo »-distance nulle de l'origine O_5 : il peut être vu comme une sphère(-Lorentz) de rayon nul. Cependant, nous préférons la terminologie de la théorie de la relativité qui nous permet plus simplement de faire des illustrations compréhensibles par le lecteur. Nous n'oublions pas pour autant les

propriétés de la forme de Lorentz. Les illustrations et les termes employés dans la suite sont issus de ce « point de vue euclidien ». Notons que lorsque nous parlons d'orthogonalité dans Λ^4 , il s'agit de l'orthogonalité relative à la forme de Lorentz. Dans $L_{4,1}$ et $\overrightarrow{L}_{4,1}$, nous pouvons distinguer trois types de vecteurs et de plans, table 4.1.

type	vecteur \vec{v}	plan
espace	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{v}) > 0$	tous les vecteurs du plan sont de type espace
lumière	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{v}) = 0$	plan parallèle à un plan tangent au cône de lumière ou contenant exactement 1 direction lumière
temps	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{v}) < 0$	au moins un vecteur du plan est de type temps ou plan contenant exactement 2 directions lumière

TABLE 4.1 – Différents types de vecteurs de $\overrightarrow{L}_{4,1}$ et de plans de $L_{4,1}$ et $\overrightarrow{L}_{4,1}$.

Afin de pouvoir manipuler les mêmes objets dans \mathcal{E}_3 et dans l'espace des sphères, nous devons construire un modèle de \mathcal{E}_3 dans $L_{4,1}$. Cette construction nous permettra de ramener l'équation d'une sphère à une équation linéaire.

Le lemme 1, illustré par les figures 4.1 et 4.2, permet de définir une isométrie entre \mathcal{E}_3 et un parabolôïde Π de dimension 3, section du cône de lumière \mathcal{C}_l par un hyperplan affine \mathcal{H} de type lumière. Le vecteur \vec{l}^* permet de définir l'origine de \mathcal{E}_3 dans $\mathcal{H} \cap \Pi$ tandis que le vecteur \vec{l} représente le point à l'infini de \mathcal{E}_3 [DFM07,DFGL12] : la direction de ce vecteur est la direction asymptotique du parabolôïde Π .

Lemme 1 :

Soit \mathcal{H} l'hyperplan d'équation : $x_0 - x_4 = 1$.

Le parabolôïde $\Pi = \mathcal{C}_l \cap \mathcal{H}$, muni de la métrique obtenue comme restriction de $\mathcal{Q}_{4,1}$ à \mathcal{H} est isométrique à l'espace euclidien \mathcal{E}_3 .

Démonstration 1 L'idée de la démonstration est contenue dans les figures 4.1 et 4.2. L'hyperplan affine \mathcal{H} est de direction $\vec{\mathcal{H}}$. L'hyperplan vectoriel $\vec{\mathcal{H}}$ est tangent au cône de lumière le long de la génératrice engendrée par le vecteur \vec{l} $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2})$. En effet, cet hyperplan est l'ensemble des vecteurs \vec{u} vérifiant :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}, \vec{u}) = 0$$

Sur la figure 4.1, nous avons indiqué les vecteurs \vec{l} et \vec{l}^* $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2})$.

La restriction de $\mathcal{Q}_{4,1}$ à \mathcal{H} est dégénérée (de rang 3) et positive. Identifions \mathcal{E}_3 avec le sous-espace, inclus dans \mathcal{H} , d'équations :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La projection, parallèlement au vecteur lumière \vec{l} , du parabolöide Π , inclus dans \mathcal{H} , sur \mathcal{E}_3 , est une isométrie. Remarquons que \mathcal{E}_3 est tangent à Π au point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2})$. \square

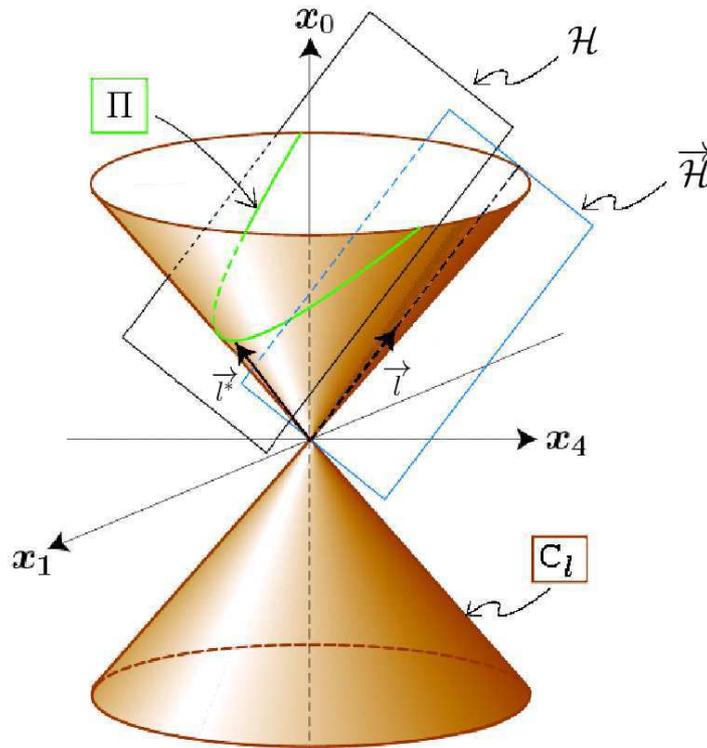


FIGURE 4.1 – Construction du parabolöide Π isométrique à l'espace affine euclidien usuel \mathcal{E}_3 . \vec{l} , \vec{l}^* , \vec{H} , et \mathcal{H} sont de type lumière. L'hyperplan \vec{H} est tangent à C_l . Toute direction lumière \vec{l}^* , distincte de \vec{l} , permet d'obtenir un point de \mathcal{E}_3 via le parabolöide Π .

Dans le paragraphe suivant, cette représentation nous permet de déterminer les formules de passage des sphères et des plans orientés de \mathcal{E}_3 à Λ^4 et de donner la correspondance entre les points de \mathcal{E}_3 et les points du parabolöide Π .

4.2 Représentation des points, sphères et plans orientés de \mathcal{E}_3

A la boule $B(a, b, c, r)$ de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon r , nous associons les deux sphères orientées $S^+(a; b; c; r)$ et $S^-(a; b; c; -r)$. La sphère orientée S^+ est le bord de la boule $B(a, b, c, r)$ et la sphère S^- est le bord du complémentaire de la boule $B(a, b, c, r)$ dans \mathcal{E}_3 . Par convention, dans le premier cas (resp. le second), le sens du vecteur normal à la sphère en un point M est identique (resp. contraire) à celui de $\vec{\Omega M}$. Les plans de \mathcal{E}_3 sont considérés comme des sphères de rayon infini et de centre situé à l'infini dans la direction orthogonale au plan. A chaque

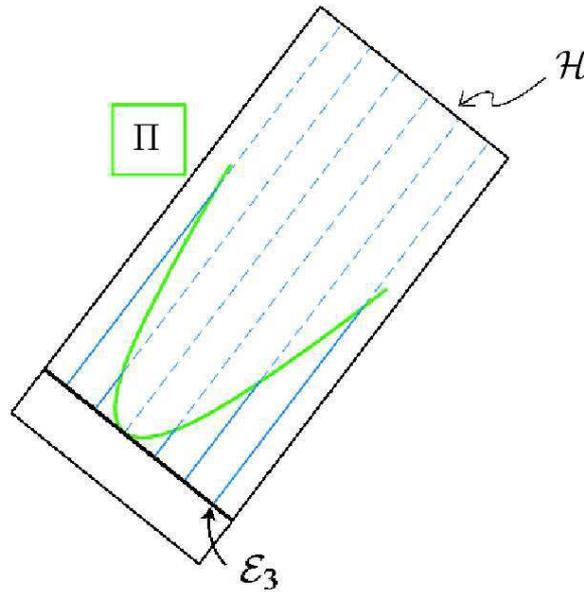


FIGURE 4.2 – Construction du paraboloides Π isométrique à l'espace affine euclidien usuel \mathcal{E}_3 . L'hyperplan \mathcal{H} est de type lumière, la restriction de la forme de Lorentz à cet hyperplan est dégénérée et les directions en bleu annulent la forme de Lorentz.

sphère orientée S de \mathcal{E}_3 correspond un point σ de Λ^4 . Nous allons construire une bijection entre l'ensemble des sphères orientées de \mathcal{E}_3 et la quadrique Λ^4 grâce à l'isométrie décrite ci-dessus, c'est-à-dire que les éléments de \mathcal{E}_3 sont vus sur le paraboloides Π . Pour cela, partons des vecteurs lumières \vec{l} et \vec{l}^* et rappelons que l'hyperplan \mathcal{H} d'équation $x_0 - x_4 = 1$ est parallèle à \vec{l}^\perp et passe par le point $v_{l^*}(\frac{1}{2}; 0; 0; 0; \frac{-1}{2})$.

Comme le paraboloides Π , intersection du cône de lumière avec \mathcal{H} , est isométrique à \mathcal{E}_3 , nous faisons correspondre au point $m(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$ de Π le point $X(x_1; x_2; x_3)$ de \mathcal{E}_3 . Le paraboloides Π est alors défini par le système :

$$\begin{cases} f_1(m) = x_0 - x_4 - 1 = 0 \\ f_2(m) = x_0 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$m \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1) \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) \end{pmatrix}$$

Considérons la sphère S de \mathcal{E}_3 de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon r . Une sphère étant totalement déterminée par un point, son vecteur normal unitaire en ce point et sa courbure, considérons un point M sur S ainsi que le vecteur \vec{N} unitaire normal à S en M . Si σ est le point correspondant à S dans Λ^4 , m le point correspondant à M dans Π , \vec{n} le vecteur $\mathcal{L}_{4,1}$ -unitaire, $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonal à Π en m correspondant à \vec{N} et k la courbure de S en M alors, [HJ03, Cec92, LO08] :

$$\overrightarrow{O_5\sigma} = k\overrightarrow{O_5m} + \vec{n} \quad (4.3)$$

La démonstration de ce résultat se trouve dans [LO08].

Prenons, par exemple, le pôle nord $M(a; b; c + r)$ de S et $\vec{N}(0; 0; -1)$ un vecteur normal unitaire à S en M , nous avons :

$$m \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + (c + r)^2 + 1) \\ a \\ b \\ c + r \\ \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + (c + r)^2 - 1) \end{pmatrix}$$

Nous savons que la courbure de la sphère de rayon r vaut $k = \frac{1}{r}$. Il ne reste plus qu'à déterminer le vecteur \vec{n} de $\overrightarrow{\mathcal{L}_{4,1}}$ correspondant à \vec{N} . Nous avons vu précédemment que nous pouvions identifier \mathcal{E}_3 avec le sous-espace de dimension 3, inclus dans \mathcal{H} , d'équations :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

et que la projection du parabolôïde Π sur cet espace, parallèlement au vecteur \vec{l} , est une isométrie. Nous voulons donc que le vecteur \vec{n} se projette sur le vecteur \vec{N} . C'est pourquoi, \vec{n} s'écrit :

$$\vec{n}(\lambda; 0; 0; -1; \rho)$$

Il suffit maintenant de déterminer les valeurs de λ et ρ : \vec{n} est contenu dans l'espace $T_m\Pi$ tangent à Π en m . Cet espace de dimension 3 est orthogonal au plan engendré par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} définis par :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= -\overrightarrow{\nabla f_1(m)} = (1; 0; 0; 0; 1) \\ \vec{v} &= -\overrightarrow{\nabla f_2(m)} = (1; a; b; c + r; 0) \end{aligned}$$

En résolvant le système :

$$\begin{cases} L(\vec{u}, \vec{n}) = 0 \\ L(\vec{v}, \vec{n}) = 0 \end{cases}$$

nous obtenons le vecteur :

$$\vec{n}(-(c+r); 0; 0; -1; -(c+r))$$

Ainsi, à partir de la formule (4.3), nous donnons la correspondance entre le point σ et la sphère S dans la table 4.3. À partir de la formule (4.7), nous pouvons noter qu'à une sphère non orientée de \mathcal{E}_3 correspond deux points de Λ^4 , symétriques par rapport à O_5 .

De plus, le lecteur peut aisément vérifier que $\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma}) = 1$ et que la formule obtenue ne dépend pas du choix du point M sur la sphère S .

De la même manière, prenons un plan Q d'équation $ax + by + cz = d$ de \mathcal{E}_3 . Le fait que la courbure k du plan soit nulle implique que $\overrightarrow{O_5\sigma} = \vec{n}$. En tout point $M(x_0; y_0; z_0)$ de Q , un vecteur normal est $\vec{N}(a; b; c)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les valeurs de a , b , c et d sont choisies de telle façon que \vec{N} soit unitaire. Nous avons $\vec{n}(\lambda; a; b; c; \rho)$. Comme précédemment, au point M de \mathcal{E}_3 correspond le point m du paraboloïde Π . Le plan orthogonal à l'espace tangent $T_m\Pi$ est engendré par \vec{u} et $\vec{v}'(1; x_0; y_0; z_0; 0)$. En résolvant le système :

$$\begin{cases} L(\vec{u}, \vec{n}) = 0 \\ L(\vec{v}', \vec{n}) = 0 \end{cases}$$

nous obtenons alors le vecteur unitaire :

$$\vec{n}(d; a; b; c; d)$$

Inversement, un point $\sigma(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$ de Λ^4 , tel que $x_0 \neq x_4$ correspond à une sphère orientée S de \mathcal{E}_3 dont le centre a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_1}{x_0 - x_4}; \frac{x_2}{x_0 - x_4}; \frac{x_3}{x_0 - x_4} \right)$$

et dont le rayon est :

$$\frac{1}{x_0 - x_4} \tag{4.4}$$

Un point $\rho(x_0; x_1; x_2; x_3; x_0)$ de Λ^4 correspond à un plan Q de \mathcal{E}_3 d'équation :

$$x_1x + x_2y + x_3z = x_0 \tag{4.5}$$

Les formules de passage entre \mathcal{E}_3 et Π et entre Λ^4 et les sphères orientées de \mathcal{E}_3 sont reprises dans les tables 4.2 et 4.3.

Point de \mathcal{E}_3	Sens	Point de $\Pi \subset \mathcal{L}_{4,1}$	Condition
$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	\longrightarrow	$m = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 1) \\ x \\ y \\ z \\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{pmatrix}$	
$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	\longleftarrow	$m = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x_0 = x_4 + 1 \\ x_0 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1) \end{cases}$

TABLE 4.2 – Correspondance entre les points de \mathcal{E}_3 et les points du parabolöide Π .

A noter que l'ensemble des plans orientés de \mathcal{E}_3 est représenté dans Λ^4 par le 3-cylindre d'équations :

$$\begin{cases} x_0 - x_4 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

D'autres propriétés de la forme de Lorentz sont à considérer pour bien comprendre les algorithmes donnés dans la suite [DGL10] :

Propriété 1 *Deux vecteurs lumière $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonaux sont colinéaires.*

Démonstration 2 *Montrons que deux vecteurs lumière non colinéaires ne sont pas orthogonaux. Soient deux vecteurs lumière \vec{u} et \vec{v} non colinéaires. Sans perte de généralité, nous pouvons toujours écrire \vec{u} et \vec{v} :*

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (\alpha, \alpha, 0, 0, 0) \\ \vec{v} &= (\beta, 0, \beta, 0, 0) \end{aligned}$$

avec α et β deux réels non nuls. Il est évident que si \vec{u} et \vec{v} sont $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonaux c'est à dire que $\mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{v}) = -\alpha\beta = 0$ alors soit $\alpha = 0$ soit $\beta = 0$. Nous aboutissons donc à une contradiction.

□

Propriété 2 *Soit un point m du parabolöide Π correspondant à un point M de \mathcal{E}_3 et un point σ de Λ^4 correspondant à une sphère S de \mathcal{E}_3 , alors nous avons la proposition suivante :*

$$M \in S \Leftrightarrow \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 m}, \overrightarrow{O_5 \sigma}) = 0$$

Nature dans \mathcal{E}_3		Coordonnées $(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$ dans $L_{4,1}$	Condition
Sphère orientée	Centre : $(a; b; c)$	Point de $\Lambda^4 \subset L_{4,1}$	$r \neq 0$
	Rayon : r	$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2r} (a^2 + b^2 + c^2 - r^2 + 1) \\ \frac{a}{r} \\ \frac{b}{r} \\ \frac{c}{r} \\ \frac{1}{2r} (a^2 + b^2 + c^2 - r^2 - 1) \end{pmatrix} \quad (4.7)$	
Plan affine	$a x + b y + c z = d$	$(d; a; b; c; d)$	$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

TABLE 4.3 – Correspondance entre les sphères orientées de \mathcal{E}_3 et les points de Λ^4 . L'orientation d'une sphère est donnée par le signe de son rayon r et l'orientation d'un plan par le sens de son vecteur normal

Démonstration 3 *En utilisant la formule 4.3, nous avons :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 m}, \overrightarrow{O_5 \sigma}) &= k \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 m}, \overrightarrow{O_5 m})}_{\text{nul car } \overrightarrow{O_5 m} \text{ est de type lumière}} + \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 m}, \vec{n})}_{\text{nul car } \vec{n} \text{ est normal à } \overrightarrow{O_5 m}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

4.3 Représentation des faisceaux linéaires de sphères

Il est important, maintenant que nous connaissons la représentation des sphères dans la quadrique Λ^4 , de connaître aussi la manière dont les points sont organisés sur Λ^4 . Ainsi, nous pouvons regarder comment sont représentés les faisceaux linéaires de sphères : dans [LW08], les auteurs ont rappelé que tout faisceau linéaire de sphères de \mathcal{E}_3 est représenté dans $L_{4,1}$ par la section de la quadrique Λ^4 par un 2-plan P^1 contenant l'origine. Selon le type du plan P , table 4.1, nous obtenons différents types de faisceaux de sphères :

- La section de la quadrique Λ^4 par un plan P de type espace est une ellipse et correspond à un faisceau de sphères à base cercle, i.e. toutes les sphères du faisceau ont un cercle en

1. Dans la suite, les termes plan et 2-plan seront tous deux utilisés pour désigner un plan de dimension 2.

commun, figure 4.3. Ainsi, un cercle \mathcal{C} de \mathcal{E}_3 peut être représenté dans Λ^4 par l'ensemble des sphères portant ce cercle et donc par l'ellipse Γ correspondante (contenue dans un plan de type espace passant par O_5). Deux sphères orientées S et T de rayons distincts du faisceau de sphères suffisent pour déterminer \mathcal{C} dans \mathcal{E}_3 puisque $S \cap T = \mathcal{C}$. Il en est de même dans $\mathcal{L}_{4,1}$, les points σ correspondant à S et τ correspondant à T suffisent à déterminer $P = \text{Aff}(O_5, \sigma, \tau)$. Une manière commode de choisir S et T parmi l'ensemble des sphères du faisceau est de les prendre orthogonales ainsi $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma}, \overrightarrow{O_5\tau}) = 0$ et dans ce cas, le vecteur $\overrightarrow{O_5\tau}$ est colinéaire au vecteur tangent à l'ellipse Γ au point σ . Nous pouvons donc associer au cercle \mathcal{C} n'importe quel couple $(\sigma, \overrightarrow{v}_\sigma)$ tel que σ soit un point de Γ et $\overrightarrow{v}_\sigma$ un vecteur tangent à Γ en σ . Nous noterons \dot{S} une sphère orthogonale à la sphère S et $\dot{\sigma}$ le point correspondant dans Λ^4 lorsque σ correspondra à la sphère S .

- La section de la quadrique Λ^4 par un plan P de type temps est une hyperbole et correspond à un faisceau de sphères à points limites, i.e. il y a deux familles de sphères dont les boules qu'elles délimitent sont contenues les unes dans les autres et celles-ci tendent vers deux points limites, figure 4.4. Les deux directions lumière du plan P sont les asymptotes de l'hyperbole et correspondent aux points limites du faisceau.
- La section de la quadrique Λ^4 par un plan P de type lumière est l'union de deux droites et correspond à un faisceau de sphères tangentes en un point, figure 4.5.

Cette dernière assertion est simple à démontrer en utilisant la propriété 2. Soit une droite lumière sur Λ^4 définie par le point σ_1 et le vecteur lumière \vec{l} vérifiant $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_1}, \vec{l}) = 0$, i.e. le point M de \mathcal{E}_3 correspondant à \vec{l} appartient à la sphère S_1 de \mathcal{E}_3 définie par σ_1 . Soit σ_2 sur la même droite lumière de Λ^4 , différent de σ_1 . Il existe un réel non nul λ tel que

$$\overrightarrow{O_5\sigma_2} = \overrightarrow{O_5\sigma_1} + \lambda \vec{l}$$

d'où :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_2}, \vec{l}) = \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_1}, \vec{l})}_{\text{nul par hypothèse}} + \lambda \underbrace{\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{l})}_{\text{nul car } \vec{l} \text{ est de type lumière}} = 0$$

Ceci montre que le point correspondant à \vec{l} appartient aussi à la sphère S_2 correspondant au point σ_2 . Il reste à montrer que S_2 ne contient aucun autre point de S_1 . Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un autre point, commun à S_1 et S_2 , correspondant à un vecteur lumière \vec{l}^* non colinéaire à \vec{l} . Alors :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_1}, \vec{l}^*) = 0$$

et :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_2}, \vec{l}^*) = 0$$

d'où :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_1\sigma_2}, \vec{l}^*) = \lambda \mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}, \vec{l}^*) = 0$$

Or, deux vecteurs lumière (non nuls) orthogonaux ne peuvent être que colinéaires, propriété 1, d'où la contradiction. Il n'y a donc qu'un seul point commun aux sphères S_1 et S_2 , ceci quelque soit le point σ_2 différent de σ_1 de la droite lumière. Nous pouvons donc conclure qu'une droite lumière de Λ^4 correspond à un faisceau de sphères tangentes en un point dans \mathcal{E}_3 .

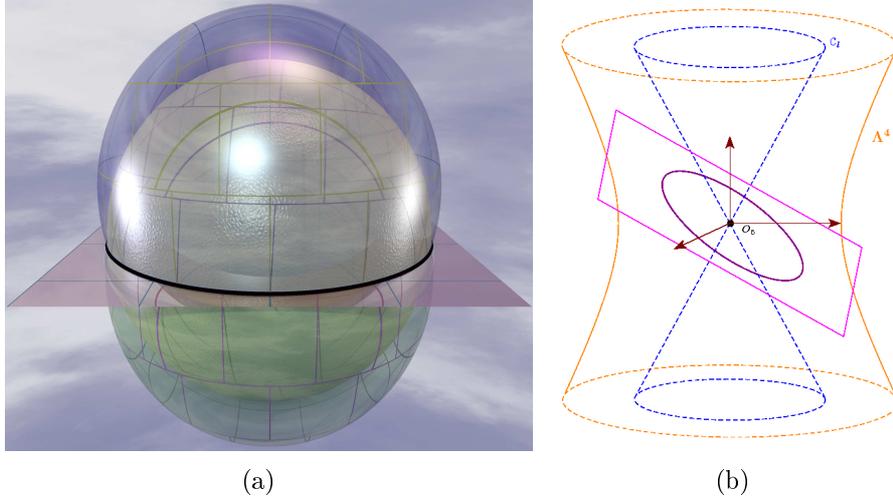


FIGURE 4.3 – Faisceau de sphères à base cercle. (a) Dans \mathcal{E}_3 . (b) Représentation dans l'espace des sphères.

En fait, la valeur de la forme de Lorentz $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 m}, \overrightarrow{O_5 \sigma})$, où m appartenant au paraboloid Π correspond à un point M de \mathcal{E}_3 et σ correspond à une sphère S de centre Ω et de rayon r de \mathcal{E}_3 , est directement liée à la puissance² $\mathcal{P}(M, S)$ du point M à la sphère S :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 m}, \overrightarrow{O_5 \sigma}) = -\frac{\mathcal{P}(M, S)}{2r}$$

De la même manière, la valeur de la forme de Lorentz $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 \sigma_1}, \overrightarrow{O_5 \sigma_2})$ où σ_1 et σ_2 correspondent à deux sphères S_1 et S_2 de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et de rayons respectifs r_1 et r_2 est directement liée à la puissance conjointe $\mathcal{P}(S_1, S_2)$ des deux sphères³ :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 \sigma_1}, \overrightarrow{O_5 \sigma_2}) = -\frac{\mathcal{P}(S_1, S_2)}{2r_1 r_2}$$

Remarquons que lorsque les deux sphères sont sécantes le long d'un cercle, il s'agit du cosinus de l'angle (non-orienté) entre les plans tangents aux sphères aux points du cercle. Ainsi, lorsque deux sphères S_1 et S_2 sont orthogonales, leur puissance conjointe est nulle et les vecteurs $\overrightarrow{O_5 \sigma_1}$ et $\overrightarrow{O_5 \sigma_2}$ sont orthogonaux. Lorsque les deux sphères sont deux plans P_1 et P_2 alors la valeur de la forme de Lorentz $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 \rho_1}, \overrightarrow{O_5 \rho_2})$ où ρ_1 et ρ_2 sont les points correspondants à P_1 et P_2 est égale au cosinus de l'angle entre les deux vecteurs normaux aux plans. Enfin, la valeur de la forme de Lorentz $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 m}, \overrightarrow{O_5 \rho})$ où m correspond à un point M et ρ correspond à un plan P , est liée à la distance euclidienne de ce point au plan :

$$\left| \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 m}, \overrightarrow{O_5 \rho}) \right| = d(M, P)$$

Ainsi, nous pouvons connaître les positions relatives entre deux sphères et/ou plans de \mathcal{E}_3 selon la valeur de la forme de Lorentz des vecteurs associés dans $\overline{\mathcal{L}}_{4,1}$.

2. $\mathcal{P}(M, S) = \Omega M^2 - r^2$

3. $\mathcal{P}(S_1, S_2) = \Omega_1 \Omega_2^2 - r_1^2 - r_2^2$

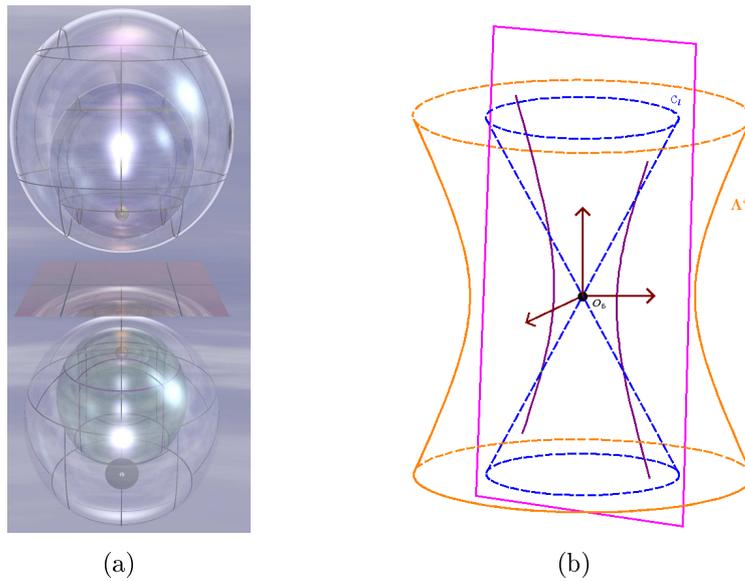


FIGURE 4.4 – Faisceau de sphères à points limites. (a) Dans \mathcal{E}_3 . (b) Représentation dans l'espace des sphères.

4.4 Position relative de deux sphères de \mathcal{E}_3 via leur représentation dans Λ^4

Considérons une sphère orientée S de \mathcal{E}_3 correspondant à un point σ de Λ^4 . Notons $\sigma^- = -\sigma$, le point symétrique de σ par rapport à l'origine O_5 , correspondant à l'autre orientation de la sphère S , i.e :

$$\overrightarrow{O_5\sigma^-} = -\overrightarrow{O_5\sigma}$$

L'intersection de l'hyperplan $T_\sigma\Lambda^4$ (resp. $T_{\sigma^-}\Lambda^4$) tangent à Λ^4 en σ (resp. σ^-) avec Λ^4 est un cône⁴ \mathcal{C}_σ (resp. \mathcal{C}_{σ^-}) de dimension 3, de centre σ (resp. σ^-), figure 4.6. Nous pouvons définir trois zones délimitées par \mathcal{C}_σ , tableau 4.4.

$\tau \in \Lambda^4$ est	Condition	Nature de $\vec{\sigma\tau}$
à l'intérieur de \mathcal{C}_σ	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{\sigma\tau}) < 0$	Temps
sur \mathcal{C}_σ	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{\sigma\tau}) = 0$	Lumière
à l'extérieur de \mathcal{C}_σ	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{\sigma\tau}) > 0$	Espace

TABLE 4.4 – Définition de l'intérieur et de l'extérieur du cône \mathcal{C}_σ , de sommet σ , de dimension 3, défini par : $\mathcal{C}_\sigma = \Lambda^4 \cap T_\sigma\Lambda^4$.

4. Encore une fois, il s'agit d'une sphère de rayon nul pour la forme de Lorentz que nous préférons voir de manière euclidienne comme un cône tout comme le cône de lumière \mathcal{C}_l défini précédemment.

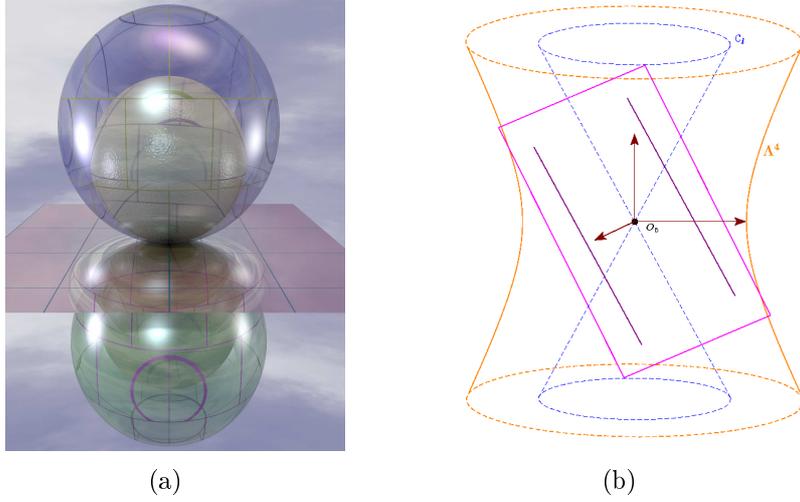


FIGURE 4.5 – Faisceau de sphères tangentes. (a) Dans \mathcal{E}_3 . (b) Représentation dans l'espace des sphères.

En comparant $\left| \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma}, \overrightarrow{O_5\tau} \right) \right|$ à 1, nous allons caractériser l'intérieur et l'extérieur des cônes \mathcal{C}_σ et \mathcal{C}_τ . Ainsi, nous pourrions connaître la position relative dans \mathcal{E}_3 entre les deux sphères définies par σ et τ :

Théorème 1 : *Positions relatives de deux sphères*

Soient S et T deux sphères orientées de \mathcal{E}_3 . Soient σ et τ leurs représentations dans Λ^4 .

Alors, nous avons les trois propositions suivantes :

- $S \cap T$ est un cercle ssi $\left| \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma}, \overrightarrow{O_5\tau} \right) \right| < 1$
- S et T sont tangentes ssi $\left| \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma}, \overrightarrow{O_5\tau} \right) \right| = 1$
- $S \cap T = \emptyset$ ssi $\left| \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma}, \overrightarrow{O_5\tau} \right) \right| > 1$

Démonstration 4 Soit le plan affine $P = \text{Aff}(O_5, \sigma, \tau)$ engendré par les points O_5, σ et τ et le vecteur \vec{u} de \vec{P} orthogonal à $\overrightarrow{O_5\tau}$. Tous les vecteurs de \vec{P} peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de \vec{u} et $\overrightarrow{O_5\tau}$. En particulier, nous avons :

$$\overrightarrow{O_5\sigma} = \alpha \overrightarrow{O_5\tau} + \beta \vec{u}$$

d'où :

$$1 = \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma} \right) = \alpha^2 \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau} \right) + \beta^2 \mathcal{Q}_{4,1} \left(\vec{u} \right) = \alpha^2 + \beta^2 \mathcal{Q}_{4,1} \left(\vec{u} \right) \quad (4.8)$$

puisque $\sigma \in \Lambda^4$, $\tau \in \Lambda^4$ et \vec{u} est $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonal à $\overrightarrow{O_5\tau}$. Comme $\overrightarrow{O_5\tau}$ est de type espace, le type du faisceau de sphères correspondant à $\Gamma = P \cap \Lambda^4$ dépend du signe de $\mathcal{Q}_{4,1} \left(\vec{u} \right)$. Posons :

$$\alpha = \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma}, \overrightarrow{O_5\tau} \right)$$

Nous avons :

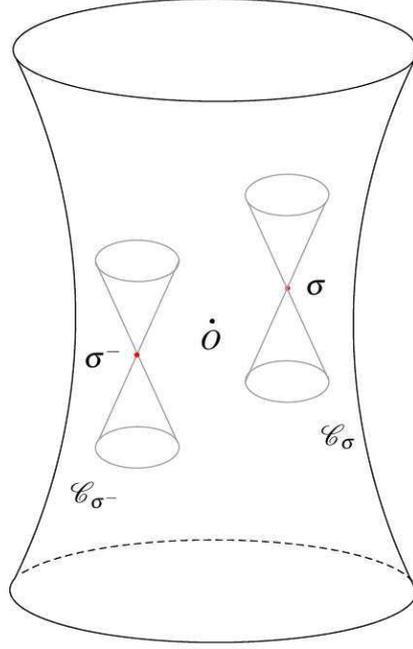


FIGURE 4.6 – Cônes \mathcal{C}_σ et \mathcal{C}_{σ^-} de sommets σ et σ^- : $\mathcal{C}_\sigma = \Lambda^4 \cap T_\sigma \Lambda^4$ et $\mathcal{C}_{\sigma^-} = \Lambda^4 \cap T_{\sigma^-} \Lambda^4$.

- Si \vec{u} est un vecteur de type espace, nous pouvons toujours supposer que $\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) = 1$. Dans ce cas, Γ correspond à un faisceau de sphères de base un cercle et $|\alpha| < 1$. Nous avons alors $\left| \mathcal{L}_{4,1}(\vec{O}_5\vec{\sigma}, \vec{O}_5\vec{\tau}) \right| < 1$, d'après la formule (4.8).
- Si \vec{u} est un vecteur de type temps, nous pouvons toujours supposer que $\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) = -1$. Dans ce cas, Γ correspond à un faisceau de sphères à points limites et $|\alpha| > 1$. Nous avons alors $\left| \mathcal{L}_{4,1}(\vec{O}_5\vec{\sigma}, \vec{O}_5\vec{\tau}) \right| > 1$, d'après la formule (4.8).
- Si \vec{u} est un vecteur de type lumière $\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) = 0$. Dans ce cas, Γ correspond à un faisceau de sphères tangentes en un point et $|\alpha| = 1$. Nous avons alors $\left| \mathcal{L}_{4,1}(\vec{O}_5\vec{\sigma}, \vec{O}_5\vec{\tau}) \right| = 1$, d'après la formule (4.8).

□

Notons que considérer $\left| \mathcal{L}_{4,1}(\vec{O}_5\vec{\sigma}, \vec{O}_5\vec{\tau}) \right|$ nous a permis de nous affranchir de l'orientation de la sphère S puisque nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\vec{O}_5\vec{\sigma}^-, \vec{O}_5\vec{\tau}) = -\mathcal{L}_{4,1}(\vec{O}_5\vec{\sigma}, \vec{O}_5\vec{\tau})$$

4.5 Représentation des surfaces canal

Une surface canal est l'enveloppe d'une famille à un paramètre de sphères orientées. Soit $S(t)$ ces sphères, paramétrées en t . Chaque sphère est tangente à la surface canal le long d'un cercle appelé *cercle caractéristique*. Dans Λ^4 , une famille à un paramètre de sphères est représentée par

une courbe $t \mapsto \Gamma(t)$. Lorsque cette courbe correspond à une surface canal, elle est différentiable et elle est dite de type espace, c'est-à-dire que les vecteurs tangents $\overrightarrow{\frac{d\Gamma}{dt}}(t)$ aux points $\Gamma(t)$ sont tous de type espace, [LS11]. Pour déterminer le cercle caractéristique de la sphère $S(t_0)$, il suffit de considérer la sphère correspondant à l'intersection entre Λ^4 et la demi-droite passant par O_5 de vecteur directeur $\overrightarrow{\frac{d\Gamma}{dt}}(t_0)$, notée $\dot{S}(t_0)$. Rappelons que les sphères $S(t_0)$ et $\dot{S}(t_0)$ sont orthogonales, paragraphe 4.3. Dans la suite, afin de ne pas alourdir le texte, un cercle caractéristique est associé directement au couple (point de Γ , vecteur tangent à Γ en ce point).

4.6 Représentation des cyclides de Dupin non dégénérées

Nous avons vu qu'une CD4 est l'enveloppe d'une famille à un paramètre de sphères orientées de deux manières différentes. Il lui correspond donc deux courbes dans l'espace des sphères Λ^4 . R. Langevin et P. Walczak [LW08] ont montré qu'une CD4 peut être représentée par deux coniques dans Λ^4 qui sont soit deux ellipses, soit une ellipse et une hyperbole, soit une ellipse et une parabole. Chaque conique, définie par l'une des deux familles de sphères dont la CD4 est l'enveloppe, correspond à l'intersection de la quadrique Λ^4 avec un 2-plan affine (pour la restriction de la forme de Lorentz à ces 2-plans, les ellipses et hyperboles sont des cercles tandis que les paraboles sont des droites). Nous avons déterminé le type de la conique Γ , section de Λ^4 par un 2-plan P , selon le type de P , table 4.5. Pour cela, nous avons calculé la forme de Lorentz d'un vecteur $\overrightarrow{O_5M}$, tel que M appartienne à $P \cap \Lambda^4$:

$$M \in P \Rightarrow \overrightarrow{O_5M} = \overrightarrow{O_5M_1} + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

où M_1 est un point donné de P , \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de \vec{P} orthogonaux entre eux.

En déterminant la section de Λ^4 par P , nous obtenons l'équation cartésienne d'une conique en fonction des coordonnées α et β de M dans le repère (M_1, \vec{u}, \vec{v}) :

$$M \in \Lambda^4 \Rightarrow \alpha^2 \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) + \beta^2 \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{v}) + 2\alpha \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5M_1}, \vec{u}) + 2\beta \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5M_1}, \vec{v}) + \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{O_5M_1}) - 1 = 0 \quad (4.9)$$

Les rôles de \vec{u} et \vec{v} étant symétriques, fixons \vec{u} comme étant un vecteur de type espace. Nous obtenons les trois types de coniques précitées selon que \vec{v} est de type espace, de type temps ou de type lumière.

type du plan P	type de la conique Γ
espace	ellipse
temps	hyperbole
lumière	parabole ou 2 droites parallèles (si $O_5 \in P$)

TABLE 4.5 – Type de la conique Γ selon le type de P .

A une cyclide de Dupin correspondent deux courbes de type espace, Γ_θ et Γ_ψ , contenues dans deux plans P_θ et P_ψ , telles que, pour toute paire de points σ_1 de Γ_θ et σ_2 de Γ_ψ , la droite

$(\sigma_1\sigma_2)$ est de type lumière sur Λ^4 . En effet, chaque sphère S_1 d'une famille est tangente à chaque sphère S_2 de l'autre famille en un point M de la cyclide de Dupin. Le rayon lumineux $(\sigma_1\sigma_2)$ correspond aux sphères du faisceau de sphères tangentes en M engendré par S_1 et S_2 (nous supposons que les orientations de toutes les sphères considérées coïncident au point M pour n'obtenir qu'une droite de type lumière).

Prenons la cyclide de Dupin, centrée à l'origine, de paramètres a , c et μ et la famille de sphères orientées $S_1(\theta)$ centrées sur l'ellipse (équation (2.4)) de rayon (algébrique)⁵ $r_1(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, formule (2.14). Les points $\sigma_1(\theta)$ de la conique Γ_θ correspondant dans Λ^4 sont de la forme :

$$\sigma_1(\theta) \begin{pmatrix} \frac{b^2 - \mu^2 + 2c\mu \cos(\theta) + 1}{2r_1(\theta)} \\ \frac{a \cos(\theta)}{r_1(\theta)} \\ \frac{b \sin(\theta)}{r_1(\theta)} \\ 0 \\ \frac{b^2 - \mu^2 + 2c\mu \cos(\theta) - 1}{2r_1(\theta)} \end{pmatrix}$$

Considérons trois points, par exemple $A = \sigma_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $B = \sigma_1\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ et $C = \sigma_1(\pi)$ et déterminons P_θ grâce à ces trois points. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} \in \vec{P}$ tel que $\mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Le plan P_θ est le plan $Aff(A, \vec{u}, \vec{v})$. Après quelques calculs, nous obtenons :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) = \frac{2b^2}{(\mu + c)\mu} \quad (4.10)$$

et :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{v}) = \frac{2b^2(\mu - c)}{c^2\mu} \quad (4.11)$$

\vec{u} est de type espace tandis que le type de \vec{v} dépend des valeurs respectives de μ et c . Γ_θ sera donc une ellipse lorsque la CD4 sera une CD4A, CD4I ou CD4In, une hyperbole lorsque la CD4 sera une CD4E et une parabole lorsque la CD4 sera une CD4En (table 4.6).

Les points $\sigma_2(\psi)$ de la conique Γ_ψ correspondant à la seconde famille de sphères orientées $S_2(\psi)$ centrées sur l'hyperbole (équation (2.9)) de rayon (algébrique)⁶ $r_2(\psi)$, formule (2.15), sont, quant à eux, de la forme :

5. Il suffit d'ôter les valeurs absolues de la formule (2.14) puisque nous considérons ici des sphères orientées, ce qui n'était pas le cas dans le chapitre 2

6. Il suffit d'ôter les valeurs absolues de la formule (2.15)

$$\sigma_2(\psi) \begin{pmatrix} \frac{1}{2r_2(\psi)} \left(-b^2 - \mu^2 + \frac{2a\mu}{\cos(\psi)} + 1 \right) \\ \frac{c}{r_2(\psi) \cos(\psi)} \\ 0 \\ \frac{-b \sin(\psi)}{r_2(\psi) \cos(\psi)} \\ \frac{1}{2r_2(\psi)} \left(-b^2 - \mu^2 + \frac{2a\mu}{\cos(\psi)} - 1 \right) \end{pmatrix}$$

pour $\psi \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Pour $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$, les sphères correspondantes sont les plans $P_2(\psi)$ (équation (2.10)) et, dans ce cas, nous avons :

$$\sigma_2(\psi) \left(-\mu; -\frac{c}{a}; 0; \pm \frac{b}{a}; -\mu \right)$$

Comme précédemment, nous pouvons déterminer le plan $P_\psi = \text{Aff}(\sigma_2(\frac{\pi}{2}), \vec{s}, \vec{t})$ contenant Γ_ψ où les vecteurs \vec{s} et \vec{t} sont deux vecteurs orthogonaux en partant de trois points particuliers de Γ_ψ : $\sigma_2(\frac{\pi}{2})$, $\sigma_2(\frac{-\pi}{2})$ et $\sigma_2(\pi)$. Nous obtenons alors \vec{s} et \vec{t} tels que :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{s}) = \frac{2b^2}{(\mu + a)a} \quad (4.12)$$

et :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{t}) = \frac{2b^2(a - \mu)}{\mu^2 a} \quad (4.13)$$

\vec{s} est de type espace tandis que le type de \vec{t} dépend des valeurs respectives de a et μ . Γ_ψ sera une ellipse lorsque la CD4 sera une CD4A, CD4E et CD4En, une hyperbole lorsque la CD4 sera une CD4I et une parabole lorsque la CD4 sera une CD4In (table 4.6).

Nous pouvons remarquer que l'ellipse correspond aux familles de sphères passant par deux points fixes imaginaires, que l'hyperbole correspond aux familles de sphères passant par deux points fixes réels et que la parabole correspond aux familles de sphères passant par un point fixe imaginaire et un point fixe réel. Ces points fixes réels sont des sphères réduites à un point et sont donc les points singuliers de la cyclide. Nous avons vu précédemment que tout point de \mathcal{E}_3 peut être associé à une direction lumière. Dans $L_{4,1}$, ces points singuliers correspondent aux directions lumière du plan contenant la conique correspondante à la famille de sphères considérées.

De plus, lorsque nous connaissons l'une des deux familles de sphères, nous savons déterminer l'enveloppe. Nous pouvons donc déterminer la seconde famille de sphères à partir de la première. Il en est de même dans Λ^4 , lorsqu'une des coniques représentant une CD4 est connue, il est possible de déterminer l'autre.

En effet, notons Γ_1 l'une des coniques représentant une CD4 dans Λ^4 et Γ_2 la seconde. Soit P_1 le plan affine contenant Γ_1 et P_2 le plan affine contenant Γ_2 alors les plans P_1 et P_2

sont orthogonaux et nous avons la relation suivante pour tout point M_1 de P_1 et M_2 de P_2 , paragraphe 5.2 de [LW08] :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 M_1}, \overrightarrow{O_5 M_2}) = 1 \quad (4.14)$$

En particulier, lorsque les coniques sont à centres, de centres M_1 et M_2 , la droite $(M_1 M_2)$ est aussi orthogonale aux plans P_1 et P_2 , figures 4.7 et 4.8. Lorsque l'une des coniques est une parabole, supposons qu'il s'agisse de Γ_1 , il existe une droite de type lumière orthogonale aux deux plans P_1 et P_2 coupant le plan de type espace P_2 au centre de la seconde conique Γ_2 et parallèle au plan de type lumière P_1 , figure 4.11 (n'oublions pas qu'une direction lumière est orthogonale à elle même). Ainsi, nous pouvons totalement déterminer un des plans à partir de l'autre (il en est de même pour les coniques).

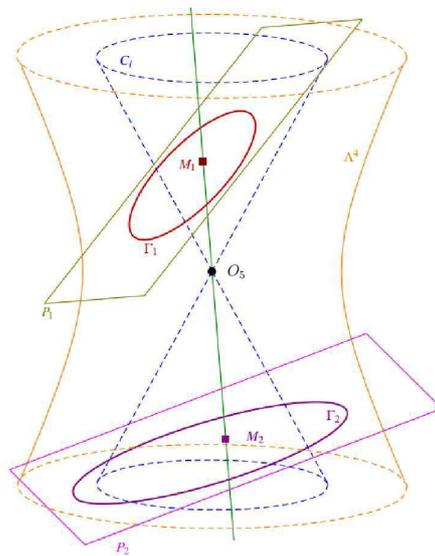


FIGURE 4.7 – Représentation d'une cyclide de Dupin en anneau dans l'espace des sphères par deux ellipses.

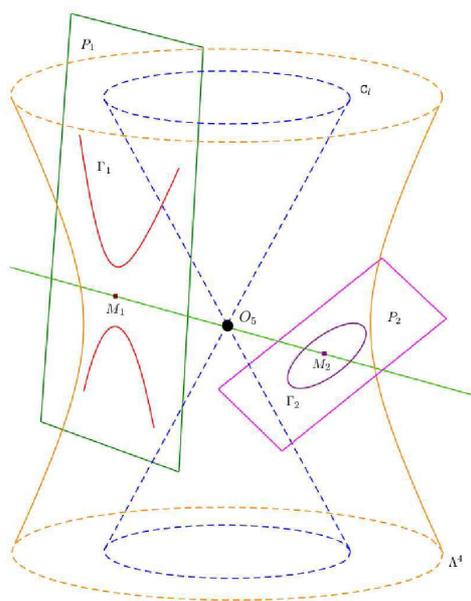


FIGURE 4.8 – Représentation d’une cyclide de Dupin à croissant dans l’espace des sphères par une ellipse et une hyperbole.

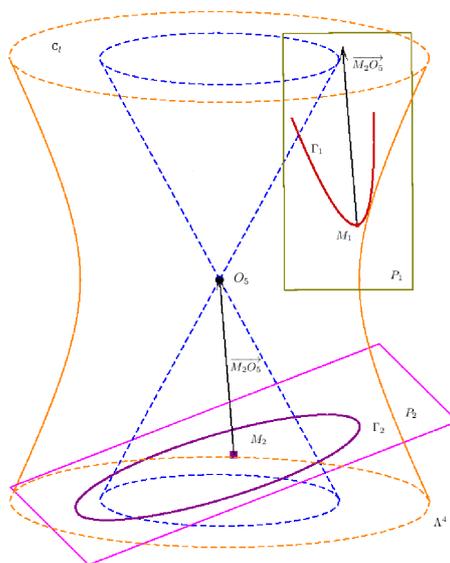


FIGURE 4.9 – Représentation d’une cyclide de Dupin à croissant nul dans l’espace des sphères par une ellipse et une parabole.

4.7 Représentation des cyclides de Dupin dégénérées

4.7.1 Le tore de révolution

Nous avons vu précédemment que le tore de révolution est une cyclide de Dupin dégénérée. Elle est l'enveloppe de deux familles à un paramètre de sphères centrées sur un cercle et une droite double. Les sphères centrées sur le cercle ont toutes le même rayon. Selon le nombre de points singuliers du tore de révolution, nous retrouvons la même représentation que les cyclides de Dupin non dégénérées. Ainsi, un tore de révolution à collier sera représenté dans Λ^4 par deux ellipses, chacune contenue dans un plan de type espace ; un tore de révolution à collier nul sera représenté par une ellipse contenue dans un plan de type espace et une parabole contenue dans un plan de type lumière ; un tore de révolution croisé sera représenté par une ellipse contenue dans un plan de type espace et une hyperbole contenue dans un plan de type temps. A chaque direction lumière des plans de type lumière ou temps correspond un point singulier du tore considéré et comme pour les cyclides non dégénérées, les deux plans contenant les coniques dans $L_{4,1}$ sont orthogonaux.

4.7.2 Le cylindre de révolution

Le cylindre de révolution, lui, peut être vu comme une cyclide de Dupin dégénérée avec un point singulier qui est rejeté à l'infini. Il est l'enveloppe de deux familles de sphères dont l'une est une famille de plans (les plans tangents au cylindre le long d'une génératrice) et l'autre une famille de sphères de même rayon centrées sur l'axe du cylindre. Ainsi, il est représenté dans l'espace des sphères par une ellipse contenue dans un plan de type espace et une parabole contenue dans un plan de type lumière. Ce dernier est parallèle à la direction lumière \vec{l} (chapitre 4) tandis que le plan contenant l'ellipse est contenu dans l'hyperplan d'équation $x_0 = x_4$ qui représente les plans orientés de \mathcal{E}_3 .

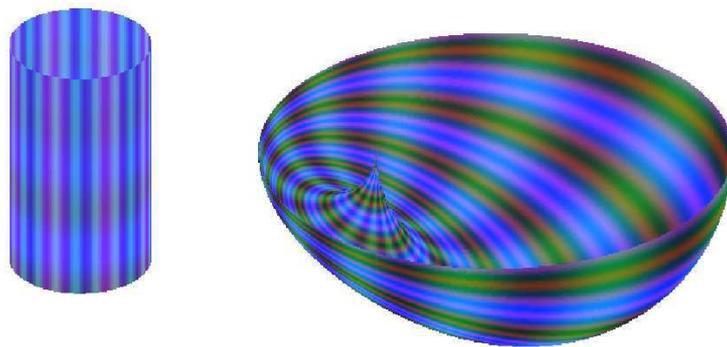


FIGURE 4.10 – Un cylindre de révolution est une cyclide de Dupin à croissant nul dégénérée dont le point singulier est rejeté à l'infini.

4.7.3 Le cône de révolution

Le cône de révolution, quant à lui, peut être vu comme une cyclide de Dupin dégénérée avec deux points singuliers dont l'un est le sommet du cône et l'autre est rejeté à l'infini. Il est l'enveloppe de deux familles à un paramètre de sphères. Toutes les sphères de l'une des deux familles sont des plans passant par le sommet du cône (chacun des plans est tangent au cône le long d'une des ses génératrices) et les sphères de l'autre famille sont des sphères centrées sur l'axe du cône. Ainsi, il est représenté dans l'espace des sphères par une ellipse contenue dans un plan de type espace et une hyperbole contenue dans un plan de type temps. Ce dernier est engendré par deux directions lumière non colinéaires, l'une correspondant au sommet du cône et l'autre est la direction lumière \vec{l} . Tout comme le cas du cylindre de révolution, le plan de type espace est contenu dans l'hyperplan d'équation $x_0 = x_4$ qui représente les plans orientés de \mathcal{E}_3 .

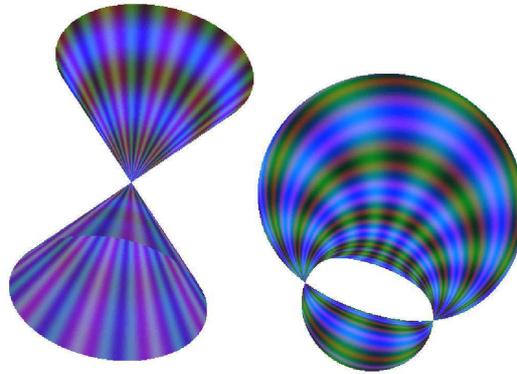


FIGURE 4.11 – Un cône de révolution est une cyclide de Dupin à croissant dégénérée dont l'un des points singuliers est le sommet du cône et l'autre est rejeté à l'infini.

4.8 Représentation des cercles caractéristiques

Nous avons vu que les cercles caractéristiques d'une cyclide peuvent être déterminés par la section d'une sphère et d'un plan particulier dans \mathcal{E}_3 , formules (2.7) et (2.10). Rappelons que dans Λ^4 , un cercle caractéristique d'une surface canal représentée par une courbe paramétrée $\Gamma : t \rightarrow \Gamma(t)$ peut être associé à un point $\Gamma(t_0)$ correspondant à une sphère $S(t_0)$ et à un vecteur tangent $\frac{d\Gamma}{dt}(t_0)$ à Γ en $\Gamma(t_0)$. Ce vecteur est lui-même associé à un autre point $\dot{\Gamma}(t_0)$ de Λ^4 tel que les sphères $S(t_0)$ et $\dot{S}(t_0)$, correspondant à $\dot{\Gamma}(t_0)$, se coupent orthogonalement en ce cercle. Une cyclide de Dupin étant une surface canal particulière, chaque cercle caractéristique d'une cyclide correspond à un couple point-vecteur dans Λ^4 , figure 4.12 et algorithme 5. Nous pouvons remarquer que lorsque le cercle caractéristique est un grand cercle sur la sphère $S(t_0)$ alors la sphère $\dot{S}(t_0)$ est un plan.

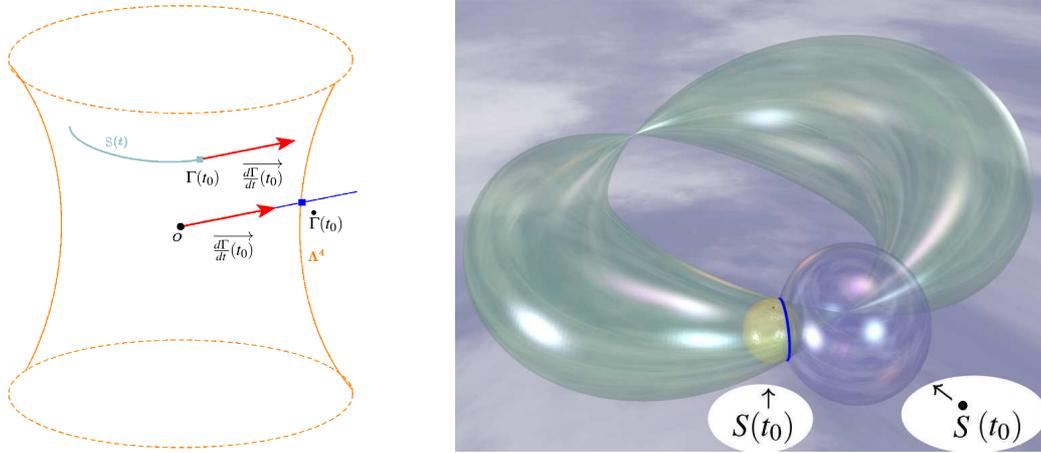


FIGURE 4.12 – Représentation d’un cercle caractéristique d’une cyclide de Dupin dans l’espace des sphères et dans \mathcal{E}_3 .

Algorithme 5 Détermination d’un cercle caractéristique d’une cyclide de Dupin, figures 4.12.

Entrée : une conique paramétrée $\Gamma(t)$ de Λ^4 (ou cercle Lorentz) et un point $\Gamma(t_0)$ de cette conique.

Condition : le rayon de la sphère dans \mathcal{E}_3 correspondant à $\Gamma(t_0)$ est non nul.

1. Détermination de $\overrightarrow{\frac{d\Gamma}{dt}(t_0)}$, vecteur tangent à Γ en $\Gamma(t_0)$.
2. Détermination de $\dot{\Gamma}(t_0)$, intersection de la demi-droite $\left[O_5; \overrightarrow{\frac{d\Gamma}{dt}(t_0)}\right)$ avec Λ^4 .
3. Détermination de la sphère $S(t_0)$ dans \mathcal{E}_3 correspondant à $\Gamma(t_0)$.
4. Détermination de la sphère $\dot{S}(t_0)$ dans \mathcal{E}_3 correspondant à $\dot{\Gamma}(t_0)$.
5. Détermination du cercle caractéristique $C = S(t_0) \cap \dot{S}(t_0)$ de \mathcal{E}_3 .

Sortie : un cercle caractéristique C d’une cyclide de Dupin

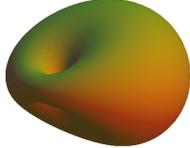
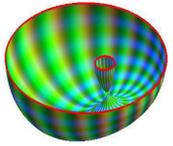
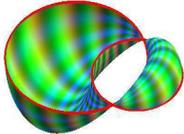
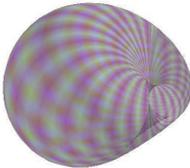
Dénomination, notation	Coniques des centres des familles de sphères génératrices	Points fixes	Coniques correspondantes dans Λ^4	Relation entre les paramètres	Points singuliers de la CD4	Illustrations
Cyclide en anneau (CD4A)	Ellipse	2 points imaginaires	Ellipse	$ \mu > c $	0	
	Hyperbole	2 points imaginaires	Ellipse	$ a > \mu $		
Cyclide à croissant interne (CD4I)	Ellipse	2 points imaginaires	Ellipse	$ \mu > c $	2	
	Hyperbole	2 points réels	Hyperbole	$ \mu > a $		
Cyclide à croissant externe (CD4E)	Ellipse	2 points réels	Hyperbole	$ c > \mu $	2	
	Hyperbole	2 points imaginaires	Ellipse	$ a > \mu $		
Cyclide à croissant interne nul (CD4In)	Ellipse	2 points imaginaires	Ellipse	$ \mu > c $	1	
	Hyperbole	1 point double réel	Parabole	$ a = \mu $		
Cyclide à croissant externe nul (CD4En)	Ellipse	1 point double réel	Parabole	$ \mu = c $	1	
	Hyperbole	2 points imaginaires	Ellipse	$ a > \mu $		

TABLE 4.6 – Classification des différents types de cyclides de Dupin quartiques.

Chapitre 5

Visualisation dans \mathcal{E}_3 d'une cyclide de Dupin à partir de sa représentation dans Λ^4

5.1 Un algorithme de calcul des paramètres d'une cyclide de Dupin et de son repère dans \mathcal{E}_3

Supposons connue l'une des deux coniques Γ_θ ou Γ_ψ représentant une cyclide de Dupin dans l'espace des sphères et notons-la Γ_1 . La seconde, notée Γ_2 , est complètement déterminée par la connaissance de Γ_1 . Les types des coniques déterminent le nombre de points singuliers mais ne permettent pas de déterminer le type de la CD4 : il est nécessaire de connaître la conique contenant les points correspondants aux plans $P_2(\psi_0)$ ¹, $\psi_0 \in \{\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, et identifier Γ_1 et Γ_2 avec Γ_θ et Γ_ψ . Ainsi, nous pouvons déterminer le type de la CD4 (table 4.6). Il suffit de déterminer les deux points de Γ_θ correspondants aux deux sphères, centrées sur l'ellipse génératrice, de rayons maximal et minimal pour obtenir les deux cercles principaux de la CD4 dans P_y (figures 2.13(a) et 2.13(b)). Dans le cas contraire, il suffit de déterminer les points correspondants à la sphère de rayon maximal sur chacune des branches de l'hyperbole Γ_θ (figure 2.13(c)). Enfin, il reste à calculer les paramètres de la CD4 selon son type et ses deux cercles principaux dans P_y (table 2.4). L'algorithme 6 résume la méthode.

Une autre méthode consiste à déterminer les sphères principales d'une famille dans Λ^4 après avoir identifié Γ_1 et Γ_2 avec Γ_θ et Γ_ψ . Comme elles sont les sphères ayant un grand cercle comme cercle caractéristique, il suffit de déterminer les points de Γ_θ ou Γ_ψ qui ont pour vecteur tangent un vecteur dont la première et la dernière composantes sont égales (ceux correspondant à des plans dans \mathcal{E}_3). Ainsi, si on travaille avec la courbe Γ_θ , on considère les cercles principaux dans P_y et si on travaille avec Γ_ψ , on considère les cercles caractéristiques dans P_z . L'algorithme 7 résume la méthode.

Enfin, pour obtenir le repère de la cyclide dans \mathcal{E}_3 , il faut travailler à la fois dans les deux plans de symétrie P_y et P_z et déterminer les cercles principaux dans chacun de ces plans. Nous avons vu précédemment que le centre de la cyclide est au milieu du segment joignant les centres

1. points de Λ^4 tels que $x_0 = x_4$

Algorithme 6 Détermination des paramètres d'une CD4 connue par l'une des deux coniques de Λ^4 correspondante à l'une des deux familles de sphères dont elle est l'enveloppe

Entrée : Une conique Γ_1 de Λ^4 décrivant la CD4

1. Détermination de Γ_2 , seconde conique décrivant la CD4, selon Γ_1
2. Identification de Γ_1 et Γ_2 avec Γ_θ et Γ_ψ :
 Soit \mathcal{H}_0 l'hyperplan d'équation $x_0 = x_4$
 - si $\Gamma_1 \cap \mathcal{H}_0 \neq \emptyset$, $\Gamma_\psi = \Gamma_1$ et $\Gamma_\theta = \Gamma_2$
 - sinon, $\Gamma_\psi = \Gamma_2$ et $\Gamma_\theta = \Gamma_1$
3. Détermination du type de la CD4 selon Γ_θ et Γ_ψ (table 4.6)
4. Détermination des cercles principaux dans P_y , selon le type de la CD4
5. Calcul des paramètres de la CD4 selon les cercles principaux dans P_y (table 2.4)

Sortie : Les paramètres a , c et μ de la CD4 représentée dans Λ^4 par Γ_1

Algorithme 7 Détermination des paramètres d'une CD4 connue par l'une des deux coniques de Λ^4 correspondante à l'une des deux familles de sphères dont elle est l'enveloppe

Entrée : Une conique Γ de Λ^4 décrivant la CD4

1. Identification de Γ avec Γ_θ ou Γ_ψ :
 Soit \mathcal{H}_0 l'hyperplan d'équation $x_0 = x_4$
 - si $\Gamma \cap \mathcal{H}_0 \neq \emptyset$, $\Gamma = \Gamma_\psi$
 - sinon, $\Gamma = \Gamma_\theta$
2. Détermination des points $\Gamma(t_0)$ et $\Gamma(t_1)$ tels que les points $\dot{\Gamma}(t_0)$ et $\dot{\Gamma}(t_1)$ correspondent à des plans
3. Calcul des sphères $S(t_0)$ et $S(t_1)$ de centres O_{t_0} et O_{t_1} et de rayons r_{t_0} et r_{t_1} correspondant aux points $\Gamma(t_0)$ et $\Gamma(t_1)$
4. Si $\Gamma = \Gamma_\psi$, on se place dans P_z , sinon on se place dans P_y
5. Selon le plan de symétrie P_y ou P_z , calcul des paramètres de la cyclide de cercles principaux $C(O_{t_0}, r_{t_0})$ et $C(O_{t_1}, r_{t_1})$ (table 2.4)

Sortie : Les paramètres a , c et μ de la CD4 représentée dans Λ^4 par Γ

de ces cercles principaux (dans chacun des plans de symétrie). Deux des vecteurs formant le repère dans lequel la cyclide est définie par l'une des équations (2.12),(2.13) ou (2.16) sont donnés par les vecteurs directeurs des droites joignant les centres des cercles principaux dans chaque plan de symétrie. Le troisième vecteur est le produit vectoriel de ces derniers.

5.2 Construction itérative de carreaux de cyclides de Dupin

Nous savons que les cyclides de Dupin sont représentées dans l'espace des sphères par deux coniques, correspondantes chacune à l'une des familles dont la cyclide est l'enveloppe et que la donnée d'un point et du vecteur tangent à la conique en ce point détermine un cercle

caractéristique dans \mathcal{E}_3 . Nous pouvons donc dessiner itérativement des cercles caractéristiques si nous savons construire itérativement les points et vecteurs tangents de ces coniques dans l'espace des sphères. Ajoutons à cela que nous savons que ces coniques sont des cercles pour la forme de Lorentz. Ainsi, nous allons adapter la construction itérative de cercle de \mathcal{E}_3 , paragraphe 5.2.1, aux coniques de Λ^4 et nous pourrons dessiner itérativement les cercles caractéristiques d'une cyclide. Le seul problème à traiter est le passage par le point à l'infini lorsque nous devons modéliser une partie de l'hyperbole dont chacune des extrémités est sur une branche différente de l'hyperbole. En utilisant le formalisme des points massiques, [FJ89], annexe A, nous considérons à la fois les points et les vecteurs dans le même espace et ainsi, nous pouvons considérer le points à l'infini comme le vecteur directeur de l'asymptote de l'hyperbole par lequel passe notre arc d'hyperbole. Cette construction permet de visualiser directement la jointure à partir de l'espace des sphères sans avoir à déterminer ni les paramètres de la cyclide ni son repère. Ainsi, lorsqu'il existe plusieurs solutions de jointure par des cyclides de Dupin, nous pouvons d'abord visualiser le résultat et voir si nous obtenons bien la jointure désirée (point(s) singulier(s) ou non par exemple) avant de lancer les calculs de paramètres et repère. Nous allons d'abord rappeler la construction itérative d'un cercle dans un plan de \mathcal{E}_3 , puis nous allons donner les algorithmes permettant de construire itérativement les arcs de coniques dans Λ^4 ce qui permet, grâce à l'algorithme 5, de dessiner itérativement des cercles caractéristiques d'une cyclide. Nous illustrons ce travail par des exemples à la fin de ce chapitre.

Nous considérons les polynômes de Bernstein B_0 , B_1 et B_2 de degré 2, définis sur $[0; 1]$ par :

$$\begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^2 \\ B_1(t) &= 2t(1-t) \\ B_2(t) &= t^2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

et notons $\text{bar} \{(A_i, \omega_i)_{i \in I}\}$ le barycentre d'une famille de points pondérés $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$ avec $\sum_{i \in I} \omega_i \neq 0$. Ce point est l'unique point G vérifiant :

$$\sum_{i \in I} \omega_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \tag{5.2}$$

5.2.1 Modélisation d'arcs de cercles

Dans cette section, nous restons dans le plan affine euclidien usuel \mathcal{P} et nous pouvons donc utiliser les notations usuelles de la géométrie affine euclidienne classique.

Les courbes de Bézier rationnelles quadratiques (de degré 2) permettent la modélisation d'arcs de conique [Far93, Gar07]. L'algorithme 8 permet, en s'inspirant de l'algorithme de De Casteljau appliqué à un arc de parabole, de construire de façon itérative un arc de cercle en utilisant les propriétés des courbes de Bézier, [Far93], dans un plan affine euclidien, figure 5.1. Les droites (P_0P_1) et (P_1P_2) sont tangentes à la courbe de Bézier aux points P_0 et P_2 respectivement. La construction est itérative puisque le triangle $P_0P_1P_2$, isocèle en P_1 est remplacé par deux nouveaux triangles $P_0N_1N_3$ et $N_3N_2P_2$ isocèles respectivement en N_1 et N_2 . Le procédé de construction est à nouveau appliqué à chaque triangle. C'est pourquoi l'algorithme utilise une procédure récursive. Notons qu'à chaque étape de l'algorithme 8, le point construit N_3 appartient à la médiatrice du segment $[P_0P_2]$ ce qui permet d'obtenir une construction régulière [Gar09], c'est-à-dire que le point N_3 est construit à égale distance des points P_0 et P_2 .

Algorithme 8 Construction itérative d'un arc de cercle dans un plan affine euclidien.

Entrée : Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} tels que $P_0P_1 = P_2P_1$ et un entier naturel n non nul définissant le nombre d'itérations.

1. Calcul du poids :

$$\omega = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \overrightarrow{P_0P_2}}{P_0P_1 \times P_0P_2} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \overrightarrow{P_0P_2}}{\sqrt{P_0P_1^2 \times P_0P_2^2}} \quad (5.3)$$

2. Procédure récursive

Procédure FractCercle(P_0, P_1, P_2, ω, n)

(a) Soit $N_1 = \text{bar} \{(P_0; 1); (P_1; \omega)\}$.

(b) Soit $N_2 = \text{bar} \{(P_2; 1); (P_1; \omega)\}$.

(c) Soit N_3 le milieu du segment $[N_1N_2]$.

(d) Actualisation du poids :

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \omega}{2}} \quad (5.4)$$

(e) Si $n > 0$, FractCercle($P_0, N_1, N_3, \omega, n - 1$).

(f) Si $n > 0$, FractCercle($N_3, N_2, P_2, \omega, n - 1$).

Sortie : Un polygone approchant l'arc de cercle d'extrémités P_0 et P_2 et ayant pour tangentes les droites (P_0P_1) et (P_2P_1) .

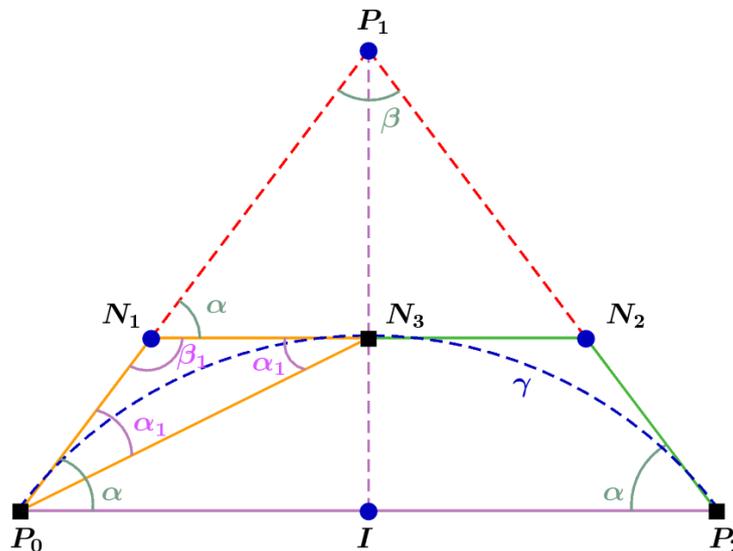


FIGURE 5.1 – Principe de la construction itérative d'un arc de cercle dans un plan affine euclidien, à partir de trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$. La formule (5.4) traduit le fait que $\alpha = 2\alpha_1$.

5.2.2 Construction itérative d'arcs d'ellipses et d'hyperboles

Nous souhaitons réaliser le même travail dans $L_{4,1}$ en construisant itérativement les points d'une conique et les vecteurs tangents associés, ce qui permettra dans \mathcal{E}_3 d'afficher les cercles caractéristiques d'une cyclide correspondant à la conique. La méthode de construction de cercles euclidiens peut être alors adaptée aux « cercles Lorentz ». Un problème se pose lorsque les points extrémaux sont sur deux branches distinctes de l'hyperbole. Pour résoudre ce problème, nous utilisons le formalisme des points massiques et réalisons deux schémas de subdivision ayant en commun un vecteur directeur d'une des deux asymptotes. A chaque étape, nous connaissons le point et la tangente à la conique en ce même point. Nous adaptons directement l'algorithme 8 en utilisant la forme de Lorentz. Nous obtenons les algorithmes 9 et 10 qui permettent la construction itérative de coniques représentant une cyclide de Dupin.

5.2.2.1 Cas d'un arc borné de conique

L'algorithme 9 permet de construire un arc borné de conique. C'est le cas lorsque l'arc de conique est un arc d'ellipse ou un arc d'hyperbole dont les extrémités sont sur la même branche.

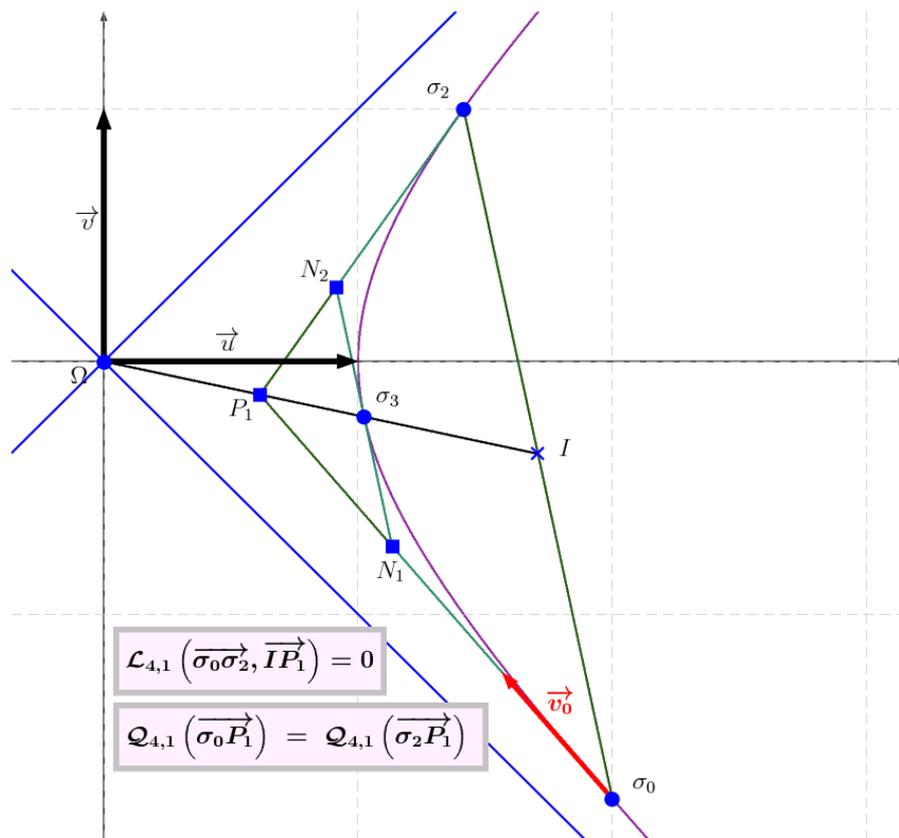


FIGURE 5.2 – Exemple de construction itérative d'un arc d'hyperbole dans un 2-plan de type temps de $L_{4,1}$, à partir de trois points pondérés $(\sigma_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(\sigma_2; 1)$, $\omega > 1$.

Notons que nous avons l'égalité :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_2 P_1})$$

ce qui traduit que le triangle $\sigma_0 P_1 \sigma_2$ est $\mathcal{L}_{4,1}$ -isocèle en P_1 , figure 5.2. Notons aussi que P_1 n'appartient pas à Λ^4 .

Algorithme 9 Construction itérative d'un arc de conique Γ dans un plan de $\mathcal{L}_{4,1}$.

Entrée : Soit σ_0 et σ_2 deux points distincts de Γ , \vec{v}_0 un vecteur tangent à Γ en σ_0 et n un entier naturel, non nul, définissant le nombre d'itérations.

Condition 1 : Soit Ω le centre de la conique Γ . Ω n'est pas le milieu de $[\sigma_0 \sigma_2]$.

Condition 2 : les points σ_0 et σ_2 sont sur la même composante connexe :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \times \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) > 0 \quad (5.5)$$

1. Détermination du point P_1 par :

$$\{P_1\} = \text{Aff} \{ \sigma_0; \vec{v}_0 \} \cap [\sigma_0 \sigma_2]^{\perp \mathcal{L}_{4,1}} \quad (5.6)$$

où $[\sigma_0 \sigma_2]^{\perp \mathcal{L}_{4,1}}$ est l'hyperplan $\mathcal{L}_{4,1}$ -médiateur du segment $[\sigma_0 \sigma_2]$

2. Calcul du poids ω :

$$\omega = \frac{|\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})|}{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \times \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}} \quad (5.7)$$

3. Procédure récursive

$\text{FractCercle}(\sigma_0, P_1, \sigma_2, \omega, n)$

(a) Soit $N_1 = \text{bar} \{(\sigma_0; 1); (P_1; \omega)\}$.

(b) Soit $N_2 = \text{bar} \{(\sigma_2; 1); (P_1; \omega)\}$.

(c) Soit σ_3 le milieu du segment $[N_1 N_2]$.

(d) Calcul du nouveau poids :

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \omega}{2}} \quad (5.8)$$

(e) Si $n > 0$, $\text{FractCercle}(\sigma_0, N_1, \sigma_3, \omega, n - 1)$.

(f) Si $n > 0$, $\text{FractCercle}(\sigma_3, N_2, \sigma_2, \omega, n - 1)$.

Sortie : Un polygone approchant l'arc de conique d'extrémités σ_0 et σ_2 et ayant pour tangentes les droites $(\sigma_0 P_1)$ et $(\sigma_2 P_1)$.

De plus, notons que si I désigne le milieu du segment $[\sigma_0\sigma_2]$, alors la droite (IP_1) est la $\mathcal{L}_{4,1}$ -médiatrice du triangle $\sigma_0P_1\sigma_2$ issue de P_1 car nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{IP_1}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) = 0$$

Enfin, lorsque Γ est une ellipse, nous pouvons prendre la valeur opposée de celle de la formule (5.7) dans l'algorithme 9 pour obtenir l'autre partie de l'ellipse. La construction est toujours régulière du fait que σ_3 est à une pseudo-distance égale de σ_0 et σ_2 .

Notons que si les points σ_0 et σ_2 ne sont pas sur la même composante connexe de l'hyperbole, alors le résultat de la formule (5.5) est négatif : l'algorithme 9 fonctionne toujours, mais les points construits appartiennent à un cercle dans le complexifié de l'espace affine [Lad02, Lad03]. Nous sommes alors obligés d'utiliser une autre méthode afin de pouvoir représenter les points obtenus.

Il est possible de supprimer la condition 2 de l'algorithme 9 et d'ajouter, après le premier calcul de ω , le test suivant : si ω n'appartient pas à \mathbb{R} , alors on utilise l'algorithme 10.

5.2.2.2 Cas de composantes non connexes

Dans ce paragraphe, nous traitons du cas où la conique est une hyperbole et où l'arc d'hyperbole à construire a deux composantes connexes, c'est-à-dire que chacune des extrémités de l'arc est sur une branche distincte de l'hyperbole. Nous nous plaçons dans l'espace des points massiques $\widetilde{\mathcal{L}}_{4,1}$ associé à $\mathcal{L}_{4,1}$ et à $\overrightarrow{\mathcal{L}}_{4,1}$ décrit dans l'annexe A. Nous utilisons deux fois l'algorithme 10, une fois sur chacune des branches de l'hyperbole. Sur une branche, nous utilisons la première extrémité de l'arc et un vecteur directeur de l'asymptote considérée alors que sur l'autre branche, nous utilisons la seconde extrémité de l'arc et un vecteur directeur de l'asymptote, de sens opposé au précédent.

Nous devons calculer le point P_1 appartenant à l'asymptote engendrée par $\overrightarrow{l_2}$ et à la tangente à Γ en σ_0 . Nous prenons $\overrightarrow{l_3}$ tel que $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}) = 1$ pour simplifier les calculs.

Remarquons que, lorsque nous cherchons à joindre deux points par un arc de conique dans Λ^4 , nous n'avons pas à déterminer préalablement le type du plan donc le type de la conique et ne savons pas si l'arc à modéliser contient une extrémité à l'infini. Nous utilisons d'abord l'algorithme 9 et regardons si la condition donnée par la formule (5.5) est satisfaite, dans le cas contraire, nous utilisons l'algorithme 10. Nous pouvons généraliser la construction itérative d'arcs d'ellipses et d'hyperboles dans \mathcal{E}_3 en utilisant la forme quadratique adéquate, [GDLre]. Notons que pour construire itérativement les points d'un arc borné de parabole, il suffit d'appliquer l'algorithme de De Casteljau qui n'utilise que des propriétés affines.

Algorithme 10 Construction itérative d'un arc d'hyperbole ayant une direction lumière comme extrémité.

Entrée : Deux points massiques $(\sigma_0; 1)$ et $(\vec{l}_2; 0)$ de l'hyperbole Γ , un vecteur \vec{v}_0 tangent à Γ en σ_0 et un entier naturel n , non nul, définissant le nombre d'itérations.

1. Initialisation

(a) Détermination du point P_1 par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_0}, \overrightarrow{P_0 P_1}) = 0 \\ \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \vec{l}_2) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

(b) Soit Ω le centre de la conique Γ et \vec{l}_3 tel que $\mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_2, \vec{l}_3) = 1$. Calcul de ω_1 par :

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega \sigma_0}, \vec{l}_3)}} \quad (5.10)$$

2. Procédure récursive

FractCercle2 $\left((\sigma_0; 1), (P_1; \omega_1), (\vec{l}_2; 0), n\right)$

(a) Soit $(N_1; 1 + \omega_1) = (\sigma_0; 1) \boxplus (P_1; \omega_1)$, où \boxplus est l'addition définie sur l'espace des points massiques, annexe A.

(b) Soit $(N_2; \omega_1) = (\vec{l}_2; 0) \boxplus (P_1; \omega_1)$.

(c) Soit $(\sigma_3; 1 + 2\omega_1) = (N_1; 1 + \omega) \boxplus (N_2; \omega_1)$.

(d) Calcul du poids :

$$\omega_0 = \frac{\left| \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3}) \right|}{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}) \times \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3})}} \quad (5.11)$$

(e) Si $n > 0$, FractCercle $(\sigma_0, N_1, \sigma_3, \omega_0, n - 1)$

(f) Calcul du poids :

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 + 2\omega_1}} \quad (5.12)$$

(g) Si $n > 0$, FractCercle2 $\left((\sigma_3; 1), (N_2; \omega_2), (\vec{l}_2; 0), n - 1\right)$

Sortie : Un polygone approchant l'arc d'hyperbole Γ d'extrémités σ_0 et \vec{l}_2 et ayant pour tangentes les droites $(\sigma_0 P_1)$ et $Aff(P_1; \vec{l}_2)$.

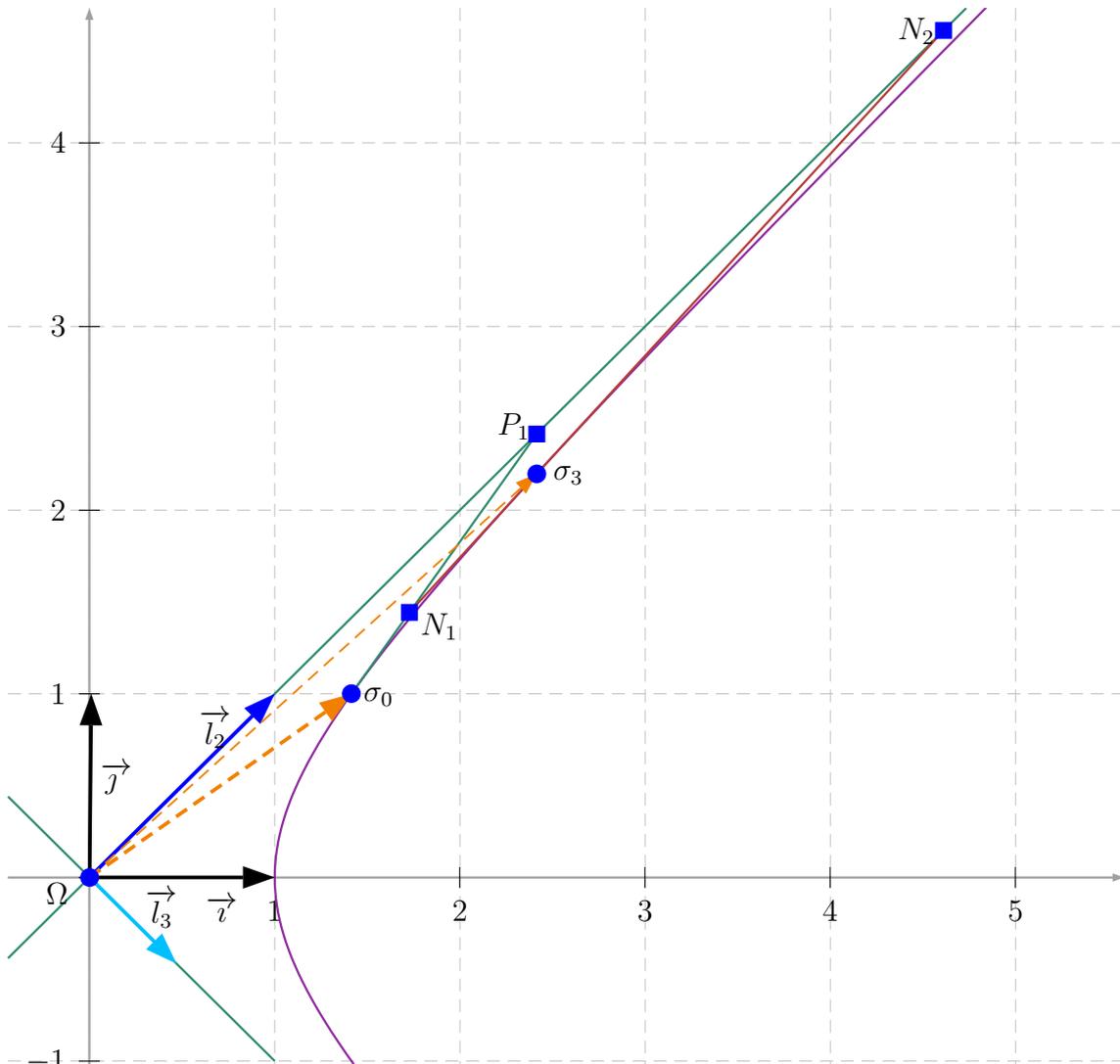


FIGURE 5.3 – Exemple de construction itérative d'un arc d'hyperbole dans un 2-plan de type temps de $\widetilde{\mathcal{L}}_{4,1}$, à partir de deux points massiques $(\sigma_0; 1)$ et $(\vec{l}_2; 0)$.

5.2.3 Exemples numériques

Nous illustrons ce travail par la jointure entre une cyclide de Dupin $Cycl_0$ et un plan \mathcal{P}_0 . Le plan \mathcal{P}_0 a pour équation $y = 1$ et la cyclide $Cycl_0$ a pour paramètres $a_0 = 6$, $c_0 = 2$, $\mu_0 = 4$, équation (2.16). Elle est centrée au point de coordonnées $(10; 10; 0)$ et est l'enveloppe des sphères $S_1(\theta)$, chapitre 2, section 2.4. Nous imposons le cercle de jointure C_0 , cercle caractéristique de $Cycl_0$ appartenant à la sphère $S_0 = S_1(\frac{5\pi}{6})$, de centre $\Omega_1(\frac{5\pi}{6})$ et de rayon $r_1(\frac{5\pi}{6})$.

Les points correspondants à S_0 et \mathcal{P}_0 dans Λ^4 sont respectivement les points :

$$\sigma_0(-13, 59; -0, 84; -2, 24; 0, 00; -13, 41)$$

et :

$$\rho_0(0; 0; 1; 0; 0)$$

Le vecteur \vec{v}_0 , tangent à la courbe représentant la cyclide $Cycl_0$ dans Λ^4 en σ_0 est :

$$\vec{u}(-17, 07; -0, 68; -1, 26; 0, 00; -17, 04)$$

En utilisant l'algorithme 9, nous calculons le point de contrôle intermédiaire de la courbe de Bézier :

$$P_1(30, 23; 0, 90; 1, 00; 0, 00; 30, 32)$$

ainsi que le poids correspondant :

$$\omega_1 \simeq 0, 50$$

Nous pouvons continuer le processus de construction et nous obtenons un premier point :

$$\sigma_A(5, 48; 0, 02; -0, 08; 0, 00; 5, 57)$$

sur l'arc de conique ainsi qu'un vecteur tangent :

$$\vec{u}_A(-5, 34; -0, 33; -1, 27; 0, 00; -5, 27)$$

en ce point, ce qui nous permet de dessiner un premier cercle de la jointure. En itérant une seconde fois, nous obtenons deux autres points :

$$\sigma_B(-1, 74; -0, 34; -1, 16; 0, 00; -1, 60)$$

et :

$$\sigma_C(6, 11; 0, 14; 0, 71; 0, 00; 6, 15)$$

ainsi que les vecteurs tangents associés :

$$\vec{u}_B(-12, 96; -0, 58; -1, 47; 0, 00; -12, 90)$$

et :

$$\vec{u}_C(3, 72; 0, 01; -0, 74; 0, 00; 3, 78)$$

Après les deux itérations, nous construisons les cercles de la figure 5.4(a). Et ainsi de suite, après trois itérations, nous construisons les cercles de la figure 5.4(b). Pour comparaison, le carreau de cyclide effectuant la jointure est illustré par la figure 5.5.

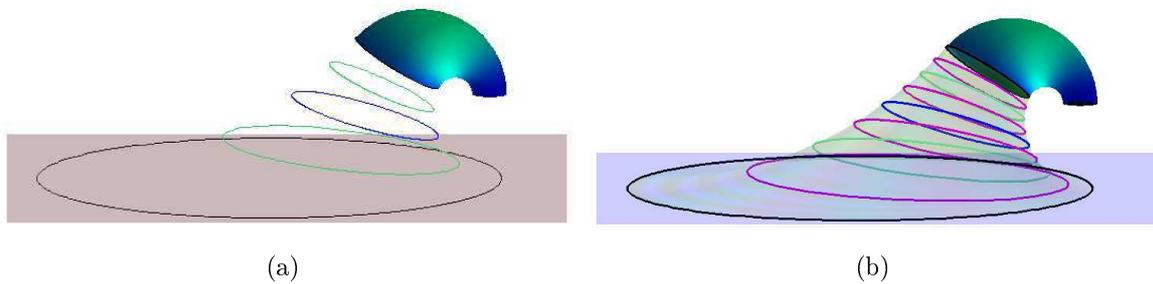


FIGURE 5.4 – Les cercles caractéristiques de la cyclide de jointure. (a) Après deux itérations. (b) Après trois itérations. Les cercles obtenus lors de la première itération sont en bleu, les cercles obtenus lors de la seconde itération sont en vert et les cercles obtenus après la troisième itération sont en violet.

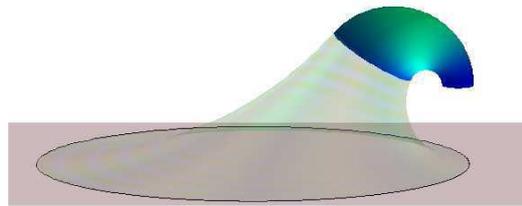


FIGURE 5.5 – Le carreau de cyclide de Dupin en anneau effectuant la jointure entre la cyclide $Cycl_0$ et le plan \mathcal{P}_0 .

Considérons le même exemple mais avec l'orientation inverse de la première sphère. Le point correspondant dans Λ^4 sera alors l'opposé du point σ_0 , noté σ_1 :

$$\sigma_1 (13, 59; 0, 84; 2, 24; 0, 00; 13, 41)$$

Le vecteur tangent à la courbe représentant la cyclide $Cycl_0$ dans Λ^4 en σ_1 est toujours \vec{v}_0 . L'arc de conique construit à partir de ce point ne sera donc pas le même que précédemment. En utilisant l'algorithme 9, nous calculons le point de contrôle intermédiaire de la courbe de Bézier :

$$P_1(-3, 16; 0, 17; 0, 99; 0, 00; -3, 30)$$

et vérifions si la condition donnée par la formule (5.5) est satisfaite. Ce n'est pas le cas ici puisque :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{\sigma}_0 P_1) \times \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{\sigma}_0 \rho_0) \simeq -2, 38$$

Nous sommes donc dans le cas où la conique est un arc d'hyperbole non connexe. Nous utilisons le formalisme des points massiques afin de pouvoir passer d'une branche de l'hyperbole à l'autre. Nous calculons alors le vecteur :

$$\vec{l}_2(1, 03; 0, 48; 0, 42; 0, 00; 0, 80)$$

et nous continuons en utilisant l'algorithme 10 deux fois en prenant comme extrémités les vecteurs \vec{l}_2 et $-\vec{l}_2$. De la même manière, nous construisons les cercles caractéristiques de la cyclide de jointure, figure 5.6(a) (resp.5.6(b)) après deux itérations (resp. trois itérations) de part et d'autre du point singulier de la cyclide. Pour comparaison, le carreau de cyclide effectuant la jointure est illustré par la figure 5.7.

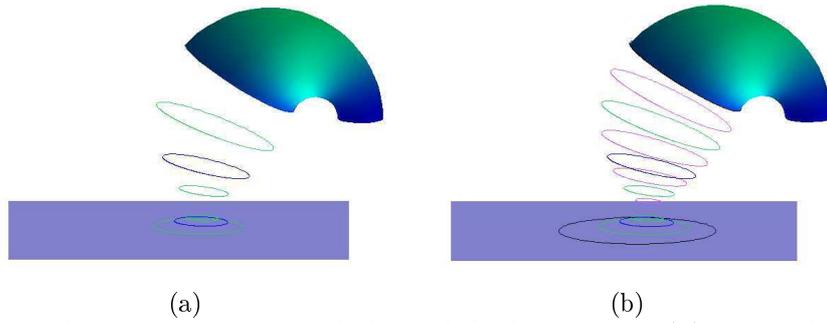


FIGURE 5.6 – Les cercles caractéristiques de la cyclide de jointure. (a) Après deux itérations. (b) Après trois itérations. Les cercles obtenus lors de la première itération sont en bleu, les cercles obtenus lors de la deuxième itération sont en vert et les cercles obtenus lors de la troisième itération sont en violet.

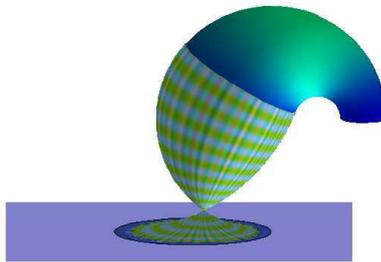


FIGURE 5.7 – Le carreau de cyclide effectuant la jointure entre la cyclide de Dupin $Cycl_0$ et le plan \mathcal{P}_0 .

En combinant les deux algorithmes 9 et 10 sur chacun des cercles définissant la cyclide de Dupin, nous pouvons obtenir un maillage de la cyclide de Dupin de jointure, figures 5.8 et 5.9. Pour l'une des deux familles, nous ne prenons que la partie adéquate du cercle entre les deux surfaces à joindre.

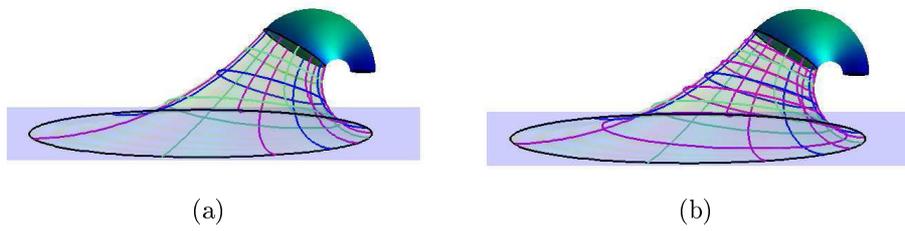


FIGURE 5.8 – Maillage du carreau de cyclide en anneau effectuant la jointure entre la cyclide de Dupin $Cycl_0$ et le plan \mathcal{P}_0 . (a) Après deux itérations. (b) Après trois itérations.

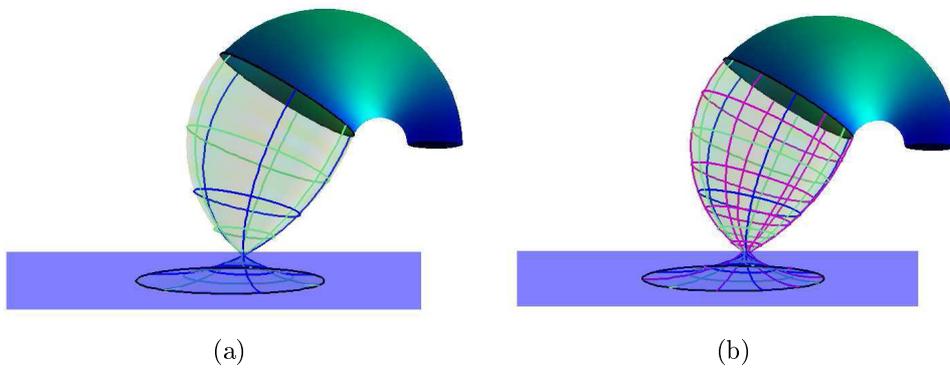


FIGURE 5.9 – Maillage du carreau de cyclide à croissant interne effectuant la jointure entre la cyclide de Dupin $Cycl_0$ et le plan \mathcal{P}_0 . (a) Après deux itérations. (b) Après trois itérations.

Chapitre 6

Jointures de surfaces par des cyclides de Dupin le long de cercles caractéristiques

6.1 Jointure d'une sphère le long d'un cercle avec une autre sphère par un morceau de cyclide de Dupin

Le problème le plus simple que l'on peut directement résoudre dans l'espace de Lorentz est de joindre deux sphères S_0 et S_1 par un morceau de cyclide de Dupin en imposant un cercle C_0 sur l'une des sphères, S_0 par exemple. En effet, cela revient à considérer, dans Λ^4 , deux points σ_0 et σ_1 correspondant aux sphères S_0 et S_1 et un vecteur \vec{v}_0 associé au cercle C_0 sur S_0 . Pour trouver la cyclide qui permet de joindre les deux sphères le long de C_0 , il suffit de déterminer le plan $Aff(\sigma_0, \sigma_1, \vec{v}_0)$ de $L_{4,1}$ ne contenant pas l'origine O_5 . La conique Γ , intersection entre $Aff(\sigma_0, \sigma_1, \vec{v}_0)$ et Λ^4 est une conique représentant la cyclide de Dupin effectuant la jointure. Remarquons que la section d'un plan de $L_{4,1}$ avec Λ^4 n'est pas toujours une courbe de type espace. Cependant, c'est le cas ici puisque le vecteur \vec{v}_0 , tangent à Γ en σ_0 est de type espace par définition, paragraphe 4.8.

6.2 Les cyclides de Dupin tangentes le long d'un cercle caractéristique

Maintenant, nous voulons joindre une surface canal avec une cyclide de Dupin le long d'un cercle caractéristique. Nous devons, pour cela, considérer la dernière sphère S de la surface canal et le cercle de jointure C_0 sur S . Dans l'espace des sphères, cela revient à considérer un point σ et un vecteur \vec{u} partant de ce point. Nous cherchons alors les cyclides correspondantes aux sections de Λ^4 par des 2-plans affines engendrés par σ et \vec{u} . Il existe une famille à 3 paramètres de tels plans et donc une famille à 3 paramètres de cyclides solutions.

Si nous imposons une autre sphère (orientée) T telle que la cyclide effectue la jointure entre cette dernière et la surface canal le long du cercle caractéristique alors nous n'avons plus qu'une solution déterminée par la section de Λ^4 par le plan $Aff(\sigma, \tau, \vec{u})$, où τ est le point correspondant à T dans Λ^4 .

Remarquons que dans ce cas, la cyclide peut tout à fait avoir un ou deux points singuliers, mais la jointure est tout de même de type G^1 .

Comme deux couples de points et vecteurs (σ, \vec{u}) et (τ, \vec{v}) ne sont pas forcément contenus dans un plan, il n'existe pas toujours une cyclide effectuant la jointure entre deux surfaces canal le long de deux cercles caractéristiques. Mais nous pouvons utiliser dans ce cas deux morceaux de cyclides. (Boehm [Boe90] a étudié un problème similaire directement dans \mathcal{E}_3).

6.3 Jointure entre une surface canal et une sphère (ou plan) le long d'un cercle caractéristique

Nous considérons que les deux sphères à joindre c'est-à-dire la sphère tangente à la surface canal le long du cercle caractéristique et la seconde sphère, appartiennent à une des familles de sphères dont la cyclide est l'enveloppe. Le problème revient alors à joindre deux sphères entre elles le long d'un cercle imposé sur l'une d'entre elle, paragraphe 6.1. Il faut seulement déterminer la sphère tangente à la surface canal au cercle de jointure au préalable. Nous pouvons remarquer que les algorithmes 3 et 4 donnés dans le paragraphe 3.2.2 sont alors considérablement simplifiés en se plaçant dans l'espace des sphères. Il est nécessaire de détailler quelques points à propos de la méthode de jointure développée ici mais qui n'apparaissent pas dans les exemples suivants. Dans \mathcal{E}_3 , la jointure finale est obtenue en ne conservant qu'une partie de la cyclide déterminée. Dans $L_{4,1}$, à partir des points correspondants aux sphères principales (sphères contenant les cercles principaux) déterminées précédemment, nous pouvons paramétrer la conique représentant la famille de sphères contenant celles à joindre. Cette paramétrisation est la paramétrisation naturelle donnée en section 2.4 pour décrire une cyclide de Dupin. Ainsi, il suffit de considérer la conique passant par les points correspondants aux sphères à joindre et de ne sélectionner que la partie utile à la jointure, c'est-à-dire la partie située entre deux points et imposée par le sens du vecteur tangent (représentant le cercle caractéristique de la cyclide de Dupin de jointure). Dans \mathcal{E}_3 , cela revient à restreindre l'un des deux paramètres θ ou ψ à un intervalle fermé contenu dans $[0, 2\pi]$. Ensuite, soit nous déterminons les paramètres de la cyclide de Dupin de jointure, la partie utile et les rotations et translations à effectuer pour placer la jointure dans le bon repère (ces transformations sont déterminées à partir du repère de la cyclide de Dupin, totalement définie par les sphères principales), soit nous utilisons l'algorithme de construction itérative donné dans le chapitre précédent.

6.3.1 Exemple de jointure entre un cylindre de révolution et un plan

Nous cherchons à joindre un plan P_0 avec un cylindre de révolution Cyl_0 le long d'un cercle de courbure C_0 appartenant à la sphère S_0 du cylindre (figure 6.1). P_0 a pour équation $z = \frac{1}{2}x - 3$. Le cylindre Cyl_0 a pour axe (Oz) et pour rayon $r_0 = 3$ et S_0 a pour centre $\Omega_0(0; 0; 5)$ et pour rayon r_0 . Les points correspondants à S_0 et P_0 dans Λ^4 sont respectivement les points σ et τ :

$$\sigma \left(\frac{17}{6}; 0; 0; \frac{5}{3}; \frac{5}{2} \right)$$

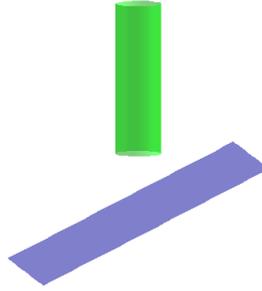


FIGURE 6.1 – Le cylindre de révolution et le plan à joindre.

$$\tau \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}; 0; \frac{-2\sqrt{5}}{5}; \frac{6\sqrt{5}}{5} \right)$$

Le vecteur \vec{u} est tangent à la courbe représentant les sphères intérieures au cylindre (sphères centrées sur l'axe du cylindre) dans Λ^4 en σ . Il est obtenu en dérivant l'équation de cette dernière au point σ :

$$\vec{u} (5; 0; 0; 1; 5)$$

Le plan P_1 est engendré par les vecteurs orthogonaux \vec{u} et \vec{v} avec \vec{v} :

$$\vec{v} (1, 76; 0, 18; 0, 00; -0, 68; 1, 90)$$

et $\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{v}) = 1$.

P_1 est de type espace, la conique sera donc une ellipse Γ_1 . En déterminant l'autre conique, nous obtenons une autre ellipse Γ_2 , contenu dans le plan P_2 engendré par les vecteurs orthogonaux \vec{s} et \vec{t} , de composantes approchées :

$$\vec{s} (0, 34; 0, 31; -0, 95; 0, 09; 0, 32)$$

$$\vec{t} (1, 06; 0, 97; 0, 30; 0, 30; 1, 00)$$

avec $\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{s}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{t}) = 1$.

La CD4 de jointure est une CD4A. Nous déterminons les paramètres de la CD4A en utilisant l'algorithme 6, figure 6.2 :

$$a \simeq 12, 69, c \simeq 5, 68 \text{ et } \mu \simeq 9, 69$$

Il n'y a pas de rotation à effectuer pour placer la cyclide dans la scène mais uniquement une translation de vecteur \vec{w} avec :

$$\vec{w} (-5, 677; 0; 5)$$

Nous obtenons la jointure illustrée en figure 6.3.

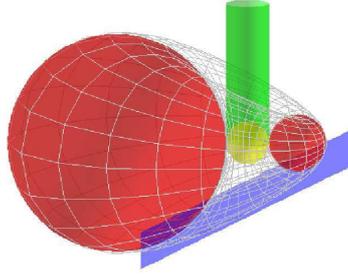


FIGURE 6.2 – Les deux sphères principales et la CD4A de jointure.

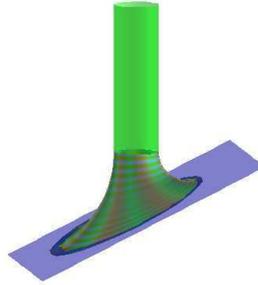


FIGURE 6.3 – La jointure réalisée entre le cylindre et le plan avec une partie de la CD4A précédente.

6.3.2 Exemple de jointure entre une cyclide de Dupin et un plan

Nous cherchons à joindre une cyclide de Dupin notée $Cycl_0$ de paramètres $a_0 = 6$, $c_0 = 2$, $\mu_0 = 4$, de centre de coordonnées $(10; 10; 0)$, enveloppe des sphères $S_1(\theta)$ de centres :

$$\Omega_1(\theta) (a_0 \cos(\theta) + 10; b_0 \sin(\theta) + 10; 0)$$

et de rayons :

$$r_1(\theta) = \mu_0 - c_0 \cos(\theta)$$

pour $\theta \in [0, 2\pi]$, et le plan P_0 d'équation $y = 1$. La jointure sera effectuée le long du cercle caractéristique C_0 de $Cycl_0$ appartenant à la sphère $S_0 = S_1\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, de centre $\Omega_0 = \Omega_1\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et de rayon $r_0 = r_1\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, figure 6.4.

Les points correspondant à S_0 et P_0 dans Λ^4 sont respectivement les points σ et τ :

$$\sigma (-13, 59; -0, 84; -2, 24; 0, 00; -13, 41)$$

$$\tau (0; 0; 1; 0; 0)$$

Le vecteur \vec{u} , tangent à la courbe représentant les sphères intérieures (centrées sur l'ellipse génératrice) de la cyclide $Cycl_0$ dans Λ^4 en σ est :

$$\vec{u} (-17, 07; -0, 68; -1, 26; 0, 00; -17, 04)$$

Le plan P_1 est engendré par les vecteurs orthogonaux \vec{u} et \vec{v} avec \vec{v} :

$$\vec{v} (-3, 58; -0, 00; 0, 74; 0, 00; -3, 66)$$

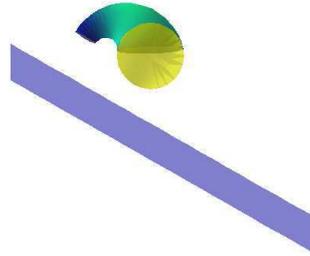


FIGURE 6.4 – La cyclide de Dupin et le plan à joindre.

et nous avons $\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{v}) = 1$.

P_1 est de type espace, la conique sera donc une ellipse Γ_1 . En déterminant l'autre conique, nous obtenons une autre ellipse Γ_2 , contenue dans le plan P_2 engendré par les vecteurs orthogonaux \vec{s} et \vec{t} :

$$\begin{aligned}\vec{s} & (-1, 98; -0, 98; 0, 00; 0, 42; -1, 94) \\ \vec{t} & (0, 92; 0, 46; 0, 00; 0, 91; 0, 91)\end{aligned}$$

et nous avons $\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{s}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{t}) = 1$.

La CD4 de jointure est une CD4A. De la même manière que dans les exemples précédents, nous déterminons les paramètres de la CD4A en utilisant l'algorithme 6, figure 6.5 :

$$a \simeq 33, 98, c \simeq 20, 72 \text{ et } \mu \simeq 28, 58$$

Notons que les rôles des plans de symétrie de la CD4 $Cycl_0$ et de la CD4 de jointure sont inversés. Nous obtenons la jointure illustrée en figure 6.6.

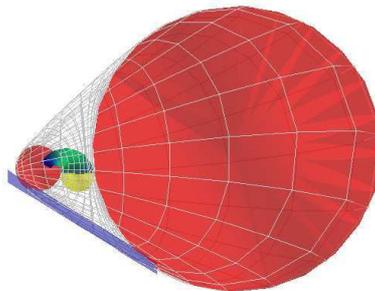


FIGURE 6.5 – Les deux sphères principales et la CD4A de jointure.

Nous pouvons remarquer que les orientations respectives des sphères jouent un rôle important dans le type de jointure car elles déterminent le type de la conique dans Λ^4 et donc le type de la CD4 de jointure. En effet, considérons une cyclide de Dupin représentée par une ellipse Γ_1 contenue dans un plan P_1 passant par exemple par trois points σ_A , σ_B et σ_C , représentant trois sphères orientées S_A , S_B et S_C de \mathcal{E}_3 . Soit S_B^- la sphère de même centre, de même rayon mais d'orientation inverse que S_B et σ_B^- le point correspondant dans Λ^4 . Nous savons que $\sigma_B^- \in (O\sigma_B)$ [LW08] (σ_B^- est le symétrique de σ_B par rapport à O_5). La CD4 joignant les trois sphères orientées S_A , S_B^- et S_C est représentée par la section de Λ^4 par le plan P_2 , engendré

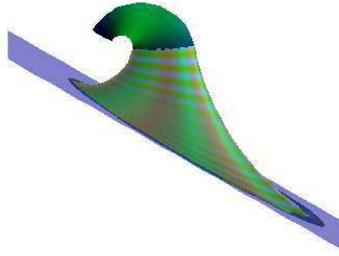


FIGURE 6.6 – La jointure réalisée entre la cyclide de Dupin $Cycl_0$ et le plan avec une partie de la CD4A précédente.

par σ_A , σ_B^- et σ_C . La conique obtenue peut être une parabole, une autre ellipse ou encore une hyperbole selon le type du plan P_2 mais ne représente plus du tout la même cyclide, figure 6.7.

Pour illustrer cette remarque, nous avons changé l'orientation des sphères S_0 dans les deux derniers exemples, nous obtenons une jointure par une CD4I au lieu d'une CD4A, figures 6.8 et 6.9.

6.4 Recollement de deux surfaces canal sur une même sphère le long de deux cercles

Joindre des surfaces canal entre elles ou avec des morceaux de cyclides de Dupin implique de joindre des morceaux de courbes de type espace dans l'espace des sphères. Si ces courbes se rejoignent de manière G^0 en un point alors la jointure dans \mathcal{E}_3 fait apparaître un morceau de sphère et peut avoir différentes allures, c'est-à-dire qu'elle peut avoir ou non des points singuliers. Nous pouvons donner une condition pour que la surface finale soit le résultat d'une jointure G^1 entre les deux surfaces canal et le morceau de sphère.

Soit deux surfaces canal $Surf_1$ et $Surf_2$ de \mathcal{E}_3 correspondant à deux courbes de type espace γ_1 et γ_2 de Λ^4 . Joindre de manière G^0 les deux courbes γ_1 et γ_2 dans Λ^4 en un point tel que les vecteurs tangents à chacune des courbes en ce point ne soient pas colinéaires introduit une partie de sphère S dans la jointure. Selon la manière dont les cercles caractéristiques des surfaces canal sont répartis sur la sphère de jointure nous pouvons obtenir différents résultats. Ils peuvent être sécants, figure 6.10, disjoints, figure 6.11 ou tangents, figure 6.12. Dans chacun des cas, la surface obtenue peut avoir des points singuliers. Lorsque les cercles sont sécants, nous ne pouvons pas joindre de manière G^1 les deux surfaces canal et le morceau de sphère.

Nous pouvons étudier ces différentes situations dans l'espace des sphères. Dans la section 4.4, nous avons expliqué comment la position de deux sphères dans \mathcal{E}_3 est lié à la position des points correspondants dans Λ^4 .

Regardons les cercles sur la sphère S . Soit σ le point de Λ^4 correspondant à S . Les cercles orientés sur une sphère forment une quadrique $\Lambda^3(\sigma)$ de dimension 3, incluse dans Λ^4 . La construction de cette dernière est identique à la construction de l'espace des sphères présenté en section 4.1, paragraphe 6 de [LO08]. Les cercles de S sont les intersections de S avec des sphères

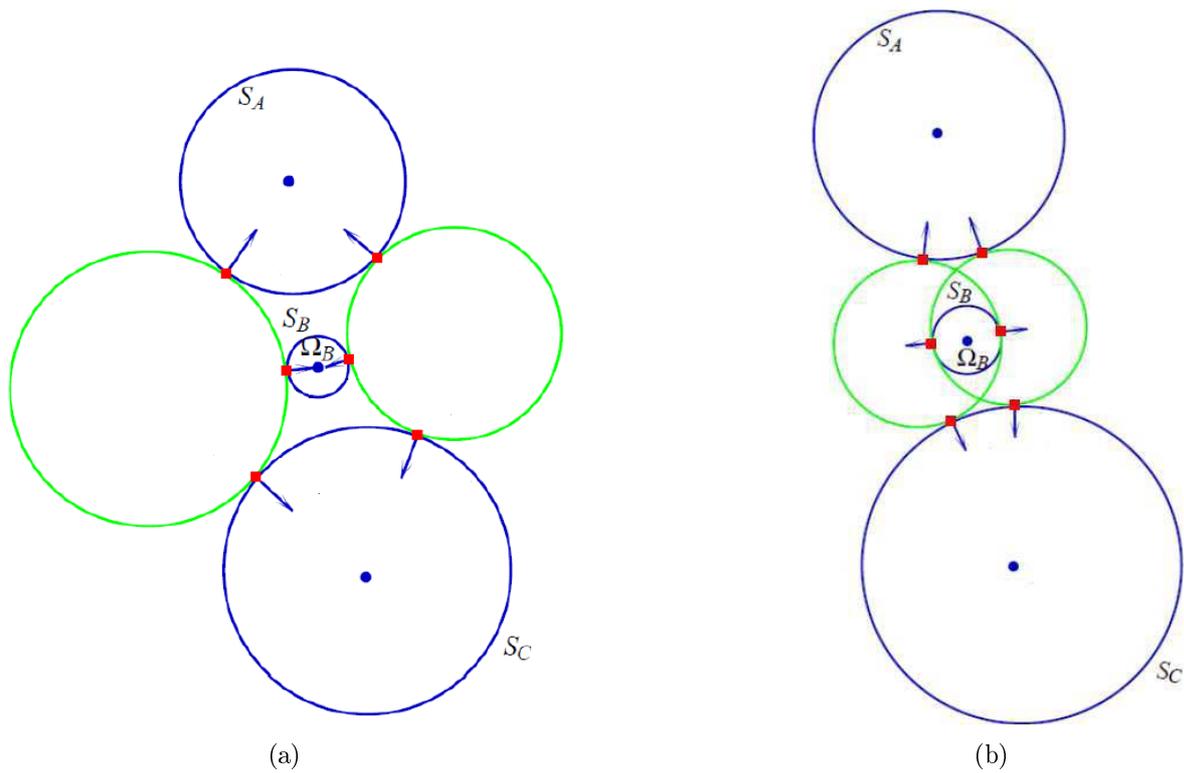


FIGURE 6.7 – (a) Coupe de la CD4, enveloppe de la famille contenant les sphères S_A , S_B et S_C , par le plan de symétrie P_y dans \mathcal{E}_3 . (b) Illustration du changement d'orientation de la sphère S_B sur la CD4 enveloppe dans \mathcal{E}_3 . Dans la figure (a), les vecteurs normaux de la sphère S_B sont dirigés vers le centre Ω_B alors que dans la figure (b), ils sont de sens inverses. Dans cet exemple, le changement d'orientation transforme la CD4A en CD4I.

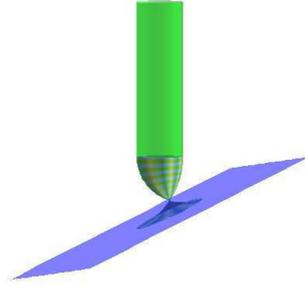


FIGURE 6.8 – Jointure entre le cylindre de révolution et le plan par une CD4I.

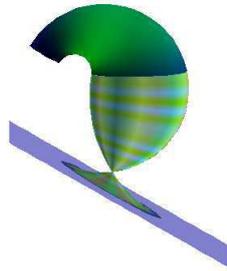


FIGURE 6.9 – Jointure entre la CD4A et le plan par une CD4I.

orthogonales à S . Les points correspondants dans Λ^4 sont les points de $\Lambda^3(\sigma) = (\overrightarrow{O_5\sigma})^\perp \cap \Lambda^4$, figure 6.13. Notons que l'hyperplan vectoriel $(\overrightarrow{O_5\sigma})^\perp$ est parallèle à l'hyperplan affine $T_\sigma\Lambda^4$.

Les courbes γ_1 et γ_2 étant de type espace, nous pouvons supposer que les deux arcs de courbes $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \Lambda^4$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \Lambda^4$ sont paramétrés par la longueur d'arc. De plus, les vecteurs de courbure géodésique $\overrightarrow{k_g}(t)$ en tout point des courbes γ_1 et γ_2 sont de type temps (un vecteur courbure géodésique est la projection $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonale du vecteur dérivé seconde sur l'hyperplan tangent à la courbe en un point), [LS11]. Les vecteurs $\mathcal{L}_{4,1}$ -unitaires $\overrightarrow{\dot{\gamma}_1}(b_1)$ et $\overrightarrow{\dot{\gamma}_2}(a_2)$ sont tangents en $\sigma = \gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ respectivement à γ_1 et γ_2 , figure 6.14. Le dernier cercle caractéristique C_1 de $Surf_1$ et le premier cercle caractéristique C_2 de $Surf_2$ appartiennent à la sphère S .

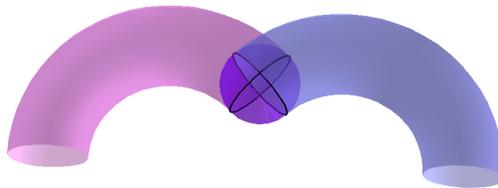


FIGURE 6.10 – Les cercles caractéristiques des surfaces canal sont sécants sur la sphère de jointures.

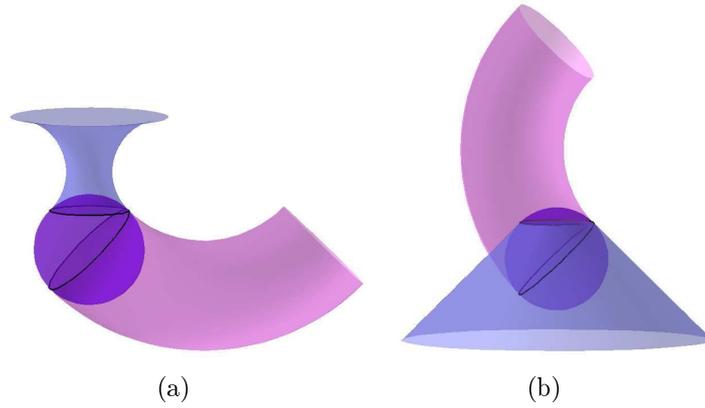


FIGURE 6.11 – (a) Un exemple de jointure G^1 entre deux surfaces canal le long de deux cercles tangents. (b) La surface obtenue en recollant les autres parties des deux surfaces canal et de la sphère est singulière.

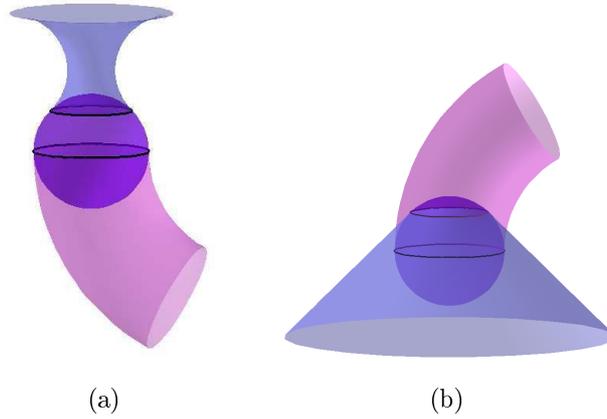


FIGURE 6.12 – (a) Un exemple de jointure G^1 entre deux surfaces canal le long de deux cercles disjoints. (b) La surface obtenue en recollant les autres parties des deux surfaces canal et de la sphère est singulière.

Le vecteur $\overrightarrow{\dot{\gamma}_1(b_1)}$ peut être associé à un point de Λ^4 . Il appartient à $\Lambda^3(\sigma)$. Il correspond à la sphère orthogonale à S le long du cercle C_1 . Ceci revient à considérer les points de $\Lambda^3(\sigma)$ comme des cercles de S .

Les points des courbes $\dot{\gamma}_1(t)$ et $\dot{\gamma}_2(t)$ correspondent aux sphères $\dot{S}_i(t)$ orthogonales aux sphères correspondant aux points $\gamma_i(t)$. L'intersection $\dot{S}_i(t) \cap S_i(t)$ est le cercle caractéristique de $Surf_i$ contenu dans S_i . Les deux cercles, pour $i = 1$ ou 2 , sont disjoints si le point $\dot{\gamma}_2(a_2)$ est à l'intérieur de l'un des cônes $\mathcal{C}_{\dot{\gamma}_1(b_1)}$ ou $\mathcal{C}_{-\dot{\gamma}_1(b_1)}$. Ensuite, il reste à déterminer la « bonne » partie de ces cônes pour que la calotte sphérique orientée D_1 dont le bord orienté est le cercle orienté C_1 soit incluse dans la calotte sphérique orientée D_2 dont le bord orienté est le cercle orienté C_2 (qui contient l'anneau bordé par les deux cercles C_1 et C_2).

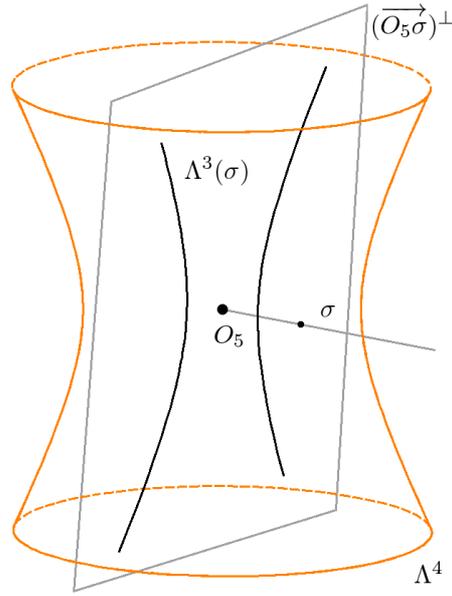


FIGURE 6.13 – Représentation des cercles orientés d'une sphère S correspondant au point σ dans Λ^4 .

Pour cela, nous utilisons les vecteurs courbures géodésiques des courbes γ_1 et γ_2 aux points $\Gamma_1(b_1)$ et $\Gamma_2(a_2)$ que nous notons $\overrightarrow{k_{g_1}}$ et $\overrightarrow{k_{g_2}}$. Rappelons que ces vecteurs $\overrightarrow{k_{g_i}}$ sont les projections des vecteurs $\ddot{\gamma}_i$ sur $T_\sigma \Lambda^4$.

La jointure des deux surfaces canal par rapport à la sphère S associée à $\sigma = \gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ n'a pas de points singuliers si les derniers cercles caractéristiques de $Surf_1$ et les premiers cercles caractéristiques de $Surf_2$ se projettent sur S en dehors de l'anneau de sphère bordé par les cercles C_1 et C_2 . La projections des cercles caractéristiques sur S sont les intersections des sphères correspondantes aux points $\dot{\gamma}_1(t)$ et $\dot{\gamma}_2(t)$ avec S . Les deux courbes $\dot{\gamma}_i(t)$ sont sur Λ^4 mais seuls les points $\dot{\gamma}_1(b_1)$ et $\dot{\gamma}_2(a_2)$ sont sur $\Lambda^3(\sigma)$. Comme nous voulons travailler sur $\Lambda^3(\sigma)$, nous allons utiliser une projection des courbes $\dot{\gamma}_i(t)$ sur $\Lambda^3(\sigma)$, notée $proj(\dot{\gamma}_i(t)) = \alpha_i(t)$, telle que les courbes $\alpha_i(t)$ correspondent aux sphères orthogonales à S portant les cercles $S \cap \dot{S}_i(t)$ (les points σ , $\dot{\gamma}_i(t)$ et $\alpha_i(t)$ pour t fixé correspondent à des sphères qui font partie d'un faisceau de sphères de base le cercle $S \cap \dot{S}_i$, l'ellipse, contenue dans le plan $Aff(\sigma, \dot{\Gamma}_i(t), \alpha_i(t))$ passant par l'origine, intersecte $\Lambda^3(\sigma)$ en $\alpha_i(t)$).

Les vecteurs tangents à $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ aux points $\alpha_1(b_1)$ et $\alpha_2(a_2)$ sont les vecteurs $\overrightarrow{k_{g_1}}$ et $\overrightarrow{k_{g_2}}$ définis précédemment. D'abord, les cercles orientés associés aux points $\alpha_1(b_1)$ et $\alpha_2(a_2)$ sur $\Lambda^3(\sigma)$ doivent appartenir à un faisceau de cercles à points limites pour être disjoints, ce qui implique que les sphères correspondantes à $\alpha_1(b_1)$ et $\alpha_2(a_2)$ dans Λ^4 doivent appartenir à un faisceau de sphères à points limites aussi. La courbe correspondante dans Λ^4 doit être de type temps. Pour obtenir une jointure G^1 entre les deux surfaces canal et le morceau de sphère bordé par les cercles C_1 et C_2 , nous devons pouvoir joindre les points $\alpha_1(b_1)$ et $\alpha_2(a_2)$ dans $\Lambda^3(\sigma)$ par une courbe de type temps contenue dans $\Lambda^3(\sigma)$. Pour que ceci soit possible, il faut que le

vecteur $\overrightarrow{\alpha_1(b_1)\alpha_2(a_2)}$ soit de type temps et que les trois vecteurs positions d'origine $\overrightarrow{k_{g1}}, \overrightarrow{k_{g2}}$ et $\overrightarrow{\alpha_1(b_1)\alpha_2(a_2)}$ d'origine $\dot{\gamma}_1(b_1)$ soit à l'intérieur et dans la même partie du cône $\mathcal{C}_{\dot{\gamma}_1(b_1)}$.

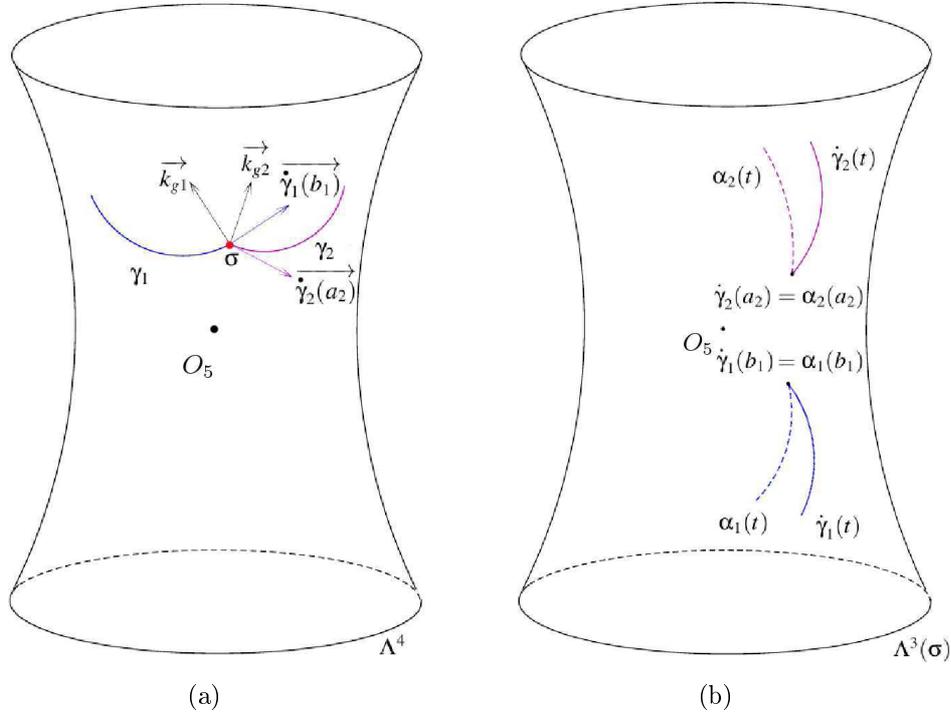


FIGURE 6.14 – Représentation du problème dans Λ^4 . (a) Les deux courbes γ_i correspondant aux surfaces canal $Surf_i$ ont un point commun σ et les vecteurs courbure géodésique au point σ sont les vecteurs k_{g_i} . (b) Les courbes $\dot{\gamma}_i(t)$ et leurs projections $\alpha_i(t)$ sur $\Lambda^3(\sigma)$.

Pour éviter d'obtenir les situations des figures 6.10, 6.11(b) et 6.12(b), nous voulons joindre les surfaces canal le long de cercles caractéristiques ce qui permet d'obtenir des jointures de type G^1 . Dans l'espace des sphères cela implique que les vecteurs tangents (unitaires) aux extrémités de γ_1 et de γ_2 sont les mêmes.

6.5 Jointure G^1 entre deux surfaces canal par deux morceaux de cyclides de Dupin le long de deux cercles

6.5.1 Principe et algorithme

Nous souhaitons joindre de manière G^1 deux surfaces canal quelconques $Surf_1$ et $Surf_2$ le long de deux cercles caractéristiques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 en utilisant deux morceaux de cyclides de Dupin mis bout à bout.

Dans Λ^4 , la surface canal $Surf_1$ (resp. $Surf_2$) est représentée par la courbe γ_1 (resp. γ_2) dont l'extrémité de jointure est le point σ_1 de γ_1 (resp. σ_2 de γ_2). σ_1 (resp. σ_2) représente la sphère S_1 (resp. S_2) tangente à la surface canal $Surf_1$ (resp. $Surf_2$) le long du cercle \mathcal{C}_1 (resp. \mathcal{C}_2). Nous

pouvons calculer le vecteur \vec{v}_1 (resp. \vec{v}_2) tangent à γ_1 (resp. γ_2) en σ_1 (resp. σ_2) représentant le cercle caractéristique \mathbf{C}_1 (resp. \mathbf{C}_2). Le travail consiste à joindre les deux couples points-vecteurs $(\sigma_1; \vec{v}_1)$ et $(\sigma_2; \vec{v}_2)$ par deux arcs de coniques, dans une section de Λ^4 par un espace affine de dimension 3, qui se recollent de façon G^1 en un point σ .

Soit σ un point de Λ^4 . Soit $P_{1,\sigma} = \text{Aff}(\sigma_1, \sigma, \vec{v}_1)$ et $P_{2,\sigma} = \text{Aff}(\sigma_2, \sigma, \vec{v}_2)$. Les deux courbes suivantes :

$$\Gamma_{1,\sigma} = \Lambda^4 \cap P_{1,\sigma} \quad \text{et} \quad \Gamma_{2,\sigma} = \Lambda^4 \cap P_{2,\sigma}$$

représentent chacune une cyclide de Dupin $Cycl_1$ et $Cycl_2$. La cyclide de Dupin $Cycl_1$ (resp. $Cycl_2$) joint de manière G^1 la surface canal $Surf_1$ (resp. $Surf_2$) le long de \mathbf{C}_1 (resp. \mathbf{C}_2) et la sphère \mathbf{S} correspondant à σ le long d'un cercle $\mathbf{C}_{\sigma,1}$ (resp. $\mathbf{C}_{\sigma,2}$). Les cercles $\mathbf{C}_{\sigma,1}$ et $\mathbf{C}_{\sigma,2}$ ne représentent pas forcément le même cercle sur \mathbf{S} . Nous avons la continuité au point de jointure dans Λ^4 mais pas le même vecteur tangent. Dans ce cas, la jointure entre les deux cyclides n'est pas G^1 dans \mathcal{E}_3 . Nous avons vu précédemment qu'il est possible d'obtenir une jointure G^1 en raccordant chacune des deux cyclides de Dupin sur une même sphère en utilisant aussi un morceau de sphère. Pour assurer la G^1 -continuité au niveau de cette sphère, nous imposons que les cercles $\mathbf{C}_{\sigma,1}$ et $\mathbf{C}_{\sigma,2}$ soient confondus. Cette condition est suffisante mais pas nécessaire. Elle impose que les vecteurs $\vec{u}_{1,\sigma}$ et $\vec{u}_{2,\sigma}$ tangents à $\Gamma_{1,\sigma}$ et à $\Gamma_{2,\sigma}$ en σ soient colinéaires.

Dans l'algorithme 11, nous obtenons un degré de liberté concernant le choix de la solution.

Notons que si nous changeons l'orientation de la sphère S dans \mathcal{E}_3 , la jointure entre les deux cyclides dans \mathcal{E}_3 est toujours G^1 tandis que la jointure des deux courbes $\Gamma_{1,\sigma}$ et $\Gamma_{2,\sigma}$ n'est même plus G^0 dans Λ^4 : une courbe a pour extrémité σ alors que l'autre a pour extrémité $\sigma^- = -\sigma$.

La figure 6.15 illustre une jointure G^1 entre les surfaces $Surf_1$, $Cycl_1$, $Cycl_2$ et $Surf_2$, dans Λ^4 , en utilisant l'algorithme 11, le résultat dans \mathcal{E}_3 est montré par la figure 6.20.

6.5.2 Exemple numérique

Dans \mathcal{E}_3 , muni du repère orthonormé direct $(O_3, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, nous souhaitons joindre deux cylindres Cyl_1 et Cyl_2 . Dans la suite toutes les valeurs numériques approchées sont données au millièmes près. Le cylindre Cyl_1 , de rayon $R_1 \simeq 8,007$, de hauteur 4, est placé dans la scène en utilisant la matrice de la transformation affine suivante :

$$\begin{pmatrix} -0,996 & 0,084 & 0,000 & -15,035 \\ 0,083 & 0,993 & 0,084 & 0,050 \\ -0,007 & -0,083 & 0,996 & 10,996 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous voulons joindre Cyl_1 le long du cercle \mathbf{C}_1 tangent à la sphère \mathbf{S}_1 de centre :

$$O_1(-15,035; 0,050; 10,996)$$

et de rayon $r_1 \simeq 8,007$. Le point σ_1 de Λ^4 correspondant à S_1 a pour coordonnées :

$$(17,725; -1,878; 0,006; 1,373; 17,600)$$

tandis que le vecteur \vec{v}_1 correspondant à C_1 a pour composantes :

$$(-2,097; -0,859; -1,318; 0,000; -2,062)$$

Algorithme 11 Jointure G^1 entre deux surfaces canal par deux morceaux de cyclides de Dupin le long de deux cercles donnés

Entrée : Les cercles C_1 et C_2 donnés sur les surfaces canal $Surf_1$ et $Surf_2$

1. Calcul de la sphère S_1 (resp. S_2) tangente à $Surf_1$ (resp. $Surf_2$) en C_1 (resp. C_2)
2. Calcul de σ_1 et σ_2 correspondant à S_1 et S_2 dans Λ^4 .
3. Calcul de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 associés à C_1 et C_2 dans $\overrightarrow{L_{4,1}}$
4. Soit $\sigma \in \Lambda^4$, calcul des 2-plans $P_{1,\sigma} = \text{Aff}(\sigma_1, \sigma, \vec{v}_1)$ et $P_{2,\sigma} = \text{Aff}(\sigma_2, \pm\sigma, \vec{v}_2)$ en fonction de σ
5. Calcul, en fonction de σ , des coniques :

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,\sigma} &= P_{1,\sigma} \cap \Lambda^4 \\ \Gamma_{2,\sigma} &= P_{2,\sigma} \cap \Lambda^4\end{aligned}$$

6. Calcul de $\Omega_{1,\sigma}$ et $\Omega_{2,\sigma}$, centres des coniques (cercles Lorentz) $\Gamma_{1,\sigma}$ et $\Gamma_{2,\sigma}$
7. Calcul de $\vec{u}_{1,\sigma}$ et $\vec{u}_{2,\sigma}$, vecteurs tangents en σ à $\Gamma_{1,\sigma}$ et $\Gamma_{2,\sigma}$ en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega_{1,\sigma}}, \vec{u}_{1,\sigma}) = 0 \\ \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega_{2,\sigma}}, \vec{u}_{2,\sigma}) = 0 \end{cases}$$

8. Détermination de σ_0 tel que les vecteurs \vec{u}_{1,σ_0} et \vec{u}_{2,σ_0} soient colinéaires.

Sortie : Les deux courbes Γ_{1,σ_0} et Γ_{2,σ_0} de Λ^4 correspondant aux deux cyclides de Dupin effectuant une jointure G^1 entre les surfaces canal $Surf_1$ et $Surf_2$ le long des cercles C_1 et C_2 .

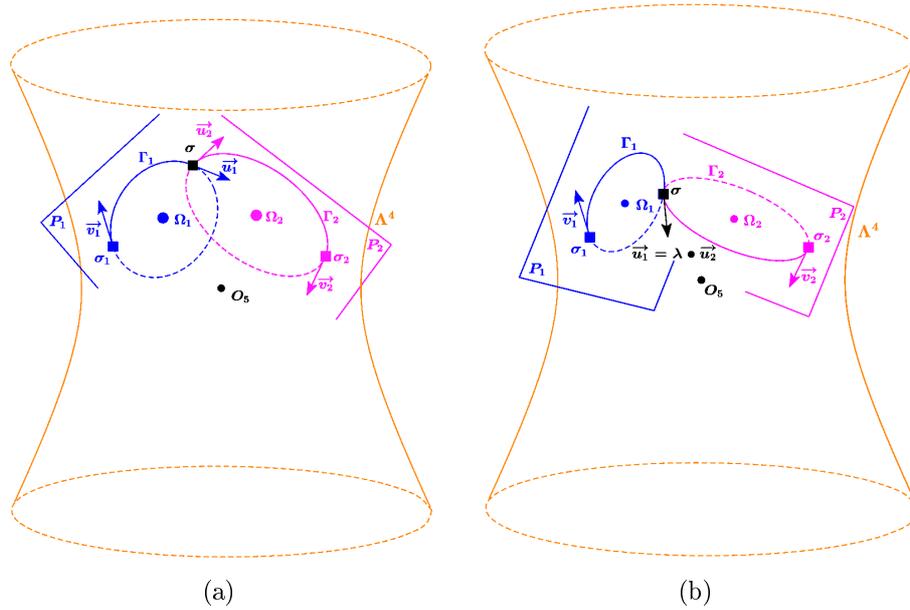


FIGURE 6.15 – Illustration de l’algorithme 11 dans l’espace des sphères. (a) Cas général, les deux vecteurs tangents au point σ ne sont pas colinéaires. (b) Jointure G^1 , le point σ est calculé afin que les deux vecteurs tangents au point σ soient colinéaires.

Le cylindre Cyl_2 , de rayon $R_2 \simeq 3,940$, de hauteur 5, est placé dans la scène en utilisant la matrice de la transformation affine suivante :

$$\begin{pmatrix} 0,365 & -0,330 & 0,870 & 5,606 \\ 0,645 & -0,584 & -0,492 & 8,142 \\ -0,671 & -0,742 & 0,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous voulons joindre Cyl_2 le long du cercle C_2 tangent à la sphère S_2 de centre :

$$O_2 (5,000; 8,485; 0,000)$$

et de rayon $r_2 \simeq 3,940$. Le point σ_2 de Λ^4 correspondant à S_2 a pour coordonnées :

$$(10,250; 1,250; 2,121; 0,000; 10,000)$$

et le vecteur \vec{v}_2 correspondant à C_2 a pour composantes :

$$(18,016; 0,000; 0,138; 1,638; 18,016)$$

En utilisant l’algorithme 11, nous trouvons σ de coordonnées :

$$(4,410; -1,402; 1,080; 0,000; 4,354)$$

qui correspond à la sphère S de centre :

$$O_S (-7,071; 6,928; 0,000)$$

et de rayon $r_S \simeq 6,414$. Les deux courbes :

$$\Gamma_1 = \Lambda^4 \cap Aff(\sigma_1, \sigma, \vec{v}_1)$$

et :

$$\Gamma_2 = \Lambda^4 \cap Aff(\sigma_2, \sigma, \vec{v}_2)$$

correspondent aux deux cyclides Dup_1 et Dup_2 .

Les paramètres de la cyclide de Dupin Dup_1 sont :

$$a_1 \simeq 10,507; \quad c_1 \simeq -1,504; \quad \mu_1 \simeq 6,503$$

tandis que la matrice de la transformation affine permettant de la représenter est :

$$\begin{pmatrix} -0,716 & 0,000 & 0,699 & -7,516 \\ -0,696 & -0,084 & -0,713 & 7,364 \\ 0,059 & -0,996 & 0,060 & 10,381 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les paramètres de la cyclide de Dupin Dup_2 sont :

$$a_2 = 10; \quad c_2 = 2; \quad \mu_2 = 5$$

et toute la scène est représentée dans son repère.

En ne conservant que les parties utiles de ces cyclides pour la jointure, nous obtenons l'illustration de la figure 6.20.

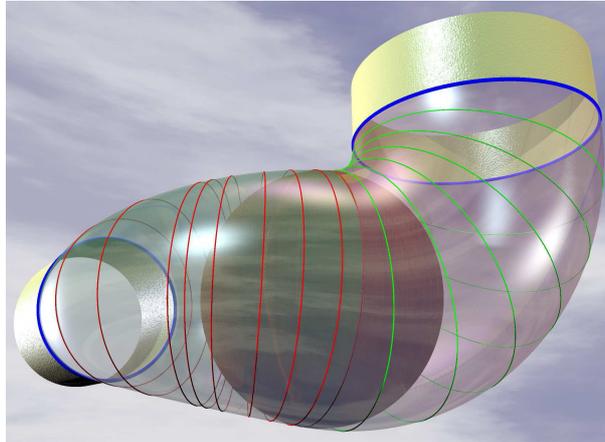


FIGURE 6.16 – Exemple de jointure entre deux cylindres dans \mathcal{E}_3 par deux morceaux de cyclides de Dupin, contrairement à W. Boehm, nous imposons les cercles bleus sur les cylindres.

6.6 Les cyclides passant par un cercle et tangentes à une sphère le long d'un autre cercle

Ce travail provient de deux contextes : le premier consiste à choisir un cercle caractéristique \mathcal{C}_1 sur une surface canal et à joindre de façon G^1 cette surface canal, le long de ce cercle, avec un cercle \mathcal{C} par une cyclide de Dupin. La donnée du cercle \mathcal{C}_1 sur la surface canal impose la sphère \mathcal{S} contenant le cercle \mathcal{C} . Le second consiste à joindre des cyclides de Dupin le long de cercles donnés et dans ce cas, nous avons une famille à un paramètre de couples de cyclides de Dupin. Le choix d'une sphère contenant un des cercles revient à privilégier un couple de cyclides de Dupin dans cette famille. La condition d'existence est la suivante :

Théorème 2 : *Jointure de deux cercles par une cyclide*

Soit deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}_1 .

Il est possible de trouver une cyclide de Dupin telle que \mathcal{C} et \mathcal{C}_1 soient deux cercles caractéristiques de cette cyclide si et seulement si les deux cercles sont soit coplanaires, soit cosphériques (i.e. il existe une sphère \mathcal{S}_0 contenant les deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}_1).

Démonstration 5

- *Montrons d'abord qu'un couple de cercles caractéristiques d'une cyclide de Dupin C_1 et C_2 de la même famille sont cosphériques. Le cercle C_1 (resp. C_2) appartient à une sphère S_1 (resp. S_2) tangente à la cyclide le long de C_1 (resp. C_2). Chaque cercle C_i est déterminé par un couple (σ_i, \vec{v}_i) contenus dans le 2-plan $P = \text{Aff}(\sigma_1, \sigma_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ (rappelons que $P \cap \Lambda^4$ est une conique correspondant à la cyclide). Considérons le plan de type espace $P_1 = \text{Aff}(O_5, \sigma_1, \vec{v}_1)$ (resp. $P_2 = \text{Aff}(O_5, \sigma_2, \vec{v}_2)$) de l'espace $E = \text{Aff}(O_5, \sigma_1, \sigma_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de dimension 3. P_1 et P_2 sont de dimensions 2 dans l'espace E de dimension 3 : l'intersection de P_1 et P_2 est une droite de type espace. Cette droite passe par l'origine O_5 et coupe Λ^4 en deux points τ et $-\tau$ correspondant à une sphère non-orientée T . Les points τ et $-\tau$ appartiennent à deux ellipses de Λ^4 , l'une correspondant au faisceau de sphères passant par le cercle C_1 et l'autre correspondant au faisceau de sphères passant par le cercle C_2 . La sphère T est donc une sphère passant par les deux cercles C_1 et C_2 .*
- *Montrons maintenant que pour tout couple de cercles cosphériques C_1 et C_2 , il existe une cyclide ayant C_1 et C_2 comme cercles caractéristiques de la même famille. Soit T la sphère non-orientée contenant C_1 et C_2 . Soit τ et $-\tau$ les deux points de Λ^4 correspondant à T et \vec{v}_1 et \vec{v}_2 les deux vecteurs de $T_\tau \Lambda^4$ définissant les cercles C_1 et C_2 . La courbe $\Gamma_1 = P_1 \cap \Lambda^4$ (resp. $\Gamma_2 = P_2 \cap \Lambda^4$) où $P_1 = \text{Aff}(O_5, \tau, \vec{v}_1)$ (resp. $P_2 = \text{Aff}(O_5, \tau, \vec{v}_2)$) correspond au faisceau de sphères de base le cercle C_1 (resp. C_2). L'espace $\text{Aff}(P_1, P_2)$ est de dimension 3 car $P_1 \cap P_2$ est la droite $(O_5\tau)$. Soit $\sigma_1 \in \Gamma_1$ différent de τ et $-\tau$ et \vec{u}_1 le vecteur tangent à Γ_1 en σ_1 . Tous les plans du faisceau de plans contenant la droite $\delta = \text{Aff}(\sigma_1, \vec{u}_1)$ (dont P_1) sont dans $\text{Aff}(P_1, P_2)$ et coupent P_2 en une droite d . Il y a trois possibilités :*
 - *d et Γ_2 s'intersectent en deux points*
 - *d et Γ_2 sont tangentes en un point*
 - *d et Γ_2 sont disjointes*

Soit P un plan du faisceau de plans tel que d et Γ_2 sont tangentes en un point. La courbe $P \cap \Lambda^4$ est une conique correspondante à un cyclide de Dupin qui a C_1 et C_2 pour cercles caractéristiques de la même famille. Cette construction est possible pour tout point σ_1 de Γ_1 différent de τ et $-\tau$.

□

Dans l'espace des sphères, les deux courbes représentant les faisceaux de sphères à bases C et C_1 se coupent en deux points qui correspondent aux deux sphères orientées définies par la sphère S_0 .

La figure 6.17 illustre le théorème 2 dans le cas d'un tore à collier.

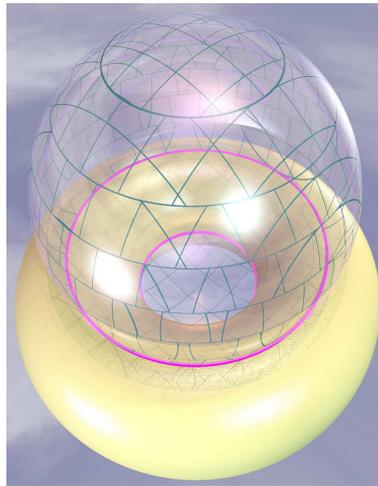


FIGURE 6.17 – Deux cercles cosphériques sur un tore à collier.

L'algorithme 12 permet de trouver la cyclide de Dupin, tangente à la sphère S le long du cercle C telle que le cercle C_1 soit l'un de ses cercles caractéristiques, figure 6.20. Le principe est le suivant :

- à la sphère S correspond le point σ de Λ^4 ;
- au cercle C sur la sphère S correspond un vecteur \vec{v}_0 ;
- le cercle C_1 engendre une ellipse $\Gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t)$ dans un 2-plan de type espace contenant O_5 . Cette ellipse Γ_1 représente le faisceau des sphères à base le cercle C_1 , figure 6.18.

Trouver une cyclide de Dupin répondant à notre problème revient, dans Λ^4 , à trouver le réel t_0 tel que la courbe obtenue comme section de Λ^4 par le plan affine engendré par $\gamma_1(t_0)$, σ et \vec{v}_0 ait pour vecteur tangent, en σ , un vecteur colinéaire à \vec{v}_0 .

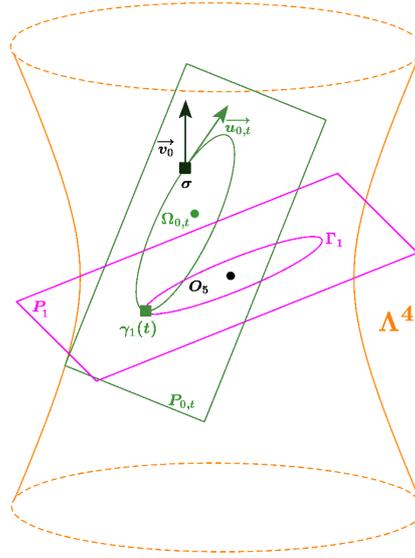


FIGURE 6.18 – Illustration de l’algorithme 12 dans l’espace des sphères. La conique $\Gamma_{0,t}$ est obtenue comme section de Λ^4 par le plan affine défini par $\gamma_1(t)$, σ et \vec{v}_0 . Nous cherchons la valeur de t qui permet d’obtenir un vecteur tangent à la conique $\Gamma_{0,t}$ en σ colinéaire à \vec{v}_0 .

Algorithme 12 Jointure G^1 entre un cercle sur une sphère et un autre cercle.

Entrée : Le cercle \mathcal{C} sur la sphère \mathcal{S} et le cercle \mathcal{C}_1

Condition : Les cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}_1 sont cosphériques.

1. Calcul de σ correspondant à \mathcal{S} dans Λ^4
2. Calcul de \vec{v}_0 associé à \mathcal{C} dans $\overrightarrow{\mathbb{L}_{4,1}}$
3. Calcul de Γ_1 correspondant au faisceau de sphères de \mathcal{E}_3 à base le cercle \mathcal{C}_1 dans Λ^4
4. Soit $\gamma_1(t) \in \Gamma_1$
5. Détermination du Plan $P_{0,t} = \text{Aff}(\sigma, \vec{v}_0, \overrightarrow{\sigma\gamma_1(t)})$
6. Détermination du « cercle » $\Gamma_{0,t} = P_{0,t} \cap \Lambda^4$
7. Calcul du centre $\Omega_{0,t}$ du « cercle » $\Gamma_{0,t}$
8. Calcul de $\vec{u}_{0,t}$, vecteur tangent à $\Gamma_{0,t}$ en σ tel que :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega_{0,t}\sigma}, \vec{u}_{0,t}) = 0$$

9. Détermination de l’une des deux valeurs t_0 tel que les vecteurs \vec{u}_{0,t_0} et \vec{v}_0 soient colinéaires

Sortie : Une courbe Γ_{0,t_0} représentant une famille de sphères qui a pour enveloppe la cyclide de Dupin effectuant la jointure entre \mathcal{C} et \mathcal{C}_1 tangente à \mathcal{S} en \mathcal{C} .

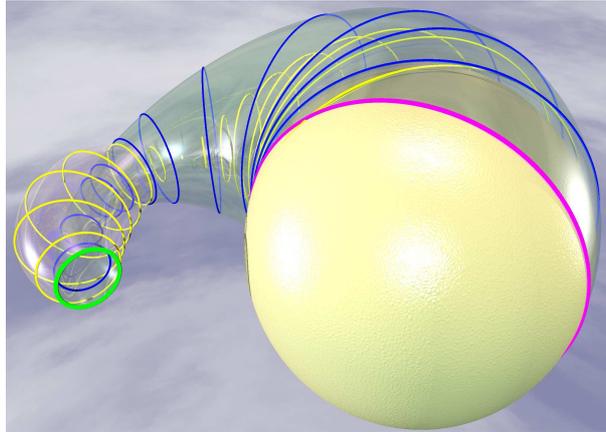


FIGURE 6.19 – Exemple de jointure entre deux cercles dans \mathcal{E}_3 par deux morceaux de cyclides de Dupin tangentes à une sphère donnée en l'un des deux cercles.

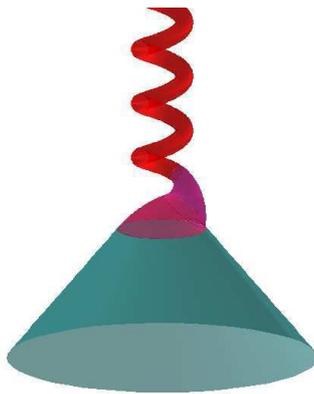


FIGURE 6.20 – Exemple de jointure entre un serpent et un cône à l'aide de deux morceaux de cyclides de Dupin en anneau tangentes le long de leur cercle caractéristique commun.

6.7 Un algorithme de construction de carreaux de cyclides de Dupin à bords circulaires passant par quatre points

Plusieurs algorithmes de conversion de carreaux de cyclides de Dupin en surfaces de Bézier rationnelles biquadratiques ont été développés [Pra97a, Gar07, FGP05, Ued95]. A partir des propriétés des surfaces de Bézier obtenues par les algorithmes précédents, d'autres algorithmes permettent de construire des surfaces de Bézier rationnelles biquadratiques convertibles en carreaux de cyclides de Dupin, [BGF11, Gar07, GG11, GFN06]. Deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour construire un tel carreau, unique [Mar83, SKD96] : les quatre sommets du carreau doivent être cocycliques ; les deux vecteurs tangents, définissant chacun l'un des quatre cercles de bord, en un sommet, doivent être orthogonaux.

Dans cette partie, nous construisons, en utilisant l'espace des sphères, le carreau de cyclide de Dupin qui est défini par les contraintes énoncées dans les articles [Mar83, SKD96] : les quatre sommets sont cocycliques et les deux vecteurs tangents, en l'un de ces points, sont orthogonaux. Par rapport à [BGF11, GG11, GFN06], nous n'avons pas besoin de construire la surface de Bézier, et nous ne sommes pas obligés de déterminer le type et les paramètres de la cyclide de Dupin ainsi que la matrice de transformation permettant d'afficher le carreau dans la scène car nous pouvons utiliser des algorithmes de subdivision que nous appliquons à des courbes de Bézier rationnelles quadratiques dans l'espace de sphères.

6.7.1 Principe de la méthode

Prenons, dans \mathcal{E}_3 , quatre points M_{00} , M_{01} , M_{11} et M_{10} cocycliques et deux vecteurs tangents orthogonaux $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\theta_0}}}$ et $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\psi_0}}}$ en M_{00} , figure 6.21. Les points M_{00} , M_{01} (resp. M_{10}) et le vecteur $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\theta_0}}}$ (resp. $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\psi_0}}}$) définissent le cercle \mathcal{C}_{θ_0} (resp. \mathcal{C}_{ψ_0}). Notons que les sens de ces deux vecteurs ne sont pas importants pour la détermination des cercles.

Chaque cercle de \mathcal{E}_3 permet de définir un faisceau de sphères à base cercle. Pour l'obtenir, nous considérons deux éléments du faisceau : une sphère orientée ayant ce cercle comme grand cercle d'une part et un plan orienté contenant ce cercle d'autre part. Notons que cette sphère et ce plan sont orthogonaux.

Dans l'espace des sphères, chacun de ces deux faisceaux est une ellipse, située dans un 2-plan de type espace contenant O_5 . Rappelons que $\left| \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma}, \overrightarrow{O_5\tau} \right) \right| = 1$ lorsque les deux sphères S et T , correspondantes à σ et τ , sont tangentes. Dans le cas de cyclides de Dupin, nous avons $\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma}, \overrightarrow{O_5\tau} \right) = 1$ pour toute sphère orientée S d'une famille de sphères et toute sphère orientée T de l'autre famille de sphères définissant la cyclide. En s'inspirant de cette proposition, notre construction permet de trouver un point σ_{θ_0} sur l'une des ellipses ainsi qu'un point σ_{ψ_0} sur l'autre ellipse tels que leurs représentations dans \mathcal{E}_3 soient deux sphères tangentes en M_{00} .

Dans un second temps, nous déterminons une droite lumière définie par la sphère σ_{ψ_0} et le vecteur $\overrightarrow{m_{10}}$, représentation du point M_{10} . Il reste à déterminer le point σ_{θ_2} de cette droite lumière tel que la sphère associée à σ_{θ_2} contienne le point M_{11} .

Dans [SKD96], les auteurs partent de quatre points cocycliques et de deux vecteurs, l'un est un vecteur normal en M_{00} tandis que l'autre est un vecteur tangent au cercle caractéristique \mathcal{C}_{θ_0} . Ils construisent par itérations les autres cercles caractéristiques.

Dans un premier temps, ils déterminent la sphère \mathbf{S}_{θ_0} de la famille de sphères dont la contribution est le cercle \mathcal{C}_{θ_0} . Le vecteur tangent caractérisant le cercle \mathcal{C}_{ψ_0} est obtenu par le produit vectoriel entre les deux vecteurs précédents.

Le deuxième cercle caractéristique \mathcal{C}_{ψ_0} est construit, puis la sphère \mathbf{S}_{ψ_0} de l'autre famille de sphères, contenant le cercle \mathcal{C}_{ψ_0} est déterminée. Les deux derniers cercles caractéristiques \mathcal{C}_{θ_2} et \mathcal{C}_{ψ_2} ainsi que les sphères \mathbf{S}_{θ_2} et \mathbf{S}_{ψ_2} sont construits de manière analogue.

Notre méthode, dans l'espace des sphères, nous permet d'obtenir directement les bonnes sphères, sans avoir à calculer des intersections de droites. Nous construisons les sphères \mathbf{S}_{θ_0} et \mathbf{S}_{ψ_0} à partir des faisceaux de sphères de base les cercles \mathcal{C}_{θ_0} et \mathcal{C}_{ψ_0} puis nous déterminons la sphère \mathbf{S}_{θ_2} . Le cercle caractéristique \mathcal{C}_{θ_2} est ensuite construit. En fait, nous ne calculons que trois sphères pour déterminer la cyclide de Dupin.

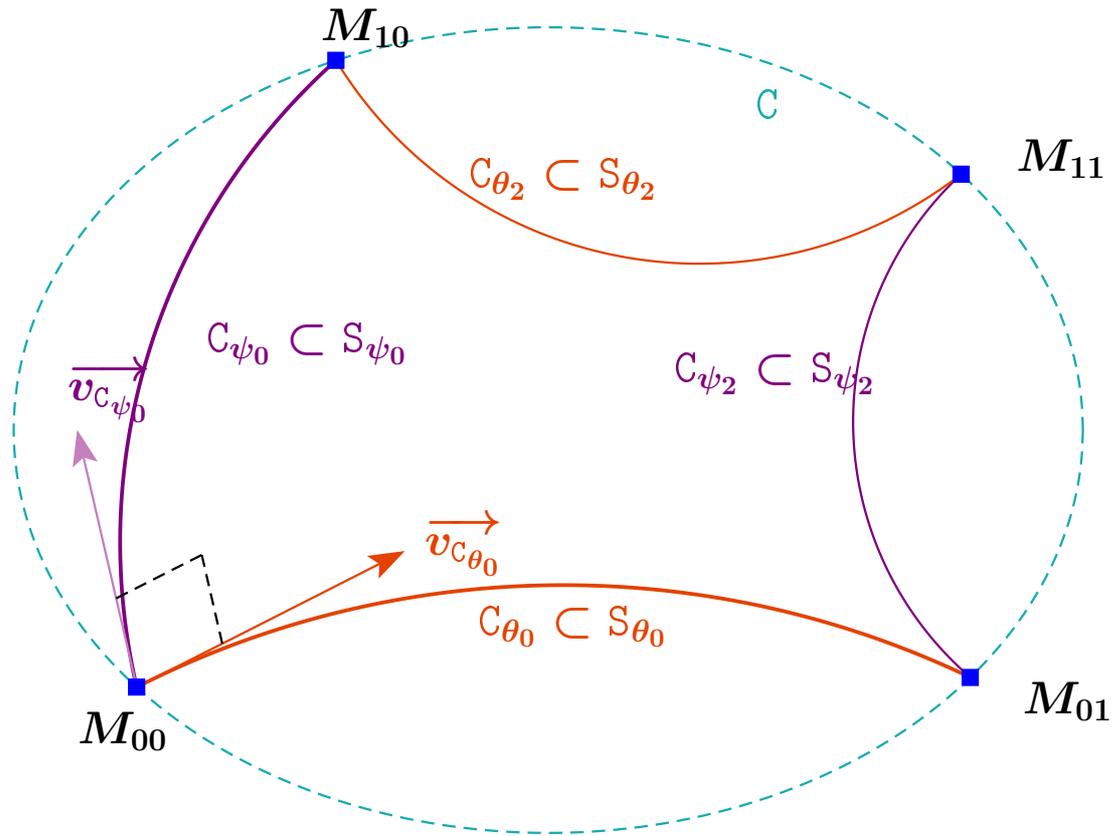


FIGURE 6.21 – Conditions permettant d’obtenir un carreau de cyclide de Dupin à bords circulaires dans \mathcal{E}_3 . Les points M_{00} , M_{01} , M_{11} et M_{10} appartiennent à un cercle. Les points M_{00} , M_{01} (resp. M_{10}) et le vecteur $\overrightarrow{v_{C_{\theta_0}}}$ (resp. $\overrightarrow{v_{C_{\psi_0}}}$) définissent un arc de cercle. Les vecteurs $\overrightarrow{v_{C_{\theta_0}}}$ et $\overrightarrow{v_{C_{\psi_0}}}$ sont orthogonaux.

6.7.2 Construction et algorithme

Remarquons que si \mathcal{C} est un grand cercle de la sphère \mathcal{S} et si P est le plan contenant le cercle \mathcal{C} , une expression (dans Λ^4) d’une sphère appartenant au faisceau de sphères de base le cercle \mathcal{C} est :

$$\overrightarrow{O_5 \gamma_\theta} = \cos(\theta) \overrightarrow{O_5 \sigma_{\theta_I}} + \sin(\theta) \overrightarrow{O_5 \tau_{\theta_I}} \quad (6.1)$$

où $\theta \in [0, 2\pi]$ et σ_{θ_I} (resp. τ_{θ_I}) est la représentation de la sphère orientée \mathcal{S} (resp. le plan orienté P). En effet :

$$\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5 \tau_{\theta_I}} \right) = 0$$

ce qui permet d’obtenir une paramétrisation analogue à celle utilisée pour paramétrer le cercle unité du plan affine euclidien ($P \cap \Lambda^4$ est un cercle pour la forme de Lorentz).

Dans \mathcal{E}_3 , rappelons que les points M_{00} et M_{01} et le vecteur tangent $\overrightarrow{v_{C_\theta}}$ définissent un cercle caractéristique de la cyclide. Il en est de même en remplaçant M_{01} par M_{10} et $\overrightarrow{v_{C_\theta}}$ par $\overrightarrow{v_{C_\psi}}$.

L'algorithme 13 permet de déterminer, lorsque nous avons deux faisceaux de sphères à base cercle, une sphère de chaque faisceau, toutes deux tangentes entre elles. Nous choisissons les quatre sphères σ_{θ_I} , σ_{ψ_I} , τ_{θ_I} et τ_{ψ_I} telles que :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) \leq 0 \\ \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) \leq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Soit \mathbf{C}_θ et \mathbf{C}_ψ deux cercles passant par le point M_{00} tels que les tangentes aux cercles en M_{00} soient orthogonales.

Soit σ_{θ_I} (resp. σ_{ψ_I}) le point de Λ^4 correspondant à une sphère orientée de grand cercle \mathbf{C}_θ (resp. \mathbf{C}_ψ).

Soit τ_{θ_I} (resp. τ_{ψ_I}) le point de Λ^4 correspondant à l'un des deux plans orientés contenant le cercle \mathbf{C}_θ (resp. \mathbf{C}_ψ).

Dans Λ^4 , les paramétrisations $\theta_0 \mapsto \gamma_\theta(\theta_0)$ et $\psi_0 \mapsto \gamma_\psi(\psi_0)$ des ellipses représentant ces deux faisceaux de sphères sont définies par :

$$\overrightarrow{O_5\gamma_\theta(\theta_0)} = \cos(\theta_0) \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} + \sin(\theta_0) \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}$$

et :

$$\overrightarrow{O_5\gamma_\psi(\psi_0)} = \cos(\psi_0) \overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}} + \sin(\psi_0) \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}}$$

et, d'après le théorème 1, les sphères $\gamma_\theta(\theta_0)$ et $\gamma_\psi(\psi_0)$ sont tangentes si et seulement si :

$$\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\gamma_\theta(\theta_0)}, \overrightarrow{O_5\gamma_\psi(\psi_0)} \right) = 1 \quad (6.3)$$

En notant :

$$\begin{aligned} a_{\theta_0} &= \cos(\theta_0) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}} \right) + \sin(\theta_0) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) \\ b_{\theta_0} &= \cos(\theta_0) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) + \sin(\theta_0) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

L'équation (6.3) est équivalente à la suivante :

$$a_{\theta_0} \cos(\psi_0) + b_{\theta_0} \sin(\psi_0) = 1 \quad (6.5)$$

L'équation (6.5) admet des solutions si et seulement si $a_{\theta_0}^2 + b_{\theta_0}^2 \geq 1$.

$$\begin{aligned} a_{\theta_0}^2 + b_{\theta_0}^2 &= \cos^2(\theta_0) \left(\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right)^2 \right) \\ &+ \sin^2(\theta_0) \left(\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right)^2 \right) \\ &+ 2 \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) \left(\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) \right. \\ &\left. + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) \right) \end{aligned}$$

Notons A et B les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right)^2} \\ B &= \sqrt{\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right)^2} \end{aligned} \quad (6.6)$$

A partir des lemmes 11 et 12 de l'annexe C, nous avons :

$$AB = \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right)$$

et :

$$(A \cos \theta_0 - B \sin \theta_0)^2 = 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} a_{\theta_0}^2 + b_{\theta_0}^2 &= (A \cos(\theta_0) - B \sin(\theta_0))^2, \text{ formule (C.9)} \\ &= 1, \text{ formules (C.5) et (C.6).} \end{aligned}$$

De plus, nous avons $A^2 + B^2 = 1$, formule (C.2).

Après quelques calculs, l'équation $a_{\theta_0}^2 + b_{\theta_0}^2 = 1$ est équivalente à :

$$\cos(2\theta_0 + \theta_s) = 2 \frac{1 - B^2}{A^2 + B^2} - \cos(\theta_s)$$

où θ_s est la solution de :

$$\begin{cases} \cos(\theta_s) = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} \\ \sin(\theta_s) = 2 \frac{AB}{A^2 + B^2} \end{cases}$$

L'égalité $A^2 + B^2 = 1$ implique :

$$\cos(2\theta_0 + \theta_s) = 2 - 2B^2 - (A^2 - B^2) = 2 - (A^2 + B^2) = 1$$

et nous obtenons deux solutions $\theta_0 = -\frac{\theta_s}{2}$ et $\theta_0 = -\frac{\theta_s}{2} + \pi$.

La relation $a_{\theta_0}^2 + b_{\theta_0}^2 = 1$ implique que la formule (6.5) est équivalente à

$$\cos(\psi_s) \cos(\psi_0) + \sin(\psi_s) \sin(\psi_0) = 1 \quad (6.7)$$

où ψ_s est défini par :

$$\begin{cases} \cos(\psi_s) = a_{\theta_0} \\ \sin(\psi_s) = b_{\theta_0} \end{cases} \quad (6.8)$$

et nous obtenons, à partir de la formule (6.7), $\psi_0 = \psi_s$.

Les sphères correspondantes aux points $\gamma_\theta(\theta_0)$ et $\gamma_\psi(\psi_0)$ de Λ^4 , définies par la formule 6.1, sont tangentes en M_{00} .

Notons que les sphères $\gamma_\theta(\theta_0)$ et $\gamma_\theta(\theta_0 + \pi)$ représentent la même sphère non orientée de \mathcal{E}_3 .

Lorsque nous avons un faisceau de sphères tangentes en un point donné, le lemme 2 permet de déterminer la sphère de ce faisceau qui contient un autre point. Ce lemme nous sera utile dans les points 14 à 16 de l'algorithme 13.

Lemme 2 :

Soit σ_0 représentant une sphère orientée de \mathcal{E}_3 et $\overrightarrow{m_{00}}$ représentant le point M_{00} de \mathcal{E}_3 .

Soit $l_{00} : t \mapsto \sigma_0 + t\overrightarrow{m_{00}}$ une paramétrisation d'une droite lumière sur Λ^4 représentant les sphères tangentes à σ_0 en M_{00} .

Soit $\overrightarrow{m_{10}}$ un vecteur de type lumière représentant un point M_{10} de \mathcal{E}_3 .

Le point M_{10} appartient à la sphère définie par $l_{00}(t_0)$ si et seulement si :

$$t_0 = f(\sigma_0, \overrightarrow{m_{00}}, \overrightarrow{m_{10}}) = -\frac{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_0}, \overrightarrow{m_{10}})}{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{m_{00}}, \overrightarrow{m_{10}})} \quad (6.9)$$

Démonstration 6 Par construction de l'espace des sphères, le point M_{10} appartient à la sphère définie par $l_{00}(t_0)$ si et seulement si, propriété 2 :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5l_{00}(t_0)}, \overrightarrow{m_{10}}) = 0 \quad (6.10)$$

et nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5l_{00}(t_0)}, \overrightarrow{m_{10}}) = 0 &\iff \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_0} + t_0\overrightarrow{m_{00}}, \overrightarrow{m_{10}}) = 0 \\ &\iff \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_0}, \overrightarrow{m_{10}}) + t_0\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{m_{00}}, \overrightarrow{m_{10}}) = 0 \\ &\iff t_0 = -\frac{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_0}, \overrightarrow{m_{10}})}{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{m_{00}}, \overrightarrow{m_{10}})} \end{aligned}$$

□

Algorithme 13 Détermination d'une cyclide de Dupin permettant d'obtenir un carreau à bords circulaires.

Entrée : Quatre points cocycliques $(M_{ij})_{(i,j) \in [0;1]^2}$ (deux à deux disjoints) et deux vecteurs $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\theta_0}}}$ et $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\psi_0}}}$, non nuls, orthogonaux.

1. Pour i de 0 à 1 faire
2. Calcul du vecteur $\overrightarrow{m_{00}}$ représentant le point M_{00} .
Calcul du vecteur $\overrightarrow{m_{01}}$ représentant le point M_{01} .
Calcul du vecteur $\overrightarrow{m_{11}}$ représentant le point M_{11} .
Calcul du vecteur $\overrightarrow{m_{10}}$ représentant le point M_{10} .
3. Construction du cercle \mathcal{C}_θ passant par les points M_{00} et M_{01} et dont la tangente en M_{00} est définie par $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\theta_0}}}$.
4. Construction du cercle \mathcal{C}_ψ passant par les points M_{00} et M_{10} et dont la tangente en M_{00} est définie par $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\psi_0}}}$.
5. Construction d'une sphère orientée ayant \mathcal{C}_θ comme grand cercle et détermination du point σ_{θ_I} correspondant dans Λ^4 .
6. Construction d'un plan orienté contenant \mathcal{C}_θ et détermination du point τ_{θ_I} correspondant dans Λ^4 .
7. Construction d'une sphère orientée ayant \mathcal{C}_ψ comme grand cercle et détermination du point σ_{ψ_I} correspondant dans Λ^4 .
8. Construction d'un plan orienté contenant \mathcal{C}_ψ et détermination du point τ_{ψ_I} correspondant dans Λ^4 .
9. Détermination de l'ellipse $\gamma_\theta(\theta_0)$ représentant le faisceau de sphères de base le cercle \mathcal{C}_θ , formule (6.1).
10. Détermination de l'ellipse $\gamma_\psi(\psi_0)$ représentant le faisceau de sphères de base le cercle \mathcal{C}_ψ , formule (6.1).
11. Calcul de θ_0 et ψ_0 .
12. Détermination des sphères $\sigma_{\theta_0} = \gamma_\theta(\theta_0)$ d'une part et $\sigma_{\psi_0} = \gamma_\psi(\psi_0)$ d'autre part.
13. Calcul du vecteur $\overrightarrow{\gamma'_\theta(\theta_0)}$.
14. Détermination d'une paramétrisation de la direction lumière $l_{01} : t \mapsto \sigma_{\psi_0} + t \overrightarrow{m_{10}}$.
15. Calcul de $t_1 = f(\sigma_{\psi_0}, \overrightarrow{m_{10}}, \overrightarrow{m_{11}})$, formule (6.9).
16. Détermination de la sphère $\sigma_{\theta_2} = l_{01}(t_1)$.

Sortie : Deux sphères $\sigma_{\theta_0}, \sigma_{\theta_2}$ et le vecteur $\overrightarrow{\gamma'_\theta(\theta_0)}$ déterminent une cyclide de Dupin : la conique sur Λ^4 représentant la cyclide est contenue dans le plan affine engendré par $\sigma_{\theta_0}, \sigma_{\theta_2}$ et $\overrightarrow{\gamma'_\theta(\theta_0)}$.

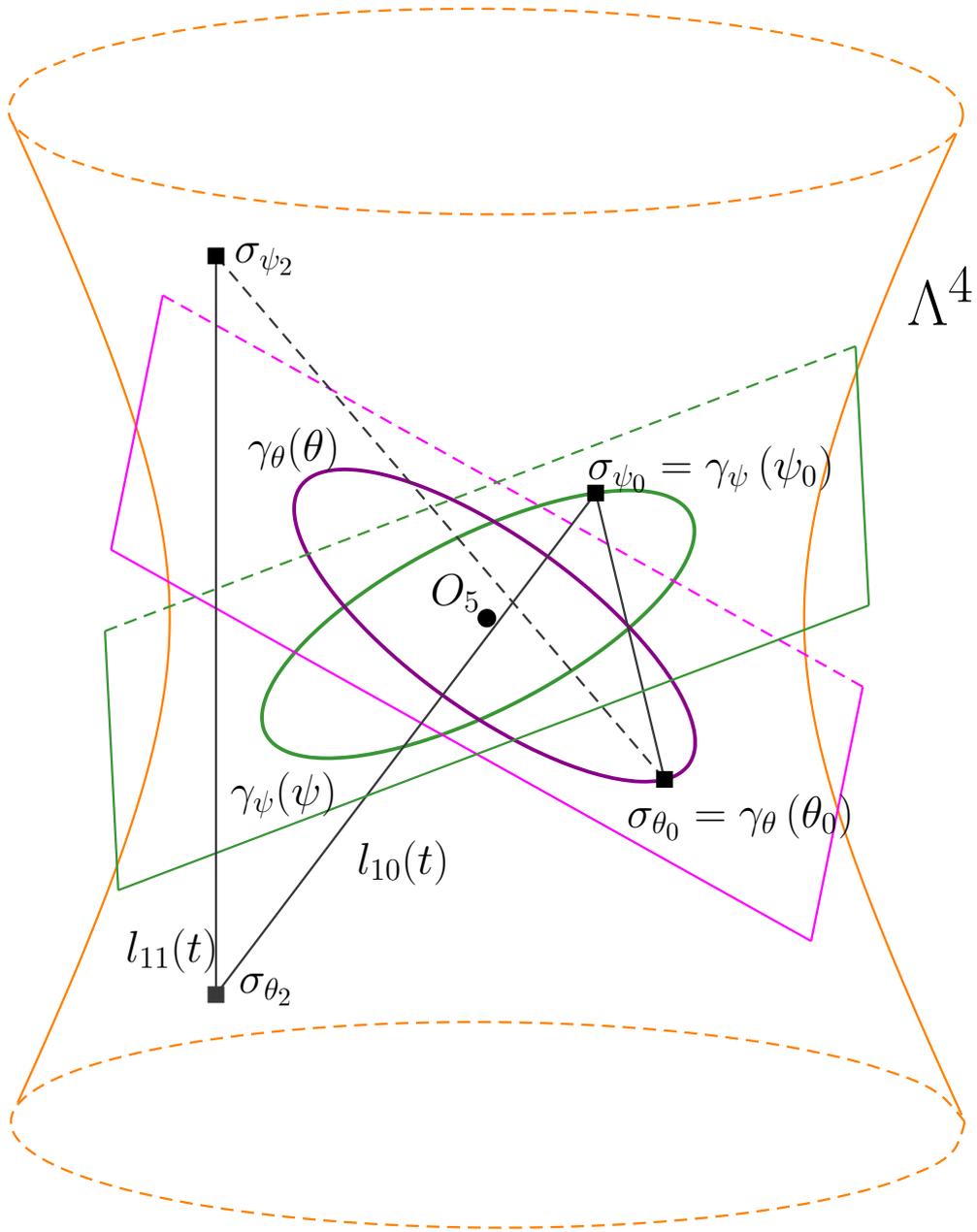


FIGURE 6.22 – Construction d’un carré de cyclide à bords circulaires dans Λ^4 . Les droites $(\sigma_{\theta_0}\sigma_{\psi_0})$, $(\sigma_{\theta_2}\sigma_{\psi_0})$, $(\sigma_{\theta_2}\sigma_{\psi_2})$ et $(\sigma_{\theta_0}\sigma_{\psi_2})$, sont de type lumière et ont chacune pour vecteur directeur respectif \vec{m}_{00} , \vec{m}_{10} , \vec{m}_{11} , et \vec{m}_{01} . Le 2-plan rose (resp. vert) est le plan contenant le faisceau de sphères à base cercle \mathcal{C}_{θ_0} (resp. \mathcal{C}_{ψ_0}). Chacun des deux faisceaux de sphères est représenté par un des cercles obtenus comme section de Λ^4 par un 2-plan affine passant par O_5 de type espace.

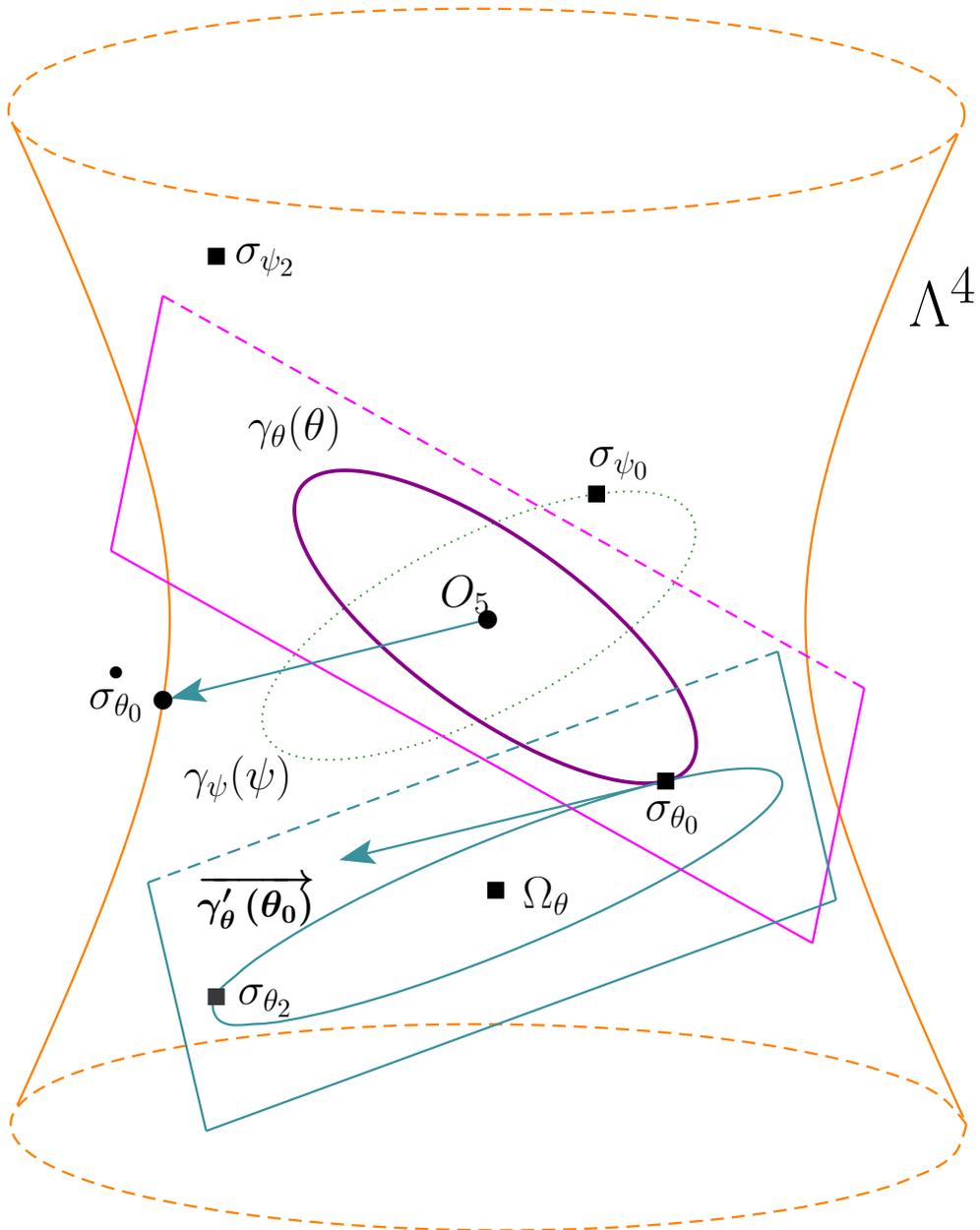


FIGURE 6.23 – Construction d'un carré de cyclide à bords circulaires dans Λ^4 . Le 2-plan rose est le plan contenant le cercle représentant la famille de sphères passant par C_θ . Le 2-plan bleu est le plan contenant le cercle représentant une famille de sphères de la cyclide de Dupin déterminée par l'algorithme 13. Ce plan est déterminé par la sphère σ_{θ_2} et le cercle caractéristique défini par le couple $(\sigma_{\theta_0}; \overrightarrow{\gamma'_\theta(\theta_0)})$.

L'algorithme 13 permet une construction séquentielle de la cyclide de Dupin solution du problème posé. Les points 4 à 8 permettent de traduire dans Λ^4 les propriétés à respecter dans \mathcal{E}_3 . Les sphères σ_{θ_I} , τ_{θ_I} , σ_{ψ_I} et τ_{ψ_I} vérifient les conditions données par la formule (6.2).

Les points 9 et 10 permettent d'obtenir la paramétrisation usuelle d'un cercle dans un plan affine muni d'un repère orthonormé. Les points 11 et 12 permettent de déterminer les deux sphères, de chacun des faisceaux, tangentes au point M_{00} .

Les points 14 à 16 permettent de construire la dernière sphère σ_{θ_2} définissant la cyclide de Dupin, elle vient compléter la sphère σ_{θ_0} et le vecteur $\overrightarrow{\gamma'_\theta(\theta_0)}$. En utilisant le lemme 2, nous déterminons la sphère σ_{θ_2} tangente en M_{10} à \mathcal{S}_{ψ_0} et passant par le point M_{11} .

Notons qu'en reprenant le principe de la partie de l'algorithme correspondant aux points 14 à 16, nous construirions de manière analogue la sphère σ_{ψ_2} de la seconde famille : la seconde conique dans Λ^4 représentant la cyclide de Dupin serait définie par la section de Λ^4 par le plan affine engendré par σ_{ψ_2} , σ_{ψ_0} et $\overrightarrow{\gamma'_\psi(\psi_0)}$.

La figure 6.22 montre les deux faisceaux de sphères qui sont représentés par des ellipses centrées à l'origine. Ces coniques sont contenues dans des plans affines, de type espace, contenant O_5 . Nous prenons σ_{θ_0} et σ_{ψ_0} sur chacune de ces coniques. Le calcul de la sphère σ_{θ_2} est très aisé puisque nous connaissons un point de chaque sphère (et donc une direction lumière) et une sphère qui lui est tangente : il suffit d'appliquer le lemme 2. Les sphères de \mathcal{E}_3 définies par σ_{θ_0} et σ_{ψ_0} sont tangentes en M_{00} . En continuant le processus, les sphères de \mathcal{E}_3 définies par σ_{θ_2} et σ_{ψ_0} seraient tangentes en M_{10} . De même, les sphères de \mathcal{E}_3 définies par σ_{θ_2} et σ_{ψ_2} sont tangentes en M_{11} . Les sphères de \mathcal{E}_3 définies par σ_{θ_0} et σ_{ψ_2} sont tangentes en M_{01} . Notons qu'en continuant le processus permettant de construire σ_{θ_2} puis σ_{ψ_2} , nous obtiendrions σ_{θ_0} .

La figure 6.23 présente la sphère σ_{θ_0} qui appartient à la conique $\overrightarrow{\gamma_\theta}$. Le cercle caractéristique sur la sphère σ_{θ_0} est complètement déterminé par elle-même et $\overrightarrow{\gamma'_\theta(\theta_0)}$ qui est le vecteur tangent au cercle en σ_{θ_0} . La cyclide est alors complètement déterminée comme intersection de Λ^4 avec le plan affine engendré par les points σ_{θ_0} et σ_{θ_2} et le vecteur $\overrightarrow{\gamma'_\theta(\theta_0)}$. Ce vecteur détermine le point σ_{θ_0} qui correspond, dans \mathcal{E}_3 , à une sphère orthogonale à la sphère définie par σ_{θ_0} .

6.7.3 Exemple numérique

Nous cherchons le carreau de cyclide qui a pour sommets les points $M_{00}(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$, $M_{10}(2\sqrt{3}, -2, 0)$, $M_{01}(-2, 2\sqrt{3}, 0)$ et $M_{11}(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0)$. Ces derniers appartiennent au cercle $\mathcal{C}(O_3, 4)$ (en noir) contenu dans le plan $P_z : z = 0$, figure 6.24.

La figure 6.25 montre la conique déterminant la cyclide de Dupin déterminée par trois sphères : deux de l'enveloppe qui correspondent à σ_{θ_0} et σ_{θ_2} et une troisième définie par le vecteur tangent à la conique au point σ_{θ_0} , dans Λ^4 .

Les cercles caractéristiques sont modélisés très facilement par des courbes de Bézier rationnelles quadratiques [Gar07] définies par les points de contrôle $(M_{00}; 1)$, $(P_0; \pm\omega_0)$, $(M_{01}; 1)$ d'une part, et $(M_{00}; 1)$, $(P_1; \pm\omega_1)$, $(M_{10}; 1)$ d'autre part, avec :

$$(P_0; \omega_0) \simeq ((-0, 129; -0, 980; 2); 0, 466)$$

et :

$$(P_1; \omega_1) \simeq \left(\left(3, 798; \frac{1}{2}; -3 \right); 0, 621 \right)$$

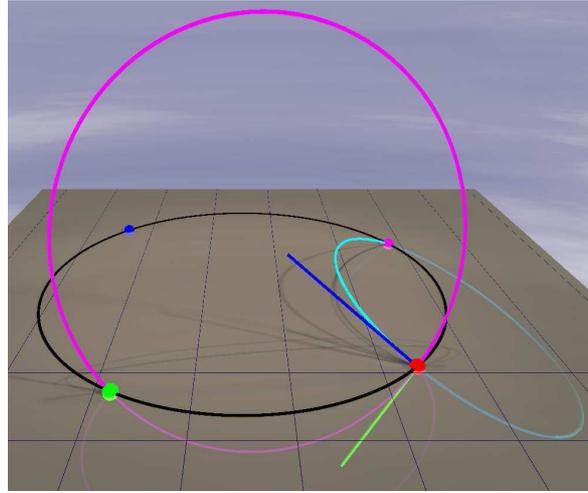


FIGURE 6.24 – Les sommets M_{00} , M_{01} , M_{11} et M_{10} appartiennent au cercle noir contenu dans le plan $P_z : z = 0$. Les autres cercles seront deux cercles caractéristiques de la cyclide de Dupin à déterminer. Les segments représentent les vecteurs tangents orthogonaux en M_{00} .

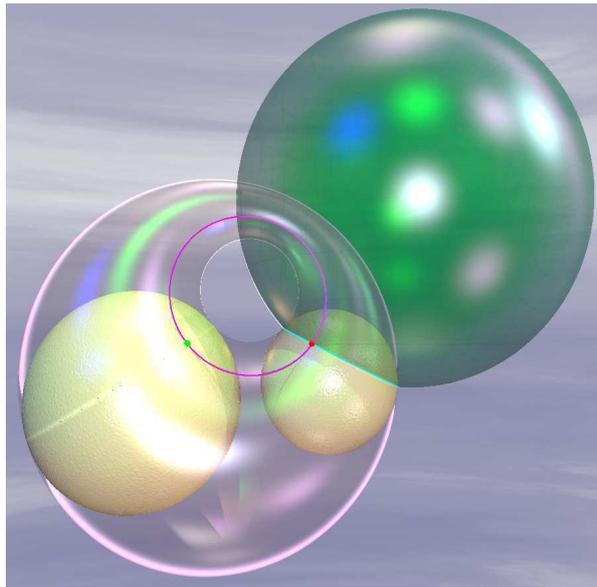


FIGURE 6.25 – La cyclide de Dupin est déterminée par les trois sphères correspondantes aux points σ_{θ_0} , σ_{θ_2} et $\sigma_{\theta_0}^\bullet$ (les deux sphères de droite sont orthogonales et permettent de déterminer le cercle \mathcal{C}_θ).

Les sphères initiales sont données dans le tableau 6.1.

Nous obtenons :

$$(\theta_s, \theta_0, \psi_0) \simeq (0, 74708; -0, 37354; 2, 16484)$$

Nom	Dans \mathcal{E}_3	Dans Λ^4
σ_{θ_I}	$((0, 565; 4, 294; -0, 556); 2, 753)$	$(2, 268; 0, 205; 1, 560; -0, 202; 1, 905)$
τ_{θ_I}	$0, 057 x - 0, 429 y + 0, 901 z - 1, 375 = 0$	$(1, 375; 0, 057; 0, 429; 0, 901; 1, 375)$
σ_{ψ_I}	$((2, 737; 0, 360; 1, 886); 3, 108)$	$(0, 405; 0, 881; 0, 116; 0, 607; 0, 083)$
τ_{ψ_I}	$-0, 968 x - 0, 128 y - 0, 214 z + 3, 100 = 0$	$(-3, 100; -0, 968; -0, 128; -0, 214; -3, 100)$

TABLE 6.1 – Sphères définies par le carreau de cyclide de Dupin.

Nom	Dans Λ^4	Dans \mathcal{E}_3
σ_{θ_0}	$(1, 610; 0, 171; 1, 295; -0, 517; 1, 272)$	$((0, 504; 3, 830; -1, 529); 2, 957)$
$\sigma_{\theta_0}^\bullet$	$(2, 107; 0, 128; 0, 969; 0, 765; 1, 975)$	$((0, 962; 7, 310; 5, 774); 7, 544)$
σ_{θ_2}	$(0, 704; 0, 131; -0, 994; -0, 517; 0, 473)$	$((0, 561; -4, 291; -2, 232); 4, 317)$
σ_{ψ_0}	$(-2, 796; -1, 296; -0, 171; -0, 517; -2, 616)$	$((7, 192; 0, 947; 2, 871); -5, 552)$
σ_{ψ_2}	$(-1, 890; 0, 994; -0, 131; -0, 517; -1, 816)$	$((-13, 516; 1, 779; 7, 030); -13, 597)$

TABLE 6.2 – Sphères qui définissent la cyclide de Dupin.

et les sphères qui définissent la cyclide de Dupin sont données dans le tableau 6.2. Comme nous avons :

$$\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_0}} = \cos(\theta_0) \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} + \sin(\theta_0) \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}$$

la sphère $\sigma_{\theta_0}^\bullet$ est déterminée par la formule :

$$\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_0}^\bullet} = -\sin(\theta_0) \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} + \cos(\theta_0) \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}$$

et l'un des deux 2-plans affines qui caractérise la cyclide de Dupin est défini par les points σ_{θ_0} et σ_{θ_2} et le vecteur $\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_0}^\bullet}$.

Nous pouvons remarquer que le centre Ω_θ de la conique $\Gamma_\theta = \Lambda^4 \cap \text{Aff}(\sigma_{\theta_0}, \sigma_{\theta_1}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_0}^\bullet})$ est calculé directement¹ par la formule :

$$\overrightarrow{\sigma_{\theta_0}\Omega_\theta} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_{\theta_0}\sigma_{\theta_2}})}{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_{\theta_0}\sigma_{\theta_2}}) - \left(\mathcal{L}_{4,1}\left(\overrightarrow{\sigma_{\theta_0}\sigma_{\theta_2}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_0}^\bullet}\right)\right)^2} \bullet \left(\overrightarrow{\sigma_{\theta_0}\sigma_{\theta_2}} - \mathcal{L}_{4,1}\left(\overrightarrow{\sigma_{\theta_0}\sigma_{\theta_2}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_0}^\bullet}\right) \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_0}^\bullet}\right)$$

1. Nous n'avons pas besoin de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues et nous nous servons des propriétés classiques des cercles en utilisant les propriétés des médiatrices et des tangentes, formule (6.11).

où \bullet désigne la multiplication externe de $\overrightarrow{L}_{4,1}$. Nous pouvons vérifier simplement que le point Ω_θ est défini par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_{\theta_0} \Omega_\theta}, \overrightarrow{O_5 \bullet \sigma_{\theta_0}} \right) = 0 \\ \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{I_\theta \Omega_\theta}, \overrightarrow{\sigma_{\theta_0} \sigma_{\theta_2}} \right) = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

où I_θ est le milieu du segment $[\sigma_{\theta_0} \sigma_{\theta_2}]$. A partir de la conique Γ_θ , nous pouvons déterminer les paramètres de la cyclide de Dupin suivants :

$$(a, c, \mu) \simeq (4, 934; 1, 803; 2, 849)$$

ainsi que la matrice des transformations affines suivante, [Gar07] :

$$\begin{pmatrix} 0,059 & 0,039 & 0,998 & 0,698 \\ 0,379 & -0,925 & 0,013 & -0,301 \\ 0,923 & 0,377 & -0,069 & 0,471 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

qui permet de replacer la cyclide dans le repère initial.

La figure 6.26 montre la cyclide de Dupin solution.

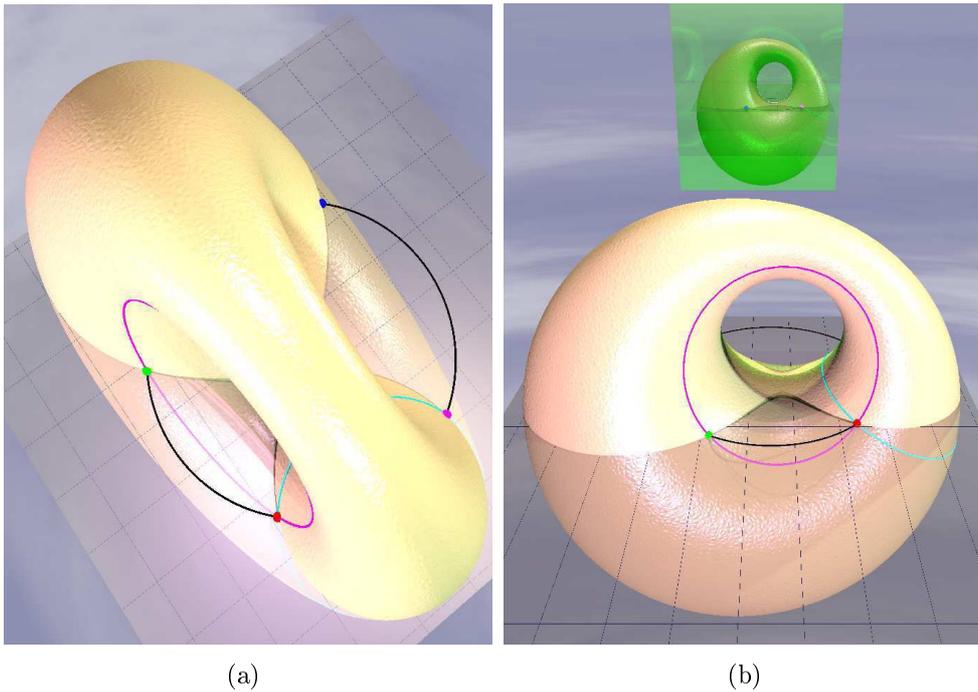


FIGURE 6.26 – Deux vues de la cyclide de Dupin permettant de construire le carreau à bords circulaires de sommets M_{00} , M_{01} , M_{11} et M_{10} . Le plan en verre contient les quatre sommets du carreau.

Le carreau, figure 6.27, est défini par les bornes $\theta_0 \simeq 2,521616545$, $\theta_1 \simeq 4,652818777$, $\psi_0 \simeq -0,9430762257$ et $\psi_1 \simeq 1,266085740$.

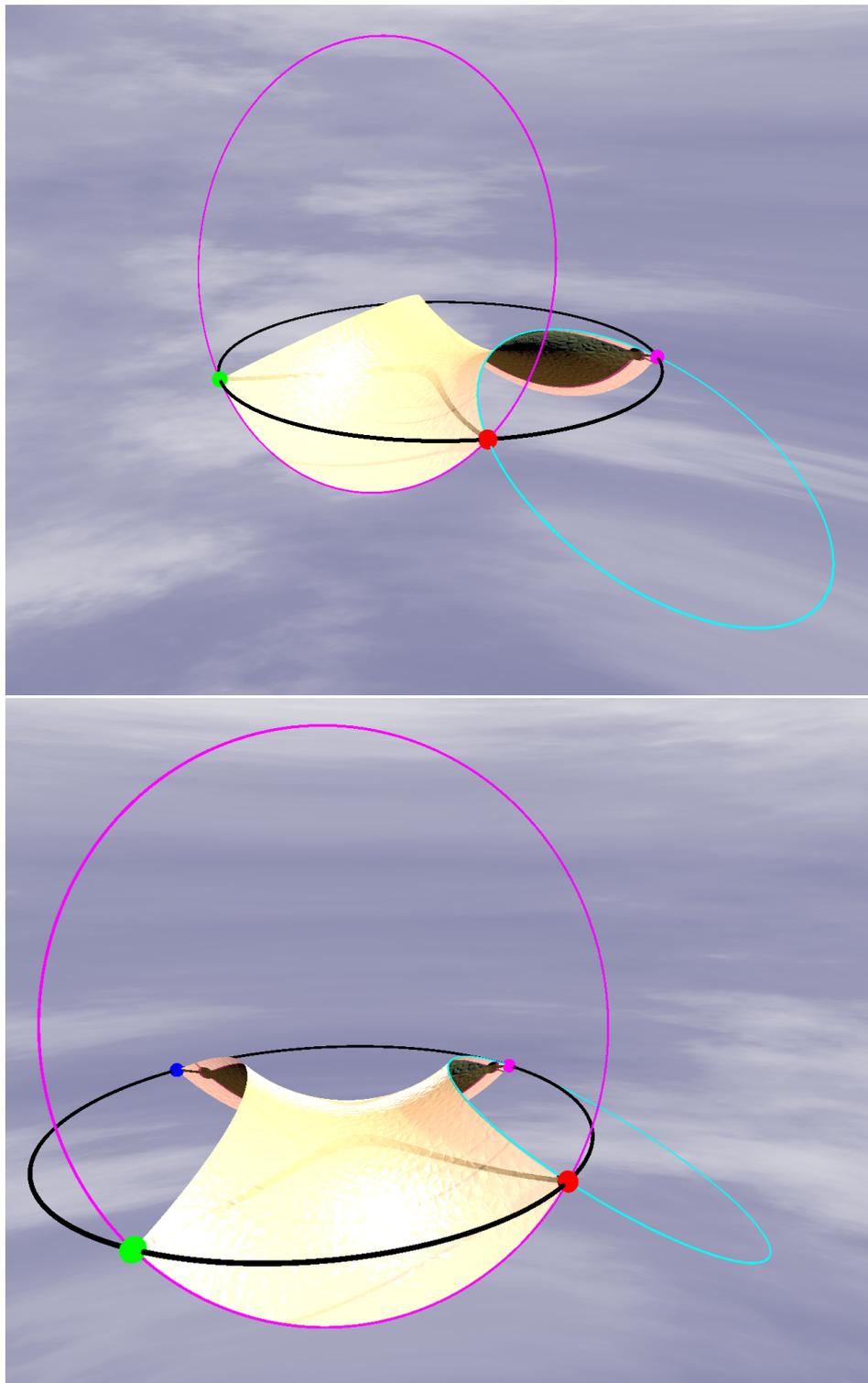


FIGURE 6.27 – Deux vues du carré de la cyclide de Dupin de la figure 6.26 obtenue en utilisant l’algorithme 13.

Chapitre 7

Jointures par des cyclides de Dupin le long d'autres courbes

En résolvant un problème dit des trois contacts, posé par M. Paluszny [Pal], qui consiste à trouver une cyclide tangente à trois plans en trois points donnés, nous avons découvert une famille de courbes que nous appelons courbes de contacts (puisque liées au problème des trois contacts) le long desquelles une famille à un paramètre de cyclides sont tangentes. Ainsi, nous pourrions, en plus des jointures le long de cercles caractéristiques, effectuer des jointures de type G^1 le long de ces courbes.

7.1 Problème des trois conditions de contact

Nous avons vu précédemment qu'un faisceau de sphères orientées tangentes en un point correspond à une droite lumière sur Λ^4 . En chaque point d'une cyclide de Dupin, il existe deux sphères particulières tangentes à la cyclide en ce point, une dans chacune des deux familles de sphères engendrant la cyclide. Ces sphères appartiennent donc à un faisceau de sphères tangentes. Chacune correspond à un point de l'une des deux coniques représentant la cyclide sur Λ^4 , nous pouvons donc relier ces deux points par une droite lumière représentant le faisceau de sphères tangentes au point considéré, figure 7.1.

La définition d'une condition de contact sous forme d'un couple plan-point orienté (Q, M) est un couple de données point-vecteur lumière (ρ, \vec{v}) (tables 4.2 et 4.3) qui engendre une droite lumière affine l sur la quadrique Λ^4 . Soient trois conditions de contact $(Q_i, M_i)_{i=1..3}$ correspondant à trois droites lumière l_i dans Λ^4 . Déterminer une cyclide satisfaisant les trois conditions de contact revient alors à déterminer deux 2-plans P_1 et P_2 de $L_{4,1}$, orthogonaux, coupant chacune des droites lumière l_i en un point. De plus, P_1 et P_2 sont tels que pour chaque point σ_1 de P_1 et chaque point σ_2 de P_2 , $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_1}, \overrightarrow{O_5\sigma_2}) = 1$, section 4.6, formule 4.14.

Considérons une cyclide dans l'espace des sphères définie par deux coniques Γ_1 et Γ_2 contenues dans deux 2-plans P_1 et P_2 . Considérons trois points ρ_1, ρ_2 et ρ_3 appartenant chacun à l'une des droites lumière l_1, l_2 et l_3 associées aux trois conditions de contact (Q_i, M_i) satisfaites par la cyclide. Supposons que la conique Γ_1 ne soit pas une parabole. Les projections orthogonales des droites l_i sur le plan P_1 passent par le centre Ω_1 de Γ_1 (le point Ω_1 est la projection orthogonale de O_5 sur P_1). Naturellement, il est possible d'invertir les rôles de P_1 et P_2 .

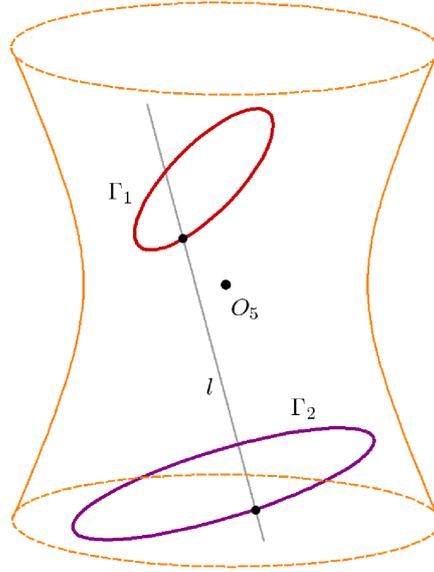


FIGURE 7.1 – La droite lumière qui représente un faisceau de sphères tangentes à une cyclide en un point.

Ainsi, nous avons une paramétrisation de la droite l_i :

$$\sigma_i(\lambda_i) \in l_i \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad | \quad \overrightarrow{O_5\sigma_i(\lambda_i)} = \overrightarrow{O_5\rho_i} + \lambda_i \overrightarrow{v_i}, \quad i \in \{1; 2; 3\} \quad (7.1)$$

Ces conditions se traduisent par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_1(\beta_1)}, \overrightarrow{\sigma_1(\alpha_1)\sigma_2(\alpha_2)} \right) = 0 \\ \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_1(\beta_1)}, \overrightarrow{\sigma_3(\alpha_3)\sigma_1(\alpha_1)} \right) = 0 \\ \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_2(\beta_2)}, \overrightarrow{\sigma_2(\alpha_2)\sigma_3(\alpha_3)} \right) = 0 \\ \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_2(\beta_2)}, \overrightarrow{\sigma_1(\alpha_1)\sigma_2(\alpha_2)} \right) = 0 \\ \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_3(\beta_3)}, \overrightarrow{\sigma_3(\alpha_3)\sigma_1(\alpha_1)} \right) = 0 \\ \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_3(\beta_3)}, \overrightarrow{\sigma_2(\alpha_2)\sigma_2(\alpha_3)} \right) = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

en considérant que les points $\sigma_i(\alpha_i)$ appartiennent au 2-plan P_1 et les points $\sigma_i(\beta_i)$ appartiennent au 2-plan P_2 .

On peut remarquer que chaque couple d'équations en β_i permet de poser la condition que le point $\sigma_i(\beta_i)$ se projette sur le centre de la conique Γ_1 contenu dans le plan P_1 en vérifiant l'orthogonalité du vecteur $\overrightarrow{O_5\sigma_1(\beta_1)}$ avec deux vecteurs du 2-plan P_1 . Nous ne choisissons pas les mêmes vecteurs formant une base de P_1 pour chaque couple d'équations en β_i pour simplifier les calculs.

Trois conditions de contact tangentes à une cyclide conduisent à un système de six équations à six inconnues de degré deux. Nous pourrions alors penser qu'elles ont un nombre fini éventuellement nul de solutions. Or, nous avons observé que, s'il existe une solution (i.e. une

cyclide satisfaisant les conditions de contact) alors il en existe une famille à un paramètre dans le cas général. Nous verrons, dans la section suivante, comment déterminer une condition nécessaire et suffisante d'existence. Nous supposons, pour le moment, être dans le cas favorable et donc que cette condition est satisfaite. Nous allons choisir les points et vecteurs directeurs des droites lumière de référence de manière à simplifier considérablement les calculs.

D'abord, sans perte de généralité, nous pouvons toujours multiplier chaque vecteur lumière \vec{v}_i de notre problème par un scalaire non nul afin d'obtenir de nouveaux vecteurs \vec{m}_i colinéaires aux premiers tels que :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\vec{m}_i, \vec{m}_j) = -1$$

pour des valeurs différentes de i et j . De plus, nous pouvons toujours modifier les paramétrisations des droites lumières l_i en partant d'un autre point σ_{ij} de la droite. Le point σ_{ij} correspond, dans \mathcal{E}_3 , à la sphère tangente au plan Q_i en M_i et passant par M_j . Nous avons alors, propriété 2 :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{ij}}, \vec{m}_j) = 0$$

Prenons par exemple les points σ_{ij} pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \equiv i[3] + 1$. Nous obtenons la nouvelle paramétrisation des droites lumières suivante :

$$\sigma_i(\lambda_i) \in l_i \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad | \quad \overrightarrow{O_5\sigma_i(\lambda_i)} = \overrightarrow{O_5\sigma_{ij}} + \lambda_i \vec{m}_i, \quad i \in \{1; 2; 3\} \quad (7.3)$$

Algorithme 14 Construction de cyclides tangentes en trois points à trois plans donnés

Entrée : Trois points M_1, M_2 et M_3 sur une cyclide de Dupin et trois plans Q_1, Q_2 et Q_3 de \mathcal{E}_3 tangents à la cyclide en ces points

1. Déterminer les trois points ρ_1, ρ_2 et ρ_3 de Λ^4 correspondant à Q_1, Q_2 et Q_3 ainsi que les trois vecteurs lumières \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 correspondant aux points M_1, M_2 et M_3 .
2. Calcul des vecteurs lumières $\vec{m}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ tels que $\mathcal{L}_{4,1}(\vec{m}_i, \vec{m}_j) = -1$ pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$.
3. Calcul des points σ_{ij} tels que $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{ij}}, \vec{m}_j) = 0$, pour $i \in \{1, 2, 3\}, j \equiv i[3] + 1$ et $i \neq j$.
4. Paramétrisation des droites lumière l_i en λ_i , formule (7.3).
5. Résolution du système (7.2) en fonction de l'un des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ noté ν .
6. Choix d'une valeur du paramètre ν et calcul des valeurs des α_i et β_i correspondantes.
7. Détermination des points $\sigma_i(\alpha_i)$ et $\sigma_i(\beta_i)$, des 2-plans P_1 et P_2 de $L_{4,1}$ et des coniques Γ_1 et Γ_2 correspondant à la cyclide.

Sortie : Les deux coniques de Λ^4 représentant la cyclide de Dupin.

En utilisant la résolution précédente du problème des trois conditions de contact, nous pouvons donner l'algorithme 14 qui prend en entrée les trois conditions de contact dans \mathcal{E}_3 , résout le problème dans $L_{4,1}$ et retourne une cyclide que nous vérifions être une solution. Nous supposons que nous sommes dans le cas général où les trois conditions de contact n'ont pas une disposition particulière (sur un cercle caractéristique d'une cyclide par exemple). Une fois le paramètre ν fixé (point 6 de l'algorithme 14), nous obtenons une cyclide satisfaisant les

conditions de contact. Nous avons remarqué qu'en faisant varier le paramètre ν , nous obtenons plusieurs cyclides tangentes le long des conditions de contact. Les figures 7.5 et 7.10 illustrent cette construction sur deux exemples distincts et il apparaît visuellement que les deux cyclides tangentes aux trois conditions de contact le sont aussi tout le long d'une courbe.

Notons que nous pouvons choisir le paramètre ν de façon à obtenir une cyclide régulière ou une cyclide singulière. En effet, la valeur de ν va déterminer le type de la droite $(O_5\Omega)$ où Ω est soit le centre de Γ_1 soit le centre de Γ_2 .

7.1.1 Les homographies pang, pong et ping

D'après l'observation précédente d'une famille à un paramètre de cyclides tri-tangentes, nous avons cherché la condition qui permet d'obtenir un tel résultat. Nous l'avons obtenue en utilisant des homographies d'une droite lumière projective sur une autre. Chaque droite lumière est définie par une condition de contact. Rappelons qu'une homographie est définie comme une application projective bijective d'un espace projectif dans un autre de même dimension. Considérons une homographie Φ d'une droite projective \widehat{l}_1 dans une autre \widehat{l}_2 :

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{l}_1 &\longrightarrow \widehat{l}_2 \\ x &\longrightarrow \Phi(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \end{aligned} \quad (7.4)$$

où a, b, c et d sont quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$. Cette homographie peut être représentée par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La condition $ad - bc \neq 0$ signifie que l'homographie Φ n'est pas constante. Une propriété des homographies nous intéressera plus loin : lorsqu'une homographie Φ , sans point fixe, est associée à une matrice dont la trace est nulle alors Φ est une involution différente de l'identité, [Rol04].

Nous allons considérer des homographies entre droites lumière projectives de $\widehat{L}_{4,1}$, fermeture projective de $L_{4,1}$.

Soient les trois droites lumières l_1 , l_2 et l_3 associées à trois conditions de contact dans Λ^4 . Comme nous considérons le cas général de disposition de ces trois contacts, nous supposons que l'hyperplan tangent à Λ^4 en tout point σ d'une droite lumière l_i ne contient pas les autres droites lumière. Nous considérons les droites projectives \widehat{l}_1 , \widehat{l}_2 et \widehat{l}_3 . Soit les applications pang, pong et ping suivantes :

$$\begin{aligned} pang : \widehat{l}_1 &\longrightarrow \widehat{l}_2 \\ \sigma &\longrightarrow \{pang(\sigma)\} = T_\sigma\Lambda^4 \cap \widehat{l}_2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} pong : \widehat{l}_2 &\longrightarrow \widehat{l}_3 \\ \sigma &\longrightarrow \{pong(\sigma)\} = T_\sigma\Lambda^4 \cap \widehat{l}_3 \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} ping : \widehat{l}_3 &\longrightarrow \widehat{l}_1 \\ \sigma &\longrightarrow \{ping(\sigma)\} = T_\sigma\Lambda^4 \cap \widehat{l}_1 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Proposition 1 *Les applications pang, pong et ping sont des homographies.*

Démonstration 7 *Deux droites lumière disjointes l_1 et l_2 de Λ^4 , non parallèles, engendrent un espace de dimension 3, notons le Q . L'espace Q est de type temps par construction. L'intersection Q avec Λ^4 est une quadrique de dimension 2 notée Λ_Q . L'hyperplan tangent $T_{\sigma_1}\Lambda^4$ en un point σ_1 de la droite lumière l_1 à Λ^4 coupe Q en un plan tangent à Λ_Q en σ_1 , $T_{\sigma_1}\Lambda_Q$. Le plan $T_{\sigma_1}\Lambda_Q$ coupe Λ_Q en deux droites dont l'une est l_1 . Notons l'autre $l'_1(\sigma_1)$. Considérons $\widehat{L}_{4,1}$, \widehat{Q} et $\widehat{\Lambda}^4$, puis prenons le point σ_1 sur la droite projective \widehat{l}_1 . L'intersection de $\widehat{\Lambda}_{\widehat{Q}} = \widehat{\Lambda}^4 \cap \widehat{Q}$ avec $T_{\sigma_1}\widehat{\Lambda}_{\widehat{Q}}$ a deux droites projectives \widehat{l}_1 et $\widehat{l}'_1(\sigma_1)$. La droite $\widehat{l}'_1(\sigma_1)$ coupe \widehat{l}_2 en $\text{pang}(\sigma_1)$. Pour chacun des points σ_1 de \widehat{l}_1 , la droite $\widehat{l}'_1(\sigma_1)$ est l'une des droites du faisceau engendrant la quadrique $\widehat{\Lambda}_Q$ et coupe \widehat{l}_2 en un nouveau point. L'application projective pang est donc bijective. Les démonstrations concernant les applications pong et ping sont analogues, il suffit d'échanger les rôles des droites lumière.*

□

7.1.2 L'application ping \circ pong \circ pang

Nous allons considérer l'application ping \circ pong \circ pang. Nous allons calculer explicitement les intersections $T_{\sigma_i}\Lambda^4 \cap \widehat{l}_i$. Nous avons donc besoin, pour cela, de paramétrer les droites \widehat{l}_i , comme dans le paragraphe précédent :

$$\sigma_i(k_i) \in \widehat{l}_i, \quad i \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{si } \sigma_i(k_i) \in \widehat{l}_i - l_i \quad \exists \quad k_i \in \mathbb{R} \quad | \quad \overrightarrow{O_5\sigma_i(k_i)} = \overrightarrow{O_5\sigma_{ij}} + k_i\overrightarrow{m_i} \\ \text{sinon } \sigma_i(k_i) = \overrightarrow{m_i} \end{array}$$

Nous prenons toujours les vecteurs $\overrightarrow{m_i}$ tels que :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{m_i}, \overrightarrow{m_j}) = -1 \quad (7.8)$$

pour $i \neq j$ et nous choisissons, pour simplifier les calculs, les points σ_{ij} correspondant aux sphères tangentes aux contacts (Q_i, M_i) et passant par le point M_j .

Le point $\text{pang}(\sigma_1)$ tel que $\overrightarrow{O_5\text{pang}(\sigma_1)} = \overrightarrow{O_5\sigma_{23}} + k_2\overrightarrow{m_2}$ appartient à l'hyperplan $T_{\sigma_1}\Lambda^4$ défini par :

$$T_{\sigma_1}\Lambda^4 = \{M \in L_{4,1}, \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_1}, \overrightarrow{O_5M}) = 1\}$$

Nous avons alors :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{12}} + k_1\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{O_5\sigma_{23}} + k_2\overrightarrow{m_2}) = 1$$

soit, pour k_1 non nul :

$$k_2 = \frac{-1 + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{23}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{12}}) + k_1\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{23}}, \overrightarrow{m_1})}{k_1} \quad (7.9)$$

De la même manière, nous pouvons déduire les valeurs suivantes des paramètres k_3 et k_1 définissant les points $\text{pong}(\sigma_2)$ et $\text{ping}(\sigma_3)$:

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{-1 + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{31}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{23}}) + k_2\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{31}}, \overrightarrow{m_2})}{k_2} \\ k_1 &= \frac{-1 + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{12}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{31}}) + k_3\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{12}}, \overrightarrow{m_3})}{k_3}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Pour plus de clarté dans le reste des calculs, nous introduisons les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{12}}, \overrightarrow{m_3}) \\ \alpha_2 = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{23}}, \overrightarrow{m_1}) \\ \alpha_3 = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{31}}, \overrightarrow{m_2}) \\ \beta_1 = -1 + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{23}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{12}}) \\ \beta_2 = -1 + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{31}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{23}}) \\ \beta_3 = -1 + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma_{12}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{31}}) \end{array} \right. \quad (7.11)$$

Nous pouvons maintenant écrire simplement les matrices correspondantes aux homographies *ping*, *pong* et *pang* :

$$\mathcal{M}_{pang} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_{pong} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_{ping} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

L'application $ping \circ pong \circ pang$ est une homographie de \widehat{l}_1 dans \widehat{l}_1 . Si nous partons de trois conditions de contact sur une cyclide de Dupin alors cette application doit envoyer le point de \widehat{l}_1 correspondant à une sphère tangente en M_1 de la première famille enveloppant la cyclide sur le point de \widehat{l}_1 correspondant à la sphère tangente à M_1 de l'autre famille engendrant la cyclide et inversement. L'application doit donc échanger les points σ_1 et $ping \circ pong \circ pang(\sigma_1)$ appartenant chacun à \widehat{l}_1 et à l'une des coniques représentant la cyclide dans Λ^4 . Ceci revient à dire que l'application $ping \circ pong \circ pang$ doit être une involution (différente de l'identité).

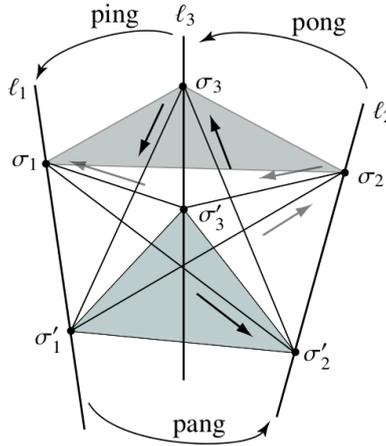


FIGURE 7.2 – Illustration de l'application $ping \circ pong \circ pang$

La trace du produit des trois matrices associées à l'application $ping \circ pong \circ pang$ est :

$$\mathcal{A} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_3\alpha_2 + \beta_2\alpha_1 + \beta_1\alpha_3 \quad (7.13)$$

Nous avons vu précédemment qu'elle doit être nulle pour que l'application $ping \circ pong \circ pang$ soit une involution. Nous obtenons donc la condition suivante pour qu'il existe une cyclide tangente aux trois conditions de contact (Q_i, M_i) :

$$\mathcal{A} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_3\alpha_2 + \beta_2\alpha_1 + \beta_1\alpha_3 = 0 \quad (7.14)$$

En combinant plusieurs fois les applications $pang$, $pong$ et $ping$, nous obtenons les six points $\sigma_1, \sigma'_2 = pang(\sigma_1), \sigma_3 = pong(\sigma'_2), \sigma'_1 = ping(\sigma_3), \sigma_2 = pang(\sigma'_1)$ et $\sigma'_3 = pong(\sigma_2)$, figure 7.2. Lorsque la composition $ping \circ pong \circ pang$ de ces applications est une involution (nous avons $\sigma_1 = ping(\sigma'_3)$), les points σ_1, σ_2 et σ_3 d'une part et σ'_1, σ'_2 et σ'_3 d'autre part, appartiennent à une conique correspondant à la cyclide tangente au trois contacts. Celles-ci sont déterminées par la section de Λ^4 par les deux 2-plans $Aff(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et $Aff(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$. A chaque point σ_1 de \widehat{l}_1 , nous pouvons réitérer le processus. Nous avons une famille à un paramètre de cyclides tangentes satisfaisant les trois conditions de contact. Ceci prouve le théorème suivant :

Theorem 7.1.2.1 *Soient trois conditions de contact associées à trois droites lumière disjointes et non parallèles dans Λ^4 . Il existe une famille à un paramètre de cyclides tangentes aux trois contacts si et seulement si l'application $ping \circ pong \circ pang$ est une involution, autrement dit, si et seulement si $\mathcal{A} = 0$.*

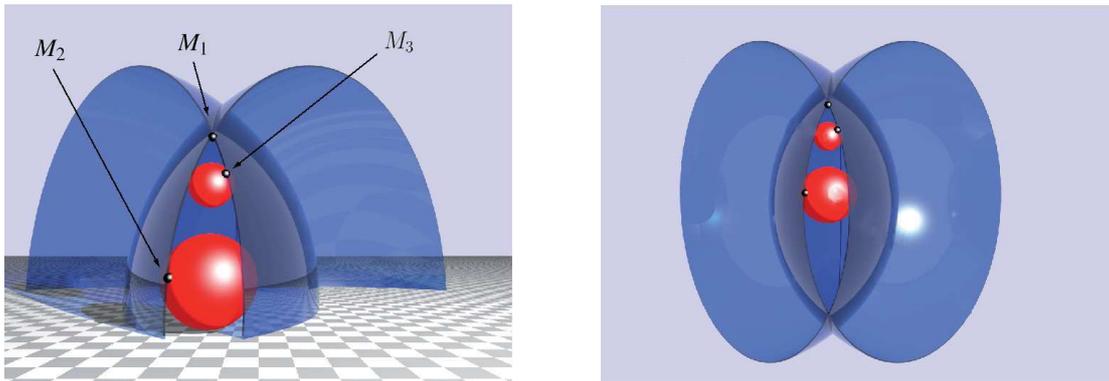


FIGURE 7.3 – Une cyclide ayant deux points singuliers, tangente aux deux points de contact M_2 et M_3 aux sphères rouges et ayant M_1 comme point singulier.

Nous pouvons remarquer que dans la famille à un paramètre de cyclides satisfaisant les conditions de contact, nous retrouvons les différents types de cyclides. En prenant par exemple, le point à l'infini sur la droite lumière \widehat{l}_1 , nous obtenons une cyclide qui a pour point singulier le point de contact M_1 , figure 7.3. Bien sur, le plan tangent en ce point n'est pas défini mais nous pouvons supposer que tous les plans tangents au cône, lui même tangent à la cyclide au point singulier M_1 , sont des plans de contact. Ainsi, nous acceptons la cyclide de point singulier M_1 comme solution. Notons que nous ne pouvons pas dire si cette cyclide a un point ou deux points singuliers. Seuls les types des 2-plans $Aff(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et $Aff(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ peuvent nous renseigner sur ce point.

7.2 La courbe de contact

Nous avons montré qu'il existe une famille à un paramètre de cyclides de Dupin tangentes en trois points de contact à trois plans si la condition $\mathcal{A} = 0$ est satisfaite mais nous n'avons pas encore montré l'existence de toute une courbe de contact. Il existe une autre homographie définie par nos trois contacts. Cette homographie, unique, est définie entre les deux coniques Γ et Γ' correspondantes à une cyclide solution. Les points σ'_i sont les images des points σ_i par cette homographie. Ainsi, chaque point σ de la première conique a pour image un point σ' de la seconde. Les droites lumière joignant ainsi chaque point de Γ à un point de Γ' correspondent à des points de la cyclide et l'ensemble forme finalement une courbe fermée sur cette cyclide. Cette construction ne dépend que des droites lumière l_1 , l_2 et l_3 correspondant aux points de contact, la courbe est identique pour toutes les cyclides tangentes aux trois contacts. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3 *Trois conditions de contact génériques sur une cyclide de Dupin définissent une homographie entre les deux coniques représentant la cyclide dans l'espace des sphères. Cette homographie permet de tracer une courbe de contact sur la cyclide le long de laquelle les cyclides solutions du problème des trois contacts sont tangentes.*

Démonstration 8

La démonstration consiste à considérer le complété projectif de l'espace $L_{4,1}$ en ajoutant l'hyperplan à l'infini, noté $\widehat{L}_{4,2}$ et donc à ramener notre problème à un problème linéaire dans \mathbb{R}^6 .

Nous munissons l'espace $\widehat{L}_{4,2}$ de la forme $\widehat{\mathcal{Q}}_{4,2}$ telle que pour $\vec{u}(x_{-1}, x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$:

$$\widehat{\mathcal{Q}}_{4,2}(\vec{u}) = -x_{-1}^2 - x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Remarquons que les composantes du vecteur \vec{u} sont les coordonnées homogènes du point $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $L_{4,1}$.

Soit $O_6(0; 0; 0; 0; 0; 0)$ dans $\widehat{L}_{4,2}$. Nous identifions l'espace $L_{4,1}$ avec l'hyperplan \widehat{H} de $\widehat{L}_{4,2}$ d'équation $\{x_{-1} = 1\}$. La quadrique Λ^4 est contenue dans le cône de lumière \widehat{C}_l de $\widehat{L}_{4,2}$.

Considérons une cyclide de Dupin $Cycl$ satisfaisant les 3 conditions de contact associées à 3 droites lumières l_1 , l_2 et l_3 . Elle est représentée dans Λ^4 par deux coniques Γ et Γ' contenues dans deux 2-plans P et P' . Considérons maintenant les espaces de dimension 3 dans $\widehat{L}_{4,2}$, $\widehat{P} = \text{Aff}(O_6, P)$ et $\widehat{P}' = \text{Aff}(O_6, P')$ alors $P = \widehat{P} \cap \widehat{H}$ et $P' = \widehat{P}' \cap \widehat{H}$. Les espaces \widehat{P} et \widehat{P}' sont orthogonaux. En effet, soit $X \in \widehat{P} \cap \widehat{H}$ et $Y \in \widehat{P}' \cap \widehat{H}$. Tout vecteur de \widehat{P} s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{O_6 X}$ et des vecteurs qui engendrent \widehat{P} et tout vecteur de \widehat{P}' s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{O_6 Y}$ et des vecteurs qui engendrent \widehat{P}' . Comme les plans P et P' sont orthogonaux, la valeur de la forme $\widehat{\mathcal{L}}_{4,2}$ associée à $\widehat{\mathcal{Q}}_{4,2}$ entre un vecteur de \widehat{P} et un vecteur de \widehat{P}' est égale à $\widehat{\mathcal{L}}_{4,2}(\overrightarrow{O_6 X}, \overrightarrow{O_6 Y})$. Comme pour $x \in P$ et $y \in P'$ nous avons $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 x}, \overrightarrow{O_5 y}) = 1$, nous déduisons que $\widehat{\mathcal{L}}_{4,2}(\overrightarrow{O_6 X}, \overrightarrow{O_6 Y}) = 0$.

L'homographie permettant de tracer la courbe de contact sur $Cycl$ est noté Φ et envoie un point σ de P sur un point σ' de P' . Comme Φ est une homographie de $L_{4,1}$, elle est représentée

dans $\widehat{L}_{4,2}$ par une application linéaire F qui envoie un point X de \widehat{P} sur un point de \widehat{P}' .

Soit une droite lumière $l_\tau = (\tau \Phi(\tau))$, où $\tau \in \Gamma$, associée à un point de la courbe de contact de $Cycl$.

Soit P_λ un plan contenant une courbe Γ_λ représentant une famille de sphères d'une cyclide $Cycl_\lambda$ satisfaisant les 3 conditions de contact. Pour que la courbe de contact de $Cycl$ soit une courbe de tangence entre $Cycl$ et $Cycl_\lambda$, il faut d'abord montrer que la droite l_τ coupe le plan P_λ .

Soit le point σ_λ de l_1 tel que $P_\lambda = Aff(\sigma_\lambda, pong \circ pang(\sigma_\lambda), ping \circ pong \circ pang \circ ping(\sigma_\lambda))$. Le point σ_λ peut s'écrire comme combinaison linéaire de σ_1 et σ'_1 où $\sigma_1 = P \cap l_1$ et $\sigma'_1 = P' \cap l_1$:

$$\sigma_\lambda = \lambda\sigma_1 + (1 - \lambda)\sigma'_1$$

Ainsi, dans $\widehat{L}_{4,2}$, un point de \widehat{P}_λ peut s'écrire comme combinaison linéaire d'un point X de \widehat{P} et d'un point $F(X)$ de \widehat{P}' :

$$\widehat{P}_\lambda = \{\lambda X + (1 - \lambda)F(X), X \in \widehat{P}\}$$

et on a $P_\lambda = \widehat{P}_\lambda \cap \widehat{H}$.

Soit un point X_τ de \widehat{P} tel que $\tau = (O_6 X_\tau) \cap \widehat{H}$ alors $X_{\tau,\lambda} = \lambda X_\tau + (1 - \lambda)F(X_\tau)$ appartient à \widehat{P}_λ . La droite $(O_6 X_{\tau,\lambda})$ coupe \widehat{H} en un point τ_λ de P_λ et le point τ_λ appartient à la droite $(\tau, \Phi(\tau))$ dans \widehat{H} , figure 7.4. Ceci revient à dire que la droite l_τ coupe le plan P_λ en un point τ_λ dans $L_{4,1}$.

De plus, comme l_τ est sur la quadrique Λ^4 alors τ_λ appartient à Γ_λ . Nous pouvons dire alors que, dans \mathcal{E}_3 , le point correspondant à la droite lumière l_τ appartient à la sphère correspondante à τ_λ et que cette sphère appartient à une famille de sphères dont la cyclide $Cycl_\lambda$ est l'enveloppe.

Il reste à montrer que ce point est sur la cyclide $Cycl_\lambda$. Pour cela, considérons la seconde famille de sphères dont la cyclide $Cycl_\lambda$ est l'enveloppe. Notons la courbe correspondante Γ'_λ dans $L_{4,1}$ et P'_λ le plan contenant cette courbe. Comme la démonstration précédente ne dépend pas du plan P_λ alors la droite l_τ coupe aussi le plan P'_λ en un point τ'_λ de Γ'_λ . Le point τ'_λ correspond à une sphère de la seconde famille de la cyclide $Cycl_\lambda$, tangente à la sphère correspondant à τ_λ au point correspondant à l_τ . Comme les sphères de chacune des deux familles à un paramètre de sphères qui enveloppent une cyclide sont tangentes aux points de la cyclide, cela prouve que le point correspondant à la droite lumière l_τ est aussi un point de la cyclide $Cycl_\lambda$.

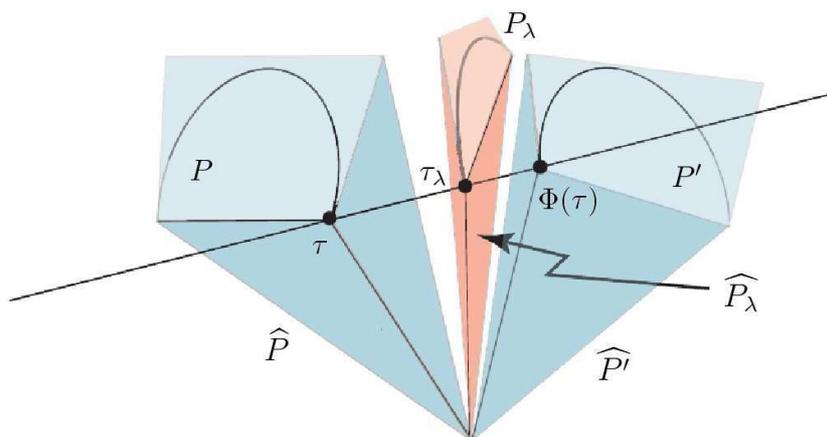


FIGURE 7.4 – Les espaces \widehat{P} , \widehat{P}' et \widehat{P}_λ .

□

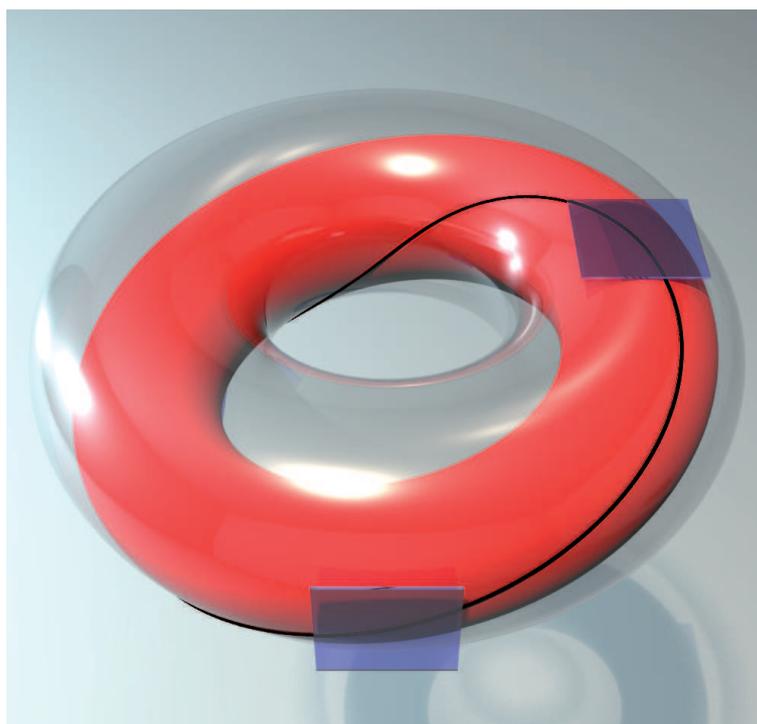


FIGURE 7.5 – Une cyclide et un tore tangents le long d'une courbe de contact définie par trois conditions de contact.

7.3 Algorithmes

7.3.1 Détermination d'une famille de Cyclides de Dupin tri-tangentes

Nous donnons maintenant les algorithmes permettant d'obtenir plusieurs cyclides tri-tangentes ainsi que la courbe de contact sur une cyclide à partir de trois contacts. Nous allons utiliser les formules (7.9) et (7.10). Notons que le choix des points σ_{ij} , comme origine de la paramétrisation des droites lumière l_i , a été effectué pour simplifier les calculs des démonstrations. Il n'est pas nécessaire dans les algorithmes de faire ce choix ou d'imposer la condition $\mathcal{L}(\vec{m}_i, \vec{m}_j) = -1$, formule (7.8).

Soit l_i une droite lumière de Λ^4 paramétrée en t , telle que : $\sigma \in l_i, \overrightarrow{O_5\sigma} = \overrightarrow{O_5\rho_i} + t\vec{m}_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Nous supposons ces droites disjointes. A partir de la relation $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\rho_1} + a_1\vec{m}_1, \overrightarrow{O_5\rho_2} + b_2\vec{m}_2) = 1$, nous avons la propriété suivante :

Le point $l_2(b_2)$ appartient à l'hyperplan tangent $T_{l_1(a_1)}\Lambda^4$ si $b_2 = f(\rho_1, m_1, \rho_2, m_2, a_1)$ où f est définie par :

$$f : \Lambda^4 \times \Pi \times \Lambda^4 \times \Pi \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\rho_1, m_1, \rho_2, m_2, a_1) \longmapsto \frac{1 - \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\rho_1}, \overrightarrow{O_5\rho_2}) - a_1\mathcal{L}_{4,1}(\vec{m}_1, \overrightarrow{O_5\rho_2})}{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\rho_1}, \vec{m}_2) + a_1\mathcal{L}_{4,1}(\vec{m}_1, \vec{m}_2)}. \quad (7.15)$$

Les points m_i sont les points du parabolöide Π appartenant aux droites $(O_5\vec{m}_i)$.

Dans ce dernier paragraphe, nous expliquons comment obtenir une cyclide satisfaisant les trois conditions de contact s'il en existe. Notons que la condition $a_0 = a_1$ dans l'algorithme 15, est équivalente à la condition $\mathcal{A} = 0$ ce qui revient à vérifier que l'application $ping \circ pong \circ pang$ est une involution. De plus, si nous supprimons l'étape 3, où nous choisissons une cyclide solution particulière des trois contacts, nous obtenons une famille à un paramètre de cyclides. Enfin, notons que la droite orthogonale aux deux 2-plans $Aff(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et $Aff(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$, que nous avons notée δ auparavant, permet de déterminer le type de la cyclide solution. Rappelons que si δ est de type temps alors la cyclide n'aura pas de point singulier, si elle est de type lumière, la cyclide aura un seul point singulier et si elle est de type espace, la cyclide aura deux points singuliers.

La figure 7.6 illustre un cas favorable de conditions de contact : elles sont prises sur une cyclide initiale, il existe donc une famille à un paramètre de cyclides solution du problème des trois contacts.

Les figures 7.7 et 7.8 montrent chacune deux exemples de cyclides de Dupin obtenues avec l'algorithme 15. Les paramètres de ces dernières sont donnés dans la table 7.2 ainsi que les transformations à effectuer pour replacer les cyclides dans le repère initial.

Remarque 4 *Nous avons considéré ici trois conditions de contact c'est-à-dire trois points et trois plans orientés sur une cyclide initiale (pour satisfaire la condition $\mathcal{A} = 0$). Si nous considérons les même points mais nous changeons une orientation de l'un des plans alors nous pouvons obtenir une autre famille de cyclides tangentes à la première en ces trois points (ce n'est pas toujours le cas). S'il existait une courbe de contact sur la première famille, cette fois la seconde famille est tangente aux cyclides de la première uniquement en ces trois points*

Algorithme 15 Détermination d'une cyclide satisfaisant trois conditions de contact s'il en existe.

Entrée : Trois conditions de contact orientées $(Q_i; M_i)_{i \in [1;3]}$

1. Pour i de 1 à 3 faire calcul de \vec{m}_i , direction lumière correspondant au point M_i fin faire.
2. Pour i de 1 à 3 faire calcul de ρ_i correspondant aux plans Q_i dans Λ^4 fin faire.
3. Choix d'un réel a_1 .
4. Calcul de $b_2 = f(\rho_1, m_1, \rho_2, m_2, a_1)$, formule (7.15).
5. Calcul de $a_3 = f(\rho_2, m_2, \rho_3, m_3, b_2)$.
6. Calcul de $b_1 = f(\rho_3, m_3, \rho_1, m_1, a_3)$.
7. Calcul de $a_2 = f(\rho_1, m_1, \rho_2, m_2, b_1)$.
8. Calcul de $b_3 = f(\rho_2, m_2, \rho_3, m_3, a_2)$.
9. Calcul de $a_0 = f(\rho_3, m_3, \rho_1, m_1, b_3)$.
10. Si $a_0 == a_1$
 - Pour i de 1 à 3 faire
 - Calcul de σ_i tel que $\vec{O_5\sigma_i} = \vec{O_5\rho_i} + a_i \vec{m}_i$.
 - Calcul de σ'_i tel que $\vec{O_5\sigma'_i} = \vec{O_5\rho_i} + b_i \vec{m}_i$.
 - retourner Deux triplets de points, l'un $(\sigma_i)_{i \in [1;3]}$ et l'autre $(\sigma'_i)_{i \in [1;3]}$ déterminant les deux coniques représentant une cyclide solution du problème des trois contacts.
 - fin faire
- sinon retourner l'ensemble vide.

Sortie : Une cyclide de Dupin ou l'ensemble vide.

Indices	Points M_i	Vecteurs orientés \vec{n}_i définissant les plans Q_i
$i = 1$	(7, 488; 6, 928; 2, 044)	(-0, 2; 0; -0, 980)
$i = 2$	(-9, 551; 6, 041; 5, 028)	(0, 171; -0, 218; -0, 961)
$i = 3$	(0, 700; -12, 223; 2, 425)	(-0, 2; 0, 693; -0, 693)

TABLE 7.1 – Valeurs des coordonnées des points M_i et des composantes des vecteurs orientés \vec{n}_i définissant les plans Q_i de la figure 7.6. Les plans Q_i admettent les vecteurs \vec{n}_i comme vecteurs normaux et passent par les points M_i .

mais elles sont tangentes entre elles le long d'une seconde courbe de contact. Nous donnons dans la section suivante un algorithme permettant d'obtenir une cyclide tangente à une autre uniquement en trois points. Nous terminerons ce chapitre en donnant l'algorithme permettant d'afficher la courbe de contact associée à trois conditions de contact sur une cyclide.

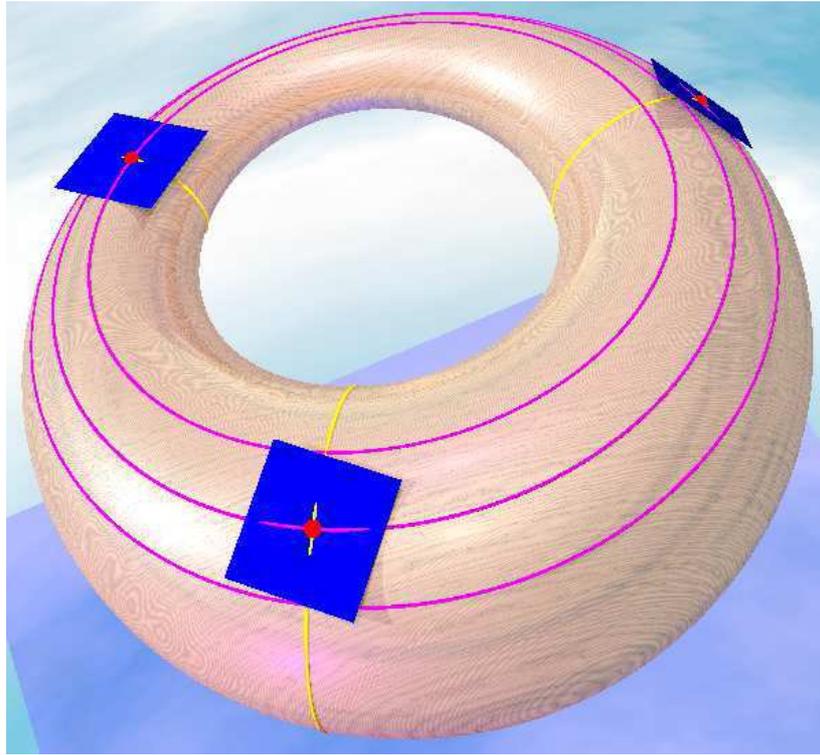


FIGURE 7.6 – Initialisation du problème : trois conditions de contact sur une cyclide, table 7.1.

7.3.2 Détermination d'une deuxième famille de cyclides de Dupin tri-tangentes

Les conditions de contact peuvent être données par des couples de type (plan, point) mais aussi par des couples de type (sphère, point). Ici, nous considérons un point M d'une cyclide de Dupin, notée $Cycl$, comme un point d'un cercle caractéristique de la cyclide et donc d'une sphère S tangente à la cyclide le long du cercle caractéristique. Soient les conditions de contact (S_i, M_i) sur cette cyclide initiale. En général, changer l'orientation de l'une des sphères S_i ne permet pas d'obtenir un problème de trois contacts qui a des solutions, mais nous pouvons déterminer le point M_3 sur le cercle caractéristique de la sphère S_3 tel qu'il y ait des solutions, une fois les contacts (S_1, M_1) et (S_2, M_2) fixés. Ceci permet ensuite d'obtenir une seconde famille à un paramètre de cyclides tangentes à la cyclide initiale aux trois points M_i et uniquement en ces points, algorithme 16.

La figure 7.9 montre deux cyclides tangentes en trois points uniquement. La cyclide en verre est la même que celle de la figure 7.6. Ses paramètres sont $a = 10, c = 2$ et $\mu = 3, 5$. Nous considérons, dans cet exemple la famille de sphères centrées sur l'ellipse génératrice de la cyclide. Les coordonnées des points, des centres des sphères et la valeur des rayons des sphères sont donnés dans la table 7.3.

Les paramètres de la seconde cyclide sont

$$(a, c, \mu) \simeq (12, 162; 1, 300; 1, 605)$$

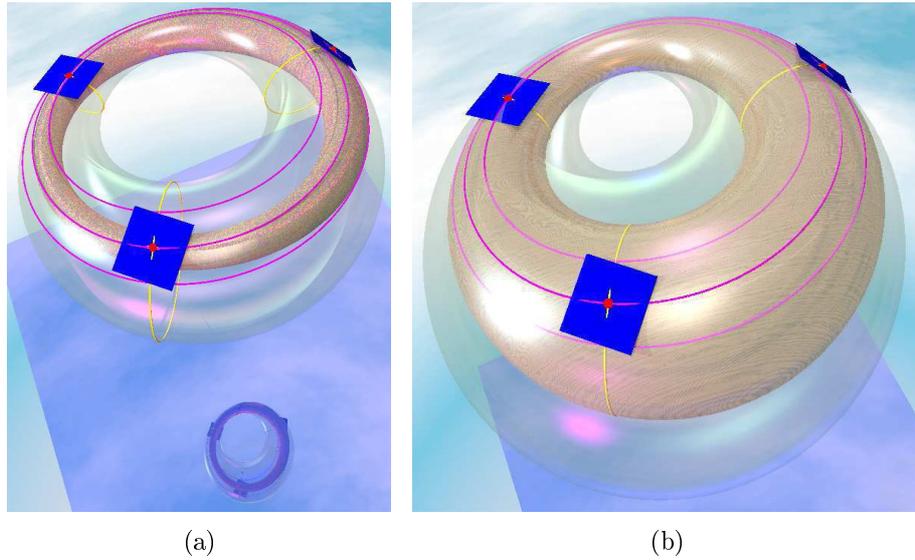


FIGURE 7.7 – Deux cyclides de Dupin en anneau, solutions du problème des trois contacts à partir de la cyclide initiale de la figure 7.6. (a) La cyclide initiale est représentée en verre. (b) La cyclide initiale est représentée couleur bois.

La matrice de la transformation affine permettant de la placer dans le repère de la scène est :

$$\begin{pmatrix} -0,723 & -0,688 & 0,065 & -0,330 \\ 0,690 & -0,724 & 0,010 & -1,998 \\ 0,040 & 0,052 & 0,998 & 4,214 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3.3 Détermination de la courbe de contact

L'algorithme 17 permet de dessiner la courbe de contact associée à trois conditions de contact lorsque la condition d'existence est satisfaite. Il fait appel à l'homographie définie d'un plan contenant une conique correspondante à une cyclide solution sur le plan contenant l'autre conique. Ces plans sont de type espace car nous considérons une cyclide de Dupin en anneau de la famille de cyclides tri-tangentes. Nous identifions chacun de ces plans au plan complexe. Par définition, une homographie conserve le birapport de quatre points. Pour déterminer cette homographie qui envoie une conique sur l'autre (cercles Lorentz), nous imposons que les birapports de quatre points de chacune des coniques soient égaux. Notons que nous en connaissons déjà trois (sur chacune des coniques) provenant des trois droites lumières l_i . De plus, ces birapports sont réels puisque les quatre points considérés à chaque fois appartiennent à un cercle pour la forme de Lorentz. Les figures 7.10 et 7.11 montrent la courbe de tangence sur deux cyclides en anneau. Sur la figure 7.10, la courbe est obtenue en épaississant l'intersection entre une cyclide tangente à la cyclide initiale le long de la courbe de contact alors que sur la figure 7.11, la courbe de contact est obtenue avec l'algorithme 17.

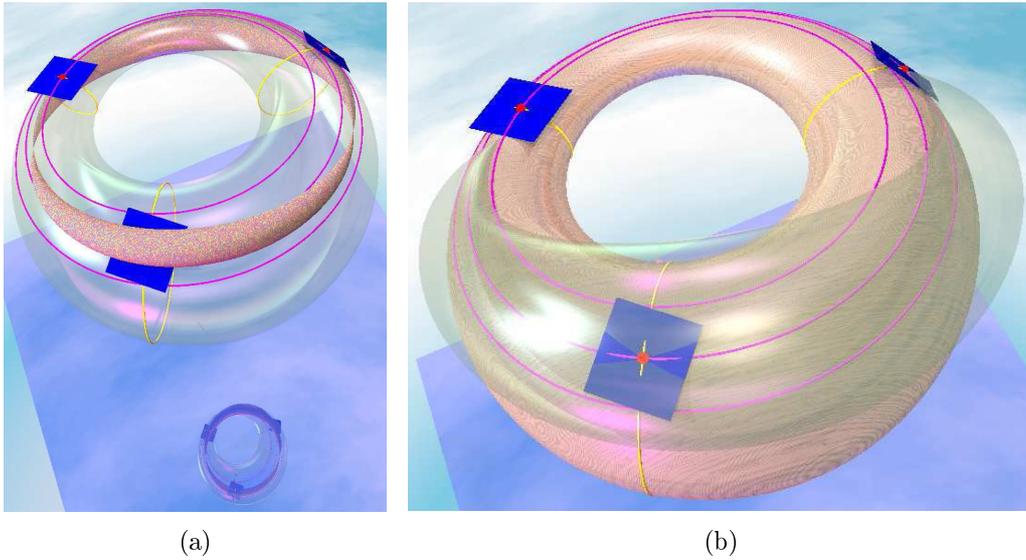


FIGURE 7.8 – Deux cyclides de Dupin avec deux points singuliers, solutions du problème des trois contacts à partir de la cyclide initiale de la figure 7.6. (a) La cyclide initiale est représentée en verre. (b) La cyclide initiale est représentée en bois.

Remarque 5 *Nous pouvons noter que lorsque les points ont une disposition particulière sur la cyclide initiale, par exemple, plusieurs points sont sur un même cercle caractéristique, les droites lumière correspondantes dans Λ^4 se coupent en un point correspondant à la sphère portant le cercle caractéristique. Ainsi l'une des applications ping ou pong ou pang a un point fixe. Il existe, dans ce cas, une famille qui a, au plus, trois paramètres de solutions. Nous retrouvons, par exemple, la famille à trois paramètres de cyclides tangentes le long d'un cercle caractéristique lorsque les trois conditions de contact sont sur ce cercle.*

Un dernier point est à souligner. Il existe d'autres cercles sur une cyclide de Dupin en anneau, images des cercles de Villarceau du tore à collier par les inversions transformant le tore à collier en cyclide de Dupin en anneau, [BGL01, Gar07, Gar08], figures 7.12(a) et 7.12(b). Nous appellerons aussi ces derniers cercles de Villarceau sur la cyclide en anneau. Lorsque les trois conditions de contact de la cyclide initiale sont sur un cercle de Villarceau alors la courbe de contact obtenue est ce même cercle de Villarceau. Ces cercles ne sont pas des cas particuliers de courbes de contact : nous avons une famille à un paramètre de cyclide tangentes le long des cercles de Villarceau. La figure 7.13 montre deux cyclides de Dupin en anneau (dont un tore de révolution à collier) tangents le long d'un cercle de Villarceau.

Figure	(a, c, μ)	Matrice de transformation	Vecteur de translation
7.7(a)	(10, 817; 0, 401; 1, 316)	$\begin{pmatrix} -0,254 & -0,949 & 0,188 \\ 0,962 & -0,269 & -0,055 \\ 0,103 & 0,167 & 0,981 \end{pmatrix}$	(-0, 697; -0, 303; 2, 048)
7.7(b)	(9, 658; 4, 125; 5, 735)	$\begin{pmatrix} 0,965 & -0,160 & 0,208 \\ 0,142 & -0,985 & -0,098 \\ 0,221 & 0,065 & -0,973 \end{pmatrix}$	(0, 714; 0, 310; -2, 096)
7.8(a)	(11, 365; 1, 279; 0, 230)	$\begin{pmatrix} -0,876 & -0,400 & 0,269 \\ 0,396 & -0,915 & -0,073 \\ 0,275 & 0,043 & 0,960 \end{pmatrix}$	(-1, 044; -0, 453; 3, 066)
7.8(b)	(12, 1812; 2, 623; 1, 1661)	$\begin{pmatrix} 0,901 & -0,245 & -0,360 \\ -0,229 & -0,960 & 0,087 \\ -0,370 & 0,003 & -0,929 \end{pmatrix}$	(-1, 490; -0, 646; 4, 374)

TABLE 7.2 – Paramètres des cyclides de Dupin déterminées par l’algorithme 15 à partir de trois contacts de la cyclide initiale de la figure 7.6.

Indice	Points M_i	Centre de $S(t_i)$	Rayons de $S(t_i)$
$i = 1$	$\left(\frac{7 + 48\sqrt{2}}{10}; 4\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}(7\sqrt{2} - 4)}{5} \right)$	$(5\sqrt{2}; 4\sqrt{3}; 0)$	$\frac{7}{2} - \sqrt{2}$
$i = 2$	$\left(\frac{7}{10}; \frac{-\sqrt{3}(7 + 20\sqrt{2})}{5}; \frac{7\sqrt{3}}{5} \right)$	$(0; -4\sqrt{6}; 0)$	$\frac{7}{2}$
$i = 3$	(-9, 551; 6, 041; 5, 027)	$(-5\sqrt{3}; 2\sqrt{6}; 0)$	$\pm \frac{7 + \sqrt{3}}{2}$

TABLE 7.3 – Coordonnées des points M_i et des centres de sphères $S(t_i)$ et valeur des rayons des sphères $S(t_i)$ définissant les conditions de contact de la figure 7.9.

Algorithme 16 Détermination d'une cyclide tri-tangente à une cyclide initiale.

Entrée : une cyclide de Dupin $Cycl$ définie par une famille de sphères paramétrées $S(t)$.

1. Choix de trois valeurs t_1, t_2 et t_3 .
2. Choix de deux points M_1 et M_2 sur les cercles caractéristiques portés par les sphères $S(t_1)$ et $S(t_2)$.
3. Calcul d'un point $M(\alpha)$ du cercle caractéristique porté par la sphère $S(t_3)$, le paramètre α reste indéterminé.
4. **Pour i de 1 à 2 faire** Calcul du vecteur \vec{m}_i correspondant au point M_i **fin faire**.
5. Calcul du vecteur $\vec{m}(\alpha)$ en fonction de α correspondant à $M(\alpha)$.
6. **Pour i de 1 à 2 faire** Calcul de σ_{i0} , correspondant aux sphères $S(t_i)$ dans Λ^4 **fin faire**.
7. Calcul de σ_{30}^* correspondant à la sphère $S(t_3)$ dans Λ^4 et de $\sigma_{30} = -\sigma_{30}^*$ correspondant à la sphère d'orientation inverse.
8. Choix d'un réel a_1 .
9. Calcul de $b_2 = f(\sigma_{10}, m_1, \sigma_{20}, m_2, a_1)$.
10. Calcul de $a_3(\alpha) = f(\sigma_{20}, m_2, \sigma_{30}, m_3(\alpha), b_2)$.
11. Calcul de $b_1(\alpha) = f(\sigma_{30}, m_3(\alpha), \sigma_{10}, m_1, a_3(\alpha))$.
12. Calcul de $a_2(\alpha) = f(\sigma_{10}, m_1, \sigma_{20}, m_2, b_1(\alpha))$.
13. Calcul de $b_3(\alpha) = f(\sigma_{20}, m_2, \sigma_{30}, m_3(\alpha), a_2(\alpha))$.
14. Calcul de $a_0(\alpha) = f(\sigma_{30}, m_3(\alpha), \sigma_{10}, m_1, b_3(\alpha))$.
15. Soit l'ensemble des solutions $E_s = \{\alpha; a_0(\alpha) = a_1\}$.
16. Si $E_s \neq \emptyset$ alors Choix d'un nombre α_3 de E_s .

Calcul de $m_3 = m(\alpha_3)$.

Pour i de 1 à 3 faire

Calcul de σ_i tel que $\vec{O_5\sigma_i} = \vec{O_5\sigma_{i0}} + a_i \vec{m}_i$.

Calcul de σ'_i tel que $\vec{O_5\sigma'_i} = \vec{O_5\sigma_{i0}} + b_i \vec{m}_i$.

retourner Deux triplets de points, l'un $(\sigma_i)_{i \in [1;3]}$ et l'autre $(\sigma'_i)_{i \in [1;3]}$ déterminant les deux coniques représentant une cyclide solution du problème des trois contacts.

fin faire

Sinon retourner l'ensemble vide.

Sortie : Une cyclide de Dupin tri-tangente à $Cycl$ uniquement en trois points.

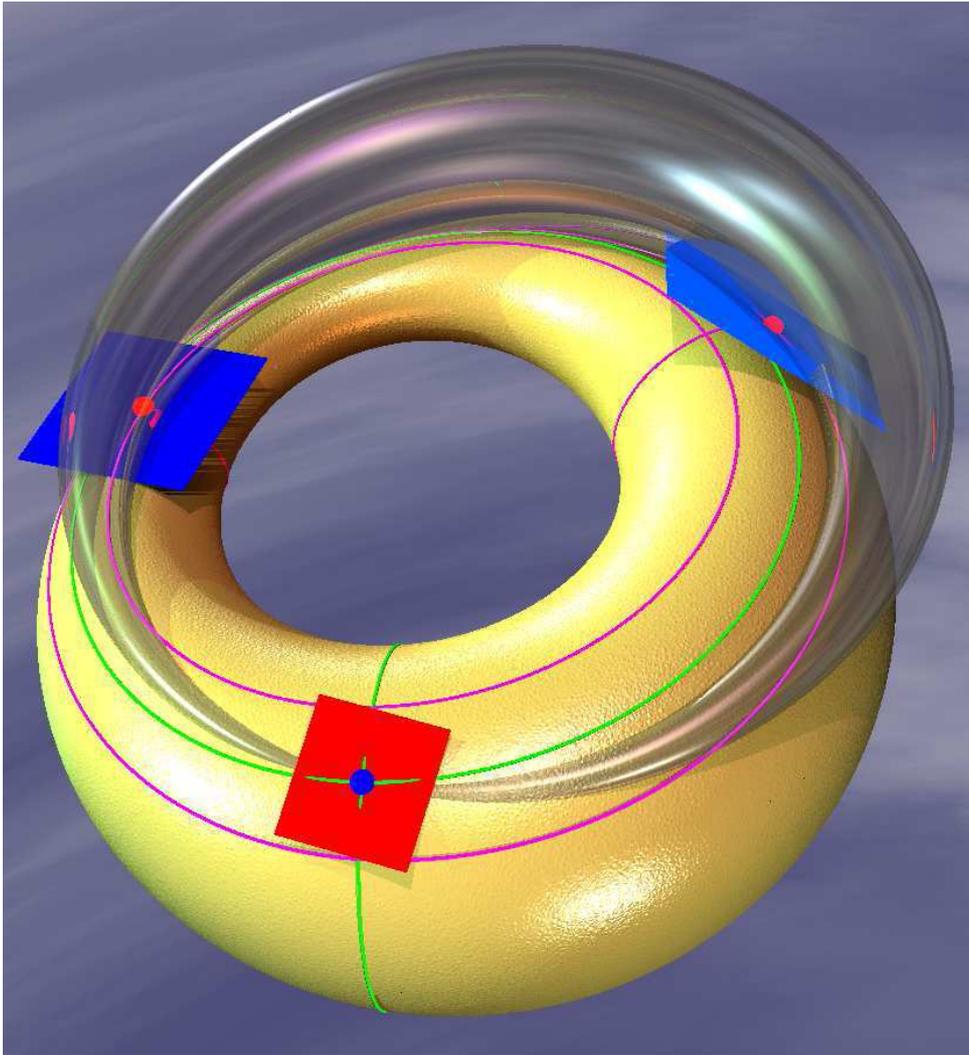


FIGURE 7.9 – Deux cyclides de Dupin tangentes en uniquement trois points.

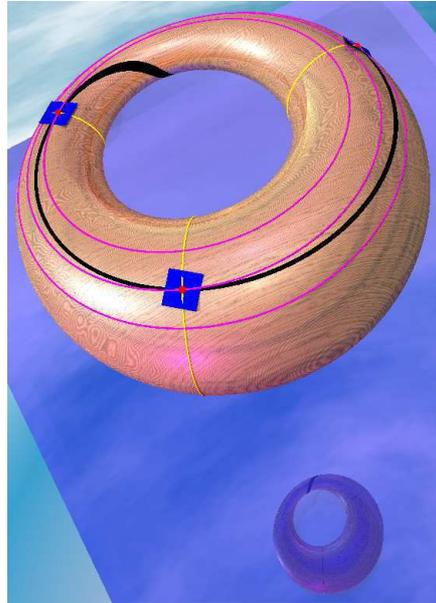


FIGURE 7.10 – Une courbe de contact sur une cyclide.

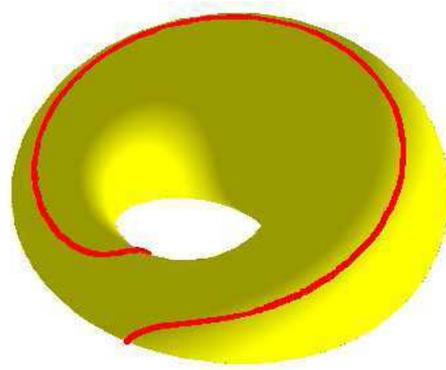


FIGURE 7.11 – Une courbe de contact sur une cyclide obtenue avec l'algorithme 17.

Algorithme 17 Détermination d'une courbe de tangence définie par trois conditions de contact sur une cyclide

Entrée : Trois conditions de contact (Q_i, M_i) sur une cyclide

1. Utilisation de l'algorithme 15 qui retourne deux triplets $(\sigma_i)_{i \in [1;3]}$ et $(\sigma'_i)_{i \in [1;3]}$ en choisissant le paramètre a_1 tel que les 2-plans $P_1 = \text{Aff}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et $P_2 = \text{Aff}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ soient de type espace.
2. Déterminer les ellipses (cercles-Lorentz) $\Gamma_1 = P_1 \cap \Lambda^4$ et $\Gamma_2 = P_2 \cap \Lambda^4$, leurs centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et leurs rayons(-Lorentz) respectifs r_1 et r_2
3. Poser $\vec{u}_1 = \overrightarrow{\Omega_1 \sigma_1}$ et $\vec{u}_2 = \overrightarrow{\Omega_2 \sigma'_1}$ et déterminer les points σ_4 et σ'_4 tels que le vecteur $\vec{v}_1 = \overrightarrow{\Omega_1 \sigma_4}$ soit $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonal à \vec{u}_1 et le vecteur $\vec{v}_2 = \overrightarrow{\Omega_2 \sigma'_4}$ soit $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonal à \vec{u}_2 .
4. Paramétrer l'ellipse Γ_1 (cercle Lorentz) par :

$$\overrightarrow{\Omega_1 \sigma(t)} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \vec{u}_1 + \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) \vec{v}_1 \quad t \in \overline{\mathbb{R}}$$

et l'ellipse Γ_2 (cercle Lorentz) par :

$$\overrightarrow{\Omega_2 \sigma'(s)} = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2} \right) \vec{u}_2 + \left(\frac{2s}{1+s^2} \right) \vec{v}_2, \quad s \in \overline{\mathbb{R}}$$

5. Identifier chaque plan P_1 et P_2 au plan complexe :
 - tout point $\sigma(t)$ de Γ_1 s'écrit $\sigma(t) = r_1 \frac{1-t^2}{1+t^2} + ir_1 \frac{2t}{1+t^2}$
 - tout point $\sigma'(s)$ de Γ_2 s'écrit $\sigma'(s) = r_2 \frac{1-s^2}{1+s^2} + ir_2 \frac{2s}{1+s^2}$
6. Déterminer les valeurs de t_1, t_2, t_3 et s_1, s_2, s_3 tel que $\sigma_i = \sigma(t_i)$ et $\sigma'_i = \sigma'(s_i)$
7. Calculer les birapports $B(t) = \frac{\sigma(t) - \sigma(t_2)}{\sigma(t_1) - \sigma(t_2)} \times \frac{\sigma(t_1) - \sigma(t_3)}{\sigma(t) - \sigma(t_3)}$ des quatre points complexes $\sigma(t), \sigma(t_1), \sigma(t_2)$ et $\sigma(t_3)$ et $B'(s) = \frac{\sigma'(s) - \sigma'(s_2)}{\sigma'(s_1) - \sigma'(s_2)} \times \frac{\sigma'(s_1) - \sigma'(s_3)}{\sigma'(s) - \sigma'(s_3)}$ des quatre points complexes $\sigma'(s), \sigma'(s_1), \sigma'(s_2)$ et $\sigma'(s_3)$
8. Déterminer la fonction $\Phi : t \rightarrow s$ tel que $B(t) = B'(\Phi(t))$
9. Pour $t \in \overline{\mathbb{R}}$, déterminer les points $M_\Phi(t)$ de la courbe \mathbf{C}_Φ sur la cyclide initiale correspondant aux vecteurs lumière $\overrightarrow{\Gamma_1(t) \Gamma_2(\Phi(t))}$

Sortie : La courbe de contact \mathbf{C}_Φ qui passe par les trois points M_i de la cyclide initiale.

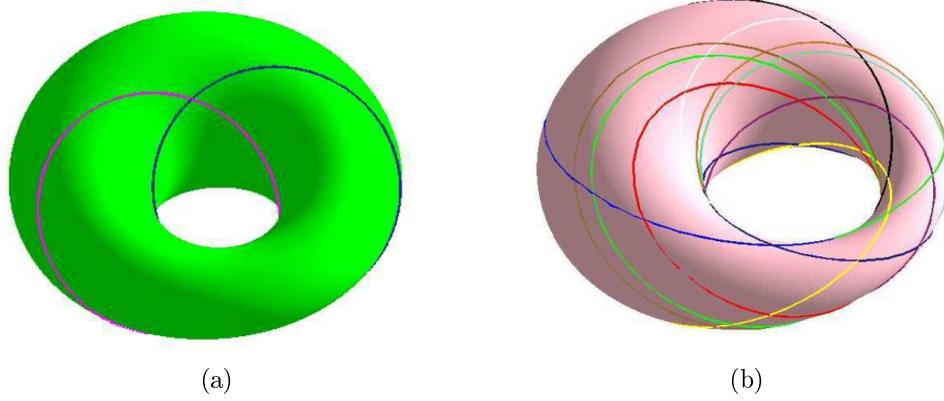


FIGURE 7.12 – Cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin en anneau. (a) Deux cercles. (b) Plusieurs cercles.



FIGURE 7.13 – Une cyclide et un tore tangents le long d'une courbe de contact qui est un cercle de Villarceau.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

8.1 Conclusion

Nous avons commencé par généraliser les méthodes de jointures G^1 existantes entre une surface canal et une sphère par un morceau de cyclide de Dupin. A partir du plan de symétrie des primitives à joindre, les algorithmes existants permettent la jointure entre une surface de révolution (surface canal particulière) et une sphère ou un plan. On joint les courbes, obtenues comme section de la surface de révolution et de la sphère par le plan de symétrie, par des cercles satisfaisant des contraintes imposées au préalable. Il existe une cyclide pour laquelle ces cercles sont deux cercles principaux et qui admet le même plan de symétrie (le type de la cyclide est imposé). Nous étendons cette construction aux jointures entre une surface canal quelconque et une sphère.

La méthode générale, qui consiste à se placer dans un espace de dimension supérieure pour résoudre des problèmes plus simplement, est courante et efficace. Par exemple, les algorithmes de construction de la triangulation de Delaunay en dimension n utilisent ce principe.

Ici, nous utilisons l'espace des sphères orientées et la représentation des cyclides de Dupin dans cet espace. Cet espace est une quadrique Λ^4 de dimension 4 dans un espace de dimension 5 muni de la forme quadratique de Lorentz. Une cyclide de Dupin orientée est l'enveloppe de deux familles à un paramètre de sphères orientées. Ces sphères forment dans Λ^4 deux coniques contenues dans deux plans affines orthogonaux pour la forme Lorentz. De plus, nous pouvons construire chacune des coniques à partir de l'autre. Ces représentations permettent de simplifier considérablement la résolution de problèmes posés dans \mathcal{E}_3 en les ramenant à des calculs d'algèbre linéaire dans un espace de dimension 5. Ainsi, le problème de jointure G^1 entre une surface canal et une sphère par un morceau de cyclide de Dupin qui est exposé dans le paragraphe précédent est ramené à la détermination d'un plan passant par deux points et dont on connaît un vecteur (non colinéaire au vecteur dont les extrémités sont les points précédents).

En utilisant cette représentation, nous avons pu coller différentes primitives avec des morceaux de cyclides satisfaisant d'autres contraintes.

De plus, nous avons donné des algorithmes de constructions itératives de morceaux d'une cyclide de Dupin en construisant itérativement ses cercles caractéristiques. Cette construction utilise la notion de points massiques, [FJ89, Béc97], peu utilisée à notre connaissance et pour-

tant très efficace dans les algorithmes pour travailler à la fois avec les points et les vecteurs d'un espace. Nous utilisons aussi la méthode de construction itérative d'arcs d'ellipses et d'hyperboles décrite dans [GDLre], généralisant la construction itérative de cercles et l'algorithme de De Casteljaou en considérant les coniques comme des cercles pour la forme quadratique adéquate.

L'utilisation de l'espace des sphères a surtout été efficace et utile pour résoudre des problèmes bien plus difficile à résoudre dans \mathcal{E}_3 que les problèmes précédents. En effet, nous avons trouvé une solution au problème dit des 3 contacts, posé par M. Paluszny, qui consiste à déterminer une cyclide tangente à trois plans en trois points. Ce problème ne nous paraissait pas abordable dans \mathcal{E}_3 alors qu'il est résolu dans l'espace de Lorentz. Nous avons démontré qu'il existe une famille à un paramètre de cyclides de Dupin satisfaisant trois conditions de contact convenables. C'est en particulier le cas lorsque les 3 contacts sont pris sur une cyclide initiale.

De plus, nous avons mis en évidence une courbe de contact passant par les trois points de contact lorsqu'il existe une famille à un paramètre de cyclides solutions. Cette courbe est une courbe de tangence entre les cyclides (encore une fois, la démonstration de cette affirmation est réalisée en se plaçant dans un espace de dimension supérieure, [LSD⁺12]). Ces dernières courbes, incluant les cercles de Villarceau, sont déterminées et tracées dans \mathcal{E}_3 grâce à des homographies définies dans l'espace de Lorentz. Jusqu'à présent, les recollements de cyclides de Dupin ne se faisaient que le long de cercles caractéristiques. Nous savons maintenant que nous pouvons utiliser aussi ces courbes de contact générales pour recoller des morceaux de cyclides de manière G^1 .

Enfin, nous avons aussi développé un algorithme de construction de carreaux de cyclides de Dupin à bords circulaires, en utilisant des arcs de cercles caractéristiques, passant par quatre points (avec des contraintes sur les points). Cette construction peut permettre de recoller simplement plusieurs carreaux de cyclides de Dupin les uns derrière les autres et de construire de cette manière un ruban. Il nous reste à étudier la possibilité de recoller ces carreaux de part et d'autre d'un premier carreau et de connaître les conditions permettant de réitérer le processus.

8.2 Perspectives

Savoir approcher une surface par des carreaux de cyclides recollés de manière G^1 serait utile pour déterminer les trajectoires de rayon lumineux réfléchis et réfractés en arrivant sur une surface (méthode du lancer de rayons). Nous espérons que les équations à résoudre seront plus simples que lorsque la surface est représentée par des carreaux de Bézier de degré élevé, par exemple.

Par ailleurs, nous aimerions adapter la construction de ruban (décrite en conclusion) en recollant des carreaux de cyclides de Dupin dont les bords ne seraient plus des arcs de cercles caractéristiques mais des arcs de courbes de contact générales. De la même manière que pour les carreaux à bords circulaires, nous aimerions aussi pouvoir utiliser ce processus de part et d'autre d'un premier carreau et approcher ainsi une surface. Cependant, il faut déterminer les contraintes sur les carreaux pour approcher la surface. Puis, d'autres questions se posent : Est-il possible d'approcher n'importe quelle surface de cette manière ? Si ce n'est pas le cas, pouvons nous donner des conditions sur la surface à approcher ? Une fois cette démarche effectuée, pourquoi ne pas avoir le même raisonnement, mais cette fois, en construisant des triangles de cyclides de Dupin. Les bords pourront être soit circulaires (en considérant à la fois des cercles caractéristiques et des cercles de Villarceau), soit des arcs de courbes de contact générales. Nous pourrions envisager de trianguler des surfaces avec cette construction.

De manière générale, il serait possible, d'utiliser les algorithmes définis sur les maillages triangulaires ou quadrangulaires, comme par exemple les algorithmes de subdivision.

Nous aimerions aussi reprendre, en se plaçant dans l'espace des droites, le travail exposé dans [BP99] où les auteurs cherchent des quadriques doublement réglées satisfaisant trois contacts. En effet, les quadriques doublement réglées se représentent par des coniques planes dans cet espace.

Nous aimerions aussi travailler avec des cyclides plus générales. Ces surfaces sont cerclées par deux familles de cercles, tels que chaque paires de cercles, un dans chaque famille, est contenue dans une sphère. Les deux familles de cercles de Villarceau font des cyclides de Dupin régulières des cyclides particulières de la famille que nous venons de définir. Nous nous placerions alors dans l'espace des cercles (qui est de dimension 6).

D'un point de vue plus pratique, il faudrait étudier les temps de calcul de nos algorithmes pour justifier leur efficacité particulièrement pour les algorithmes qui réalisent des jointures identiques à celles réalisées par les algorithmes existants dans \mathcal{E}_3 . Nous espérons que la notion d'algèbres géométriques, [DFGL12], nous permettra d'améliorer nos algorithmes en réduisant les temps de calcul.

Une application future envisagée pourrait être aussi la modélisation et l'animation d'objets articulés dont une composante attachée à une sphère est libre (pour la robotique par exemple). Nous avons donné des conditions qui permettent de recoller des morceaux de surfaces canal (incluant les cyclides de Dupin) avec des morceaux de sphères et de déterminer si les surfaces se recoupent ou non.

En ce qui concerne le contexte industriel, nous espérons utiliser les algorithmes donnés dans ce document pour la reconstruction 3D de pièces du CEA par la méthode décrite en introduction. Nous souhaitons approcher de manière précise un nuage de points mesurés sur une pièce réelle par des jointures de morceaux de cyclides de Dupin. Un premier travail a déjà été réalisé pour extraire un ensemble de sphères représentatives du nuage de points : les sphères centrées sur son squelette. Aujourd'hui, il faut encore développer les algorithmes de jointures par des morceaux de cyclides de Dupin en passant par l'espace des sphères. Un stagiaire ingénieur en alternance au CEA travaille actuellement sur ce sujet.

Annexe A

Espace des points massiques

L'ensemble des vecteurs du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ et des points pondérés du plan affine \mathcal{P} sont regroupés dans l'espace des points massiques $\tilde{\mathcal{P}}$ [FJ89] défini par :

$$\tilde{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} \times \mathbb{R}^*) \cup (\vec{\mathcal{P}} \times \{0\}) \quad (\text{A.1})$$

et il est possible d'identifier $\tilde{\mathcal{P}}$ à $\vec{\mathcal{E}}_3 = \vec{\mathcal{P}} \oplus \vec{\mathbb{R}}$, figure A.1. L'idée est de considérer le plan affine \mathcal{P} comme un hyperplan de $\vec{\mathcal{E}}_3$ d'équation $\omega = 1$. Un point massique est soit un point pondéré du plan \mathcal{P} , soit un vecteur du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ à qui nous affectons un poids nul.

Rappelons que le barycentre d'une famille de points pondérés dont la somme des poids est nul n'est pas un point, mais le vecteur :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i \overrightarrow{MA_i}$$

qui est indépendant du point M [Gou83, Lad03]. Il est donc naturel de regrouper dans un même espace les points pondérés de \mathcal{P} et les vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$, identifié à l'hyperplan de $\vec{\mathcal{E}}_3$ d'équation $\omega = 0$. Nous pouvons ainsi généraliser la notion de barycentre aux familles des points pondérés dont la somme des poids est nulle.

Cela revient à établir une bijection entre $\tilde{\mathcal{P}}$ et $\vec{\mathcal{E}}_3$ suivie d'une projection sur \mathcal{P} ou $\vec{\mathcal{P}}$ selon le cas. L'espace $\tilde{\mathcal{P}}$ est plus avantageux qu'un espace projectif puisque nous pouvons garder notre structure euclidienne ou *pseudo*-euclidienne sur le plan affine \mathcal{P} et sur le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$.

Afin de pouvoir manipuler les coordonnées des points ou des vecteurs, Fiorot et Jeannin définissent, sur l'espace $\tilde{\mathcal{P}}$, les additions, notées \boxplus , de la façon suivante :

- $\omega + \mu = 0 \implies (M; \omega) \boxplus (N; \mu) = (\omega \overrightarrow{NM}; 0)$
- $\omega + \mu \neq 0 \implies (M; \omega) \boxplus (N; \mu) = \left(\text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \omega + \mu \right)$
- $(\vec{u}; 0) \boxplus (\vec{v}; 0) = (\vec{u} + \vec{v}; 0)$
- $\omega \neq 0 \implies (M; \omega) \boxplus (\vec{u}; 0) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega} \vec{u}}(M); \omega \right)$ où $\mathcal{T}_{\vec{u}}$ est la translation de \mathcal{P} de vecteur \vec{u} .

Sur l'espace $\tilde{\mathcal{P}}$, Fiorot et Jeannin définissent la multiplication par un scalaire, notée \boxtimes , de la façon suivante :

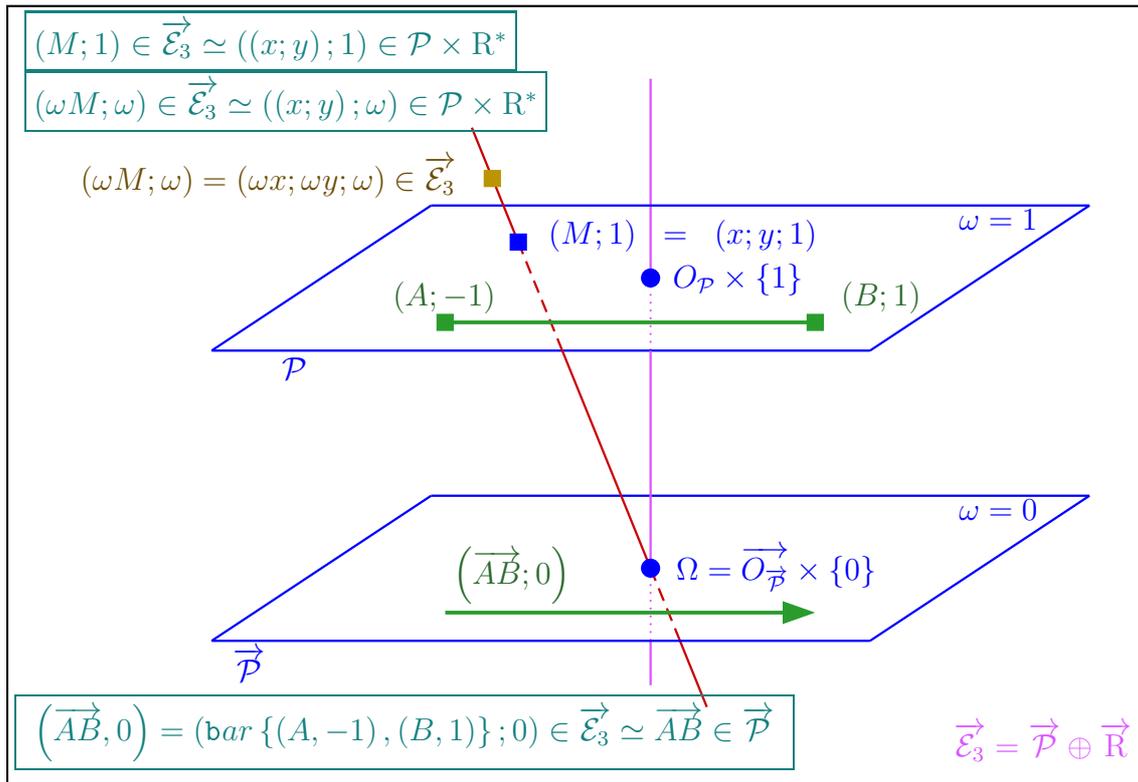


FIGURE A.1 – Espace $\tilde{\mathcal{P}}$ des points massiques réunissant les points pondérés du plan affine \mathcal{P} d'équation $\omega = 1$ et les vecteurs (muni d'un poids nul) du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ d'équation $\omega = 0$.

- $\alpha \neq 0 \implies \alpha \square (M; \omega) = (M; \alpha \omega)$
- $\omega \neq 0 \implies 0 \square (M; \omega) = \left(\vec{0}; 0 \right)$
- $\alpha \square (\vec{u}; 0) = (\alpha \vec{u}; 0)$

Annexe B

Justifications des algorithmes 9 et 10

B.1 Justification de l'algorithme 9

B.1.1 Lemmes

Justifions qu'en un point σ_0 de la conique Γ , le rayon et la tangente en σ_0 sont $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonales. La conique Γ , en temps que cercle Lorentz, est l'ensemble des points $M(t)$ vérifiant :

$$\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega M(t)}, \overrightarrow{\Omega M(t)} \right) = 1$$

et en dérivant par rapport à t , on obtient :

$$2\mathcal{L}_{4,1} \left(\frac{d\overrightarrow{\Omega M(t)}}{dt}, \overrightarrow{\Omega M(t)} \right) = 0$$

Maintenant, démontrons le lemme suivant :

Lemme 3 :

Soit σ_0 et σ_2 deux points distincts de la conique Γ non symétriques par rapport à Ω . Soit P_1 l'intersection des deux tangentes à Γ en σ_0 et σ_2 . Soit I le milieu du segment $[\sigma_0\sigma_2]$. Alors la droite (IP_1) est la $\mathcal{L}_{4,1}$ -médiatrice du triangle $\sigma_0P_1\sigma_2$ issue du sommet P_1 c'est-à-dire que nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2} \right) = \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2} \right) = \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{IP_1}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2} \right) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Démonstration 9

Remarquons que les points Ω , P_1 et I sont alignés, proposition 1 de [Gar10]. Il suffit donc de calculer $\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2} \right)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2} \right) &= \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\sigma_0\Omega} + \overrightarrow{\Omega\sigma_2} \right) \\ &= \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\sigma_0\Omega} \right) + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\Omega\sigma_2} \right) \\ &= \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + \overrightarrow{\sigma_0P_1}, \overrightarrow{\sigma_0\Omega} \right) + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_2} + \overrightarrow{\sigma_2P_1}, \overrightarrow{\Omega\sigma_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0\Omega}) + \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0\Omega})}_0 + \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_2}, \overrightarrow{\Omega\sigma_2})}_1 + \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_2 P_1}, \overrightarrow{\Omega\sigma_2})}_0 \\
&= -\underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega\sigma_0})}_1 + 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

A partir du lemme 3, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 1 :

Soit σ_0 et σ_2 deux points distincts de la conique Γ non symétriques par rapport à Ω . Soit P_1 l'intersection des deux tangentes à Γ en σ_0 et σ_2 . Alors le triangle est $\mathcal{L}_{4,1}$ -isocèle en P_1 c'est-à-dire que nous avons :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_2 P_1}, \overrightarrow{\sigma_2 P_1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_2 P_1}) \quad (\text{B.2})$$

Démonstration 10

Soit I le milieu du segment $[\sigma_0\sigma_2]$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) &= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 I} + \overrightarrow{IP_1}, \overrightarrow{\sigma_0 I} + \overrightarrow{IP_1}) \\
&= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 I}, \overrightarrow{\sigma_0 I}) + \underbrace{2\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 I}, \overrightarrow{IP_1})}_{=0, \text{ Lemme 3}} + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{IP_1}, \overrightarrow{IP_1}) \\
&= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 I}, \overrightarrow{\sigma_0 I}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{IP_1}, \overrightarrow{IP_1})
\end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_2 P_1}, \overrightarrow{\sigma_2 P_1}) = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_2 I}, \overrightarrow{\sigma_2 I}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{IP_1}, \overrightarrow{IP_1})$$

Comme I est le milieu du segment $[\sigma_0\sigma_2]$, nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 I}, \overrightarrow{\sigma_0 I}) = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_2 I}, \overrightarrow{\sigma_2 I}) = \frac{1}{4} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2})$$

ce qui prouve que le triangle est bien isocèle en P_1 .

□

Il nous reste à montrer la formule (5.7). Commençons par établir les trois lemmes suivants :

Lemme 4 :

Soit σ_0 et σ_2 deux points distincts de la conique Γ . Alors nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) &= -\frac{1}{2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) \\
\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_2}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) &= \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2})
\end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Démonstration 11

Soit I le milieu du segment $[\sigma_0\sigma_2]$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) &= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega I} + \overrightarrow{I\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) \\
&= \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2})}_{=0, \text{ formule (B.1)}} + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{I\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) \\
&= \mathcal{L}_{4,1}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2})
\end{aligned}$$

La démonstration de la seconde égalité est triviale puisque :

$$0 = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{2\Omega I}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + \overrightarrow{\Omega\sigma_2}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_2}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2})$$

□

Lemme 5 :

Soit γ la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points de contrôle pondérés $(\sigma_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(\sigma_2; 1)$. Alors, nous avons :

$$\overrightarrow{\Omega\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \overrightarrow{\Omega\sigma_0} + \frac{1}{2(1+\omega)}\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2} + \frac{\omega}{1+\omega}\overrightarrow{\sigma_0P_1} \quad (\text{B.4})$$

Démonstration 12

Le point de départ est la relation entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega\gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$, $\overrightarrow{\Omega P_1}$, $\overrightarrow{\Omega I}$ où I est le milieu du segment $[\sigma_0\sigma_2]$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} &= \frac{1}{1+\omega}(\overrightarrow{\Omega I} + \omega\overrightarrow{\Omega P_1}) \text{ [Gar07]} \\
&= \frac{1}{1+\omega}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + \overrightarrow{\sigma_0 I} + \omega\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + \omega\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \\
&= \overrightarrow{\Omega\sigma_0} + \frac{1}{2(1+\omega)}\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2} + \frac{\omega}{1+\omega}\overrightarrow{\sigma_0 P_1}
\end{aligned}$$

□

Lemme 6 :

Soit σ_0 et σ_2 deux points distincts de la conique Γ non symétriques par rapport à Ω . Soit P_1 l'intersection des deux tangentes à Γ en σ_0 et σ_2 . Alors, nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) = \frac{1}{2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) \quad (\text{B.5})$$

Démonstration 13

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) &= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 I} + \overrightarrow{IP_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) \\
&= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 I}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) + \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{IP_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}_{=0, \text{ formule (B.1)}} \\
&= \mathcal{L}_{4,1}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})
\end{aligned}$$

□

B.1.2 Démonstration de la formule (5.7)

Notre conique n'est déterminée actuellement que par quatre contraintes : les deux points σ_0 et σ_2 et les tangentes en ces points. Comme dernière contrainte, nous imposons que le point $\gamma(\frac{1}{2})$ appartienne à la conique Γ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
1 &= \mathcal{L}_{4,1}\left(\overrightarrow{\Omega\gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \overrightarrow{\Omega\gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \\
&= \mathcal{L}_{4,1}\left(\underbrace{\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + \frac{1}{2(1+\omega)}\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2} + \frac{\omega}{1+\omega}\overrightarrow{\sigma_0 P_1}}_{\text{Formule (B.4)}}, \underbrace{\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + \frac{1}{2(1+\omega)}\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2} + \frac{\omega}{1+\omega}\overrightarrow{\sigma_0 P_1}}_{\text{Formule (B.4)}}\right) \\
&= \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega\sigma_0})}_{=1} + \frac{1}{4(1+\omega)^2}\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) + \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2}\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \\
&\quad + 2\frac{1}{2(1+\omega)}\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) + 2\frac{\omega}{(1+\omega)}\underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1})}_0 + 2\frac{\omega}{2(1+\omega)^2}\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \\
&= 1 + \frac{1}{4(1+\omega)^2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) + \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) + \frac{1}{(1+\omega)}\underbrace{\frac{-1}{2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2})}_{\text{Formule (B.3)}} + \frac{\omega}{(1+\omega)^2}\underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2})}_{\text{Formule (B.5)}} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{4(1+\omega)^2} - \frac{1}{2(1+\omega)} + \frac{\omega}{2(1+\omega)^2}\right)\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) + \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \\
&= 1 + \left(\frac{1-2(1+\omega)+2\omega}{4(1+\omega)^2}\right)\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) + \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \\
&= 1 - \frac{1}{4(1+\omega)^2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2}) + \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\gamma \left(\frac{1}{2} \right)}, \overrightarrow{\Omega\gamma \left(\frac{1}{2} \right)} \right) = 1 &\iff \omega^2 \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 P_1} \right) = \frac{1}{4} \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right) \\
&\iff \underbrace{\omega^2 \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 P_1} \right) \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right)}_{\text{car } \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) \neq 0} = \left(\frac{1}{2} \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right) \right)^2 \\
&\iff \omega^2 \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 P_1} \right) \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right) = \underbrace{\left(\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right) \right)^2}_{\text{Formule (B.3)}}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\omega = \frac{\left| \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right) \right|}{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 P_1} \right) \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right)}} \quad \text{ou} \quad \omega = - \frac{\left| \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right) \right|}{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 P_1} \right) \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right)}} \quad (\text{B.6})$$

Dans le cas où Γ est une ellipse, la solution positive (resp. négative) de la formule (B.6) permet de construire le point σ_3 sur le petit arc (resp. grand arc) de l'ellipse. Dans le cas où Γ est une hyperbole, la solution positive de la formule (B.6) permet de construire le point σ_3 sur la même branche de l'hyperbole tandis que la solution négative impose la construction du point σ_3 sur l'autre branche de l'hyperbole mais le poids ω est, dans ce dernier cas, complexe. Etant donné que les poids de σ_0 et σ_2 sont égaux, nous avons $\sigma_3 = \gamma \left(\frac{1}{2} \right)$, formule (B.4), d'où :

$$\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3} = \frac{1}{2(1+\omega)} \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} + \frac{\omega}{1+\omega} \overrightarrow{\sigma_0 P_1} \quad (\text{B.7})$$

B.1.3 Démonstration de la formule de récurrence, formule (5.8)

Dans ce paragraphe, nous avons $N_1 = \text{bar} \{ (P_0; 1); (P_1; \omega_0) \}$, $N_2 = \text{bar} \{ (P_2; 1); (P_1; \omega_0) \}$ et σ_3 est le milieu du segment $[N_1 N_2]$. Nous appliquons ensuite l'algorithme 9 aux points $(\sigma_0; 1)$, $(N_1; \omega_1)$ et $(\sigma_3; 1)$ et nous allons montrer la relation :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1+\omega_0}{2}} \quad (\text{B.8})$$

avec :

$$\omega_0 = \frac{s_0 \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right)}{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 P_1} \right) \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} \right)}} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{s_0 \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3} \right)}{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 N_1} \right) \mathcal{Q}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3} \right)}} \quad (\text{B.9})$$

où $s_0 = \text{sgn}(\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}))$ et sgn désigne la fonction signe. En effet, dans le cas de l'hyperbole, les deux quantités $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})$ et $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3})$ sont négatifs ainsi que les quatre

quantités $\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})$, $\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})$, $\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1})$ et $\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3})$. L'introduction du nombre s_0 nous permet d'assurer que les poids sont positifs sans utiliser les valeurs absolues. Commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 7 :

Soit σ_0 et σ_2 deux points distincts de la conique Γ non symétriques par rapport à Ω . Soit P_1 l'intersection des deux tangentes à Γ en σ_0 et σ_2 . Soit ω_0 le nombre donné par la formule (B.9). Alors nous avons :

$$2 s_0 \omega_0 \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = \sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})} \quad (\text{B.10})$$

Démonstration 14

$$\begin{aligned} 2 s_0 \omega_0 \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) &= 2 s_0 \times \frac{s_0 \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \\ &= 2 s_0 \times \underbrace{\frac{s_0}{2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}_{\text{Formule (B.5)}} \frac{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})}{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}} \\ &= \frac{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})}{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}} s_0^2 \\ &= \sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})} \text{ car } s_0^2 = 1. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2 :

Soit σ_0 et σ_2 deux points distincts de la conique Γ non symétriques par rapport à Ω . Soit P_1 l'intersection des deux tangentes à Γ en σ_0 et σ_2 . Soit ω_0 le nombre donné par la formule (B.9). Alors nous avons :

$$4 \omega_0^2 \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) \quad (\text{B.11})$$

Démonstration 15

$$\begin{aligned} 4 \omega_0^2 \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) &= \underbrace{\left(2 s_0 \omega_0 \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})\right)^2}_{s_0^2=1} \frac{1}{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})} \\ &= \underbrace{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}_{\text{Formule (B.10)}} \frac{1}{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})} \end{aligned}$$

$$= \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_2})$$

□

Commençons par calculer les quantités intervenants dans ω_1 , formule (B.9).

$$\begin{aligned} \bullet \quad s_0 \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3}) &= s_0 \mathcal{L}_{4,1} \left(\underbrace{\frac{\omega_0}{1+\omega_0} \overrightarrow{\sigma_0 P_1}}_{N_1 = \text{bar}\{(\sigma_0; 1); (P_1; \omega_0)\}}, \underbrace{\frac{1}{2(1+\omega_0)} \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} + \frac{\omega_0}{1+\omega_0} \overrightarrow{\sigma_0 P_1}}_{\text{Formule (B.7)}} \right) \\ &= s_0 \frac{\omega_0}{2(1+\omega_0)^2} \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} + 2\omega_0 \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \\ &= \frac{\omega_0}{2(1+\omega_0)^2} \left(s_0 \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) + 2 s_0 \omega_0 \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \right) \\ &= \frac{\omega_0}{2(1+\omega_0)^2} \left(\underbrace{\omega_0 \sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}}_{\text{Formule (B.9)}} + \underbrace{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}}_{\text{Formule (B.10)}} \right) \\ &= \frac{\omega_0}{(1+\omega_0)^2} \frac{1+\omega_0}{2} \sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}) = \frac{\omega_0^2}{(1+\omega_0)^2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3}) &= \mathcal{L}_{4,1} \left(\underbrace{\frac{1}{2(1+\omega_0)} \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} + \frac{\omega_0}{1+\omega_0} \overrightarrow{\sigma_0 P_1}}_{\text{Formule (B.7)}}, \underbrace{\frac{1}{2(1+\omega_0)} \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} + \frac{\omega_0}{1+\omega_0} \overrightarrow{\sigma_0 P_1}}_{\text{Formule (B.7)}} \right) \\ &= \frac{1}{4(1+\omega_0)^2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) + 2 \frac{\omega_0}{2(1+\omega_0)^2} \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) + \frac{\omega_0^2}{(1+\omega_0)^2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \\ &= \frac{1}{4(1+\omega_0)^2} \left(\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) + 4 \omega_0 \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) + 4 \omega_0^2 \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \right) \\ &= \frac{1}{4(1+\omega_0)^2} \left(\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) + 4 \omega_0 \underbrace{\frac{1}{2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}_{\text{Formule (B.5)}} + \underbrace{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}_{\text{Formule (B.11)}} \right) \\ &= \frac{1}{4(1+\omega_0)^2} (2 + 2\omega_0) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) \\ &= \frac{1}{(1+\omega_0)^2} \frac{1+\omega_0}{2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) \end{aligned}$$

A partir des trois derniers calculs, il reste à établir la relation entre ω_1 et ω_0 . Nous rappelons que nous avons la condition $\omega_0 > 0$.

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{s_0 \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}, \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3})}{\sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3})}} = \frac{\frac{\omega_0}{(1+\omega_0)^2} \frac{1+\omega_0}{2} \sqrt{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{(1+\omega_0)^2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \frac{1}{(1+\omega_0)^2} \frac{1+\omega_0}{2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2})}} \\ &= \frac{\frac{1+\omega_0}{2}}{\sqrt{\frac{1+\omega_0}{2}}} = \sqrt{\frac{1+\omega_0}{2}}\end{aligned}$$

Afin d'assurer que le processus de subdivision peut continuer, il reste à montrer que les triangles $\sigma_0 N_1 \sigma_3$ et $\sigma_2 N_2 \sigma_3$ sont $\mathcal{L}_{4,1}$ -isocèles respectivement en N_1 et N_2 . Etant donné que les poids de σ_0 et σ_2 sont égaux, il suffit de montrer que nous avons :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_3 N_1}) \quad (\text{B.12})$$

et nous rappelons la relation :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}) = \left(\frac{\omega_0}{1+\omega_0}\right)^2 \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{N_1 \sigma_3}) &= \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{N_1 \sigma_0} + \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_3}) \\ &= \mathcal{Q}_{4,1}\left(\underbrace{\frac{\omega_0}{1+\omega_0} \overrightarrow{P_1 \sigma_0}}_{N_1 = \text{bar}\{(\sigma_0; 1); (P_1; \omega_0)\}} + \underbrace{\frac{1}{2(1+\omega_0)} \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2} + \frac{\omega_0}{1+\omega_0} \overrightarrow{\sigma_0 P_1}}_{\text{Formule (B.7)}}\right) \\ &= \mathcal{Q}_{4,1}\left(\frac{1}{2(1+\omega_0)} \overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}\right) = \frac{1}{4(1+\omega_0)^2} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \sigma_2}) = \frac{1}{4(1+\omega_0)^2} \underbrace{4\omega_0^2 \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1})}_{\text{Formule (B.11)}} \\ &= \left(\frac{\omega_0}{1+\omega_0}\right)^2 \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1})\end{aligned}$$

Notons que les droites $(N_1 N_2)$ et $(\sigma_0 \sigma_2)$ sont parallèles étant donné qu'elles sont toutes deux $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonales à la même droite (ΩP_1) .

Justification de l'algorithme 10

B.1.4 Rappels et lemmes

B.1.4.1 Rappels

Nous rappelons les relations fondamentales :

- Les vecteurs \vec{l}_2 et \vec{l}_3 sont construits de telle façon qu'ils vérifient :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_2, \vec{l}_2) = \mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_3, \vec{l}_3) = 0 \\ \mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_2, \vec{l}_3) = 1 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

- La tangente en un point σ_0 de l'hyperbole Γ , cercle Lorentz, est $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonale au rayon du cercle en σ_0 c'est-à-dire que nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = 0$$

- Le point σ_0 appartient à l'hyperbole Γ :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega\sigma_0}) = 1$$

- La somme $(P_1; \omega) \boxplus (\vec{l}_2; 0)$ se traduit vectoriellement par :

$$\overrightarrow{P_1 N_2} = \frac{1}{\omega} \vec{l}_2 \quad (\text{B.14})$$

- Le point N_1 est le barycentre des points pondérés $(\sigma_0; 1)$ et $(P_1; \omega)$ d'où :

$$\overrightarrow{P_1 N_1} = \frac{1}{1 + \omega} \overrightarrow{P_1 \sigma_0} \quad (\text{B.15})$$

- A partir des formules (B.14) et (B.15) nous avons :

$$\overrightarrow{N_1 N_2} = \frac{1}{1 + \omega} \overrightarrow{\sigma_0 P_1} + \frac{1}{\omega} \vec{l}_2$$

- Le point σ_3 est le barycentre des points pondérés $(N_1; 1 + \omega)$ et $(N_2; \omega)$ d'où :

$$\overrightarrow{\Omega\sigma_3} = \frac{1}{1 + 2\omega} \left((\omega + 1) \overrightarrow{\Omega N_1} + \omega \overrightarrow{\Omega N_2} \right) = \frac{1}{1 + 2\omega} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + 2\omega \overrightarrow{\Omega P_1} + \vec{l}_2 \right) \quad (\text{B.16})$$

B.1.4.2 Lemmes

Montrons les lemmes suivants :

Lemme 8 :

Nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega P_1}) = 1 \quad (\text{B.17})$$

Démonstration 16

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega P_1}) = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega\sigma_0} + \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega\sigma_0}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = 1 + 0 = 1$$

□

Lemme 9 :

Pour tout vecteur \vec{u} du plan contenant l'hyperbole Γ , nous avons :

$$\vec{u} = \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \vec{P}_2 + \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \vec{l}_3$$

Démonstration 17

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,1}(\mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \vec{l}_2 + \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \vec{l}_3, \vec{l}_3) &= \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_2, \vec{l}_3)}_1 + \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_3, \vec{l}_3)}_0 \\ &= \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,1}(\mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \vec{l}_2 + \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \vec{l}_3, \vec{l}_2) &= \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_2, \vec{l}_2)}_0 + \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_3, \vec{l}_2)}_1 \\ &= \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \end{aligned}$$

□

Corollaire 3 :

A partir du lemme 9, nous avons pour tout vecteur \vec{u} du plan contenant l'hyperbole Γ :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{u}) = 2 \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \quad (\text{B.18})$$

Démonstration 18

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{u}) &= \mathcal{L}_{4,1}(\mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \vec{l}_2 + \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \vec{l}_3, \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \vec{l}_2 + \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \vec{l}_3) \\ &= \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_2, \vec{l}_3) + \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_3, \vec{l}_2) \\ &= 2 \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_3) \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{l}_2) \text{ car } \mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_2, \vec{l}_3) = \mathcal{L}_{4,1}(\vec{l}_3, \vec{l}_2) = 1 \end{aligned}$$

□

Corollaire 4 :

A partir du corollaire 3, nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \vec{l}_2) = \frac{1}{2 \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \vec{l}_3)} \quad (\text{B.19})$$

Démonstration 19

Évident à partir de la relation $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega\sigma_0}) = 1$.

□

Lemme 10 :

Nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = -1 \quad (\text{B.20})$$

Démonstration 20

$$\begin{aligned} 1 &= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega\sigma_0}) \\ &= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{P_1\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{P_1\sigma_0}) \\ &= 2 \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{P_1\sigma_0}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{P_1\sigma_0}, \overrightarrow{P_1\sigma_0}) \text{ car } \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\Omega P_1}) = 0 \\ &= 2 \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{P_1\sigma_0}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{P_1\Omega} + \overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{P_1\sigma_0}) \\ &= 2 \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{P_1\sigma_0}) - \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{P_1\sigma_0}) \text{ car } \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{P_1\sigma_0}) = 0 \\ &= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{P_1\sigma_0}) = -\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \end{aligned}$$

□

Corollaire 5 :

A partir du lemme 10, nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = -1 \quad (\text{B.21})$$

Démonstration 21

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\Omega}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) = 0 - 1 = -1$$

□

B.1.5 Démonstration de la formule (5.10)

Déterminons le poids ω pour que l'on ait :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_3}, \overrightarrow{N_1 N_2}) = 0$$

puis vérifions que le point σ_3 appartient bien à l'hyperbole Γ c'est-à-dire que nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_3}, \overrightarrow{\Omega\sigma_3}) = 1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_3}, \overrightarrow{N_1 N_2}) &= \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + \overrightarrow{\sigma_0\sigma_3}, \overrightarrow{N_1 P_1} + \overrightarrow{P_1 N_2}) \\ &= \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{N_1 P_1})}_0 + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{P_1 N_2}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_3}, \overrightarrow{N_1 P_1}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_3}, \overrightarrow{P_1 N_2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\omega} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_2} \right) + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_3}, \overrightarrow{N_1P_1} \right) + \frac{1}{\omega} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_3}, \overrightarrow{l_2} \right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\omega \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3} \right)}}_{\text{Formule (B.19)}} + \underbrace{\frac{1}{1+\omega} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_3}, \overrightarrow{\sigma_0P_1} \right)}_{N_1=\text{bar}\{(\sigma_0;1);(P_1;\omega)\}} + \frac{1}{\omega} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_3}, \overrightarrow{l_2} \right)
\end{aligned}$$

Calculons les deux dernières quantités séparément.

$$\begin{aligned}
\bullet \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_3}, \overrightarrow{\sigma_0P_1} \right) &= \underbrace{\frac{1}{1+2\omega} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + 2\omega \overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{\sigma_0P_1} \right)}_{\text{Formule (B.16)}} \\
&= \frac{1}{1+2\omega} \left(\underbrace{\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\sigma_0P_1} \right)}_0 + \mathcal{L}_{4,1} \left(2\omega \overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\sigma_0P_1} \right) + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{\sigma_0P_1} \right) \right) \\
&= \frac{1}{1+2\omega} \left(2\omega \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\sigma_0\Omega} \right) + 2\omega \underbrace{\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{\Omega P_1} \right)}_0 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{\sigma_0\Omega} \right) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{\Omega P_1} \right)}_0 \right) \\
&= \frac{1}{1+2\omega} \left(2\omega \times \underbrace{-1}_{\text{Formule (B.17)}} + \underbrace{\frac{-1}{2\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3} \right)}}_{\text{Formule (B.19)}} \right) \\
&= -\frac{1}{1+2\omega} \left(2\omega + \frac{1}{2\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3} \right)} \right) \\
\bullet \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0\sigma_3}, \overrightarrow{l_2} \right) &= \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\sigma_0\Omega}, \overrightarrow{l_2} \right) + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_3}, \overrightarrow{l_2} \right) \\
&= \underbrace{-\frac{1}{2\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3} \right)}}_{\text{Formule (B.19)}} + \underbrace{\frac{1}{1+2\omega} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + 2\omega \overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_2} \right)}_{\text{Formule (B.16)}} \\
&= -\frac{1}{2\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3} \right)} + \frac{1}{1+2\omega} \left(\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_2} \right) + \underbrace{\mathcal{L}_{4,1} \left(2\omega \overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_2} \right)}_0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3})} + \frac{1}{1+2\omega} \underbrace{\frac{1}{2\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3})}}_{\text{Formule (B.19)}} \\
&= -\frac{1+2\omega-1}{(1+2\omega)\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3})} \\
&= -\frac{\omega}{(1+2\omega)\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3})}
\end{aligned}$$

Pour simplifier les expressions, posons $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3})$. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_3}, \overrightarrow{N_1N_2}) = 0 &\iff \frac{1}{2\omega\mathcal{L}_3} - \frac{1}{1+\omega} \frac{1}{1+2\omega} \left(2\omega + \frac{1}{2\mathcal{L}_3}\right) + \frac{1}{\omega} \frac{-\omega}{(1+2\omega)\mathcal{L}_3} = 0 \\
&\iff \frac{1}{2\omega\mathcal{L}_3} - \frac{1}{1+\omega} \frac{1}{1+2\omega} \left(\frac{4\omega\mathcal{L}_3+1}{2\mathcal{L}_3}\right) - \frac{1}{(1+2\omega)\mathcal{L}_3} = 0 \\
&\iff \frac{1}{2\omega\mathcal{L}_3(1+\omega)(1+2\omega)} ((1+\omega)(1+2\omega) - \omega(4\omega\mathcal{L}_3+1) - 2\omega(1+\omega)) = 0 \\
&\iff 1 + 3\omega + 2\omega^2 - 4\omega^2\mathcal{L}_3 - \omega - 2\omega - 2\omega^2 = 0 \\
&\iff 1 - 4\omega^2\mathcal{L}_3 = 0
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{L}_3}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3})}} \quad (\text{B.22})$$

puisque nous ne gardons que la valeur positive (les vecteurs $\overrightarrow{P_1N_2}$ et $\overrightarrow{l_2}$ doivent être de même sens).

Il reste à montrer que le point σ_3 appartient bien à l'hyperbole Γ c'est-à-dire que nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_3}, \overrightarrow{\Omega\sigma_3}) = 1$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_3}, \overrightarrow{\Omega\sigma_3}) &= \frac{1}{(1+2\omega)^2} \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + 2\omega\overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{\Omega\sigma_0} + 2\omega\overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{l_2})}_{\text{Formule (B.16)}} \\
&= \frac{1}{(1+2\omega)^2} \left(\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega\sigma_0}) + 2\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, 2\omega\overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{l_2}) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(2\omega\overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{l_2}, 2\omega\overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{l_2})}_0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+2\omega)^2} \left(1 + 4\omega \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{\Omega P_1})}_{=1, \text{ Formule (B.17)}} + 2\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_2}) \right) \\
&= \frac{1}{(1+2\omega)^2} \left(1 + 4\omega + \underbrace{\frac{2}{2\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3})}}_{\text{Formule (B.19)}} \right) \\
&= \frac{1}{(1+2\omega)^2} \left(1 + 4\omega + \underbrace{4\omega^2}_{\text{Formule (B.22)}} \right) = 1 \quad \square
\end{aligned}$$

B.1.6 Démonstration de la formule de récurrence, formule (5.12)

Montrons que les poids vérifient la relation :

$$\omega_{i+1} = \frac{\omega_i}{\sqrt{1+2\omega_i}}$$

c'est-à-dire qu'il suffit d'établir une relation entre $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3})$ et $\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_3}, \overrightarrow{l_3})$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_3}, \overrightarrow{l_3}) &= \frac{1}{1+2\omega_i} \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0} + 2\omega_i\overrightarrow{\Omega P_1} + \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3})}_{\text{Formule (B.16)}} \\
&= \frac{1}{1+2\omega_i} \left(\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3}) + 2\omega_i\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{l_3}) + \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3})}_{=1, \text{ Formule (B.13)}} \right) \\
&= \frac{1}{1+2\omega_i} \left(\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3}) + 2\omega_i\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3}) + 2\omega_i\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{l_3}) + 1 \right) \\
&= \frac{1}{1+2\omega_i} \left(1 + (1+2\omega_i)\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3}) + 2\omega_i \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1}) \frac{1}{2\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{l_2})}}_{\text{Formule (B.18)}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+2\omega_i} \left(1 + (1+2\omega_i) \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3}) + \omega_i \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 P_1}, \overrightarrow{\sigma_0 P_1})}_{=-1, \text{Formule (B.21)}} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \Omega}, \overrightarrow{l_2}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{l_2})} \\
&= \frac{1}{1+2\omega_i} \left(1 + (1+2\omega_i) \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3}) - \omega_i \frac{1}{\underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \Omega}, \overrightarrow{l_2}) + \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega P_1}, \overrightarrow{l_2})}_0} \right) \\
&= \frac{1}{1+2\omega_i} \left(1 + (1+2\omega_i) \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3}) - \omega \underbrace{2\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \Omega}, \overrightarrow{l_3})}_{\text{Formule (B.19)}} \right) \\
&= \frac{1}{1+2\omega_i} \left(1 + (1+4\omega_i) \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_0}, \overrightarrow{l_3}) \right) \\
&= \frac{1}{1+2\omega_i} \left(1 + (1+4\omega_i) \underbrace{\frac{1}{4\omega_i^2}}_{\text{Formule (B.22)}} \right) \\
&= \frac{1}{1+2\omega_i} \left(\frac{4\omega_i^2 + 1 + 4\omega_i}{4\omega_i^2} \right) \\
&= \frac{1}{1+2\omega_i} \frac{(1+2\omega_i)^2}{4\omega_i^2} \\
&= \frac{1+2\omega_i}{4\omega_i^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$\omega_{i+1} = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega\sigma_3}, \overrightarrow{l_3})}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\omega_i^2}{1+2\omega_i}} = \frac{\omega_i}{\sqrt{1+2\omega_i}}$$

car ω_i est strictement positif.

B.1.7 Montrons que le triangle $\sigma_0 N_1 \sigma_3$ est $\mathcal{L}_{4,1}$ -isocèle en N_1

Pour ce faire, il suffit de montrer la relation :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{N_1 \sigma_3}) \quad (\text{B.23})$$

et nous savons que nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega \sigma_0}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega \sigma_3}) = 1 \\ \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega \sigma_0}, \overrightarrow{\Omega N_1}) = \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega \sigma_3}, \overrightarrow{\Omega N_1}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 N_1}) &= \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \Omega} + \overrightarrow{\Omega N_1}) \\ &= \underbrace{\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \Omega})}_1 + 2 \underbrace{\mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{\sigma_0 \Omega}, \overrightarrow{\Omega N_1})}_0 + \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega N_1}) \\ &= 1 + \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega N_1}) \end{aligned}$$

De façon analogue, nous avons :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{N_1 \sigma_3}) = 1 + \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{\Omega N_1})$$

ce qui prouve la formule (B.23).

Annexe C

Construction de carreaux de cyclides à bords circulaires passant par quatre points : lemmes

Lemme 11 *D'une part, nous avons :*

$$\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) = \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) \quad (\text{C.1})$$

et :

$$\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right)^2 = 1 \quad (\text{C.2})$$

et d'autre part, nous avons les deux relations :

$$(A \cos \theta_0 - B \sin \theta_0)^2 = 1 \quad \text{et} \quad a_{\theta_0}^2 + b_{\theta_0}^2 = 1 \quad (\text{C.3})$$

où A et B sont donnés par la formule (6.6) tandis que a_{θ_0} et b_{θ_0} sont donnés par la formule (6.4).

Démonstration 22

Quitte à effectuer un changement de repère, nous pouvons toujours considérer le cas suivant.

Soit $M_{00}(0; 1; 0)$ appartenant aux deux cercles. Soit $\Omega_{\theta_0}(0; 0; 0)$ (resp $r_{\theta_0} = 1$) le centre (resp. le rayon) du premier cercle \mathcal{C}_{θ_0} (et de la première sphère). Soit $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\theta_0}}}(-1; 0; 0)$ un vecteur tangent à la sphère en M_{00} . Nous avons :

$$\sigma_{\theta_I} = (0; 0; 0; 0; -1) \quad \text{and} \quad \tau_{\theta_I} = (0; 0; 0; -1; 0)$$

Soit $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\psi_0}}}(0, \alpha, \beta)$ un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{v_{\mathcal{C}_{\theta_0}}}$. Nous devons distinguer deux cas.

Premier cas : $\alpha = 1 \implies \beta = 0$:

Le second cercle \mathcal{C}_{ψ_0} a pour centre :

$$\Omega_{\psi_0}(x_0; 1; z_0)$$

et pour rayon :

$$r_{\psi_0} = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$$

Ainsi, la sphère de centre Ω_{ψ_0} et de rayon r_{ψ_0} est représentée dans Λ^4 par :

$$\sigma_{\psi_I} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}}; \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}}; \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}}; \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}}; 0 \right)$$

tandis que le plan contenant \mathcal{C}_{θ_0} , orthogonal à la sphère précédente est représenté dans Λ^4 par :

$$\tau_{\psi_I} = \left(0; \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}}; 0; -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}}; 0 \right)$$

Nous avons :

$$\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) = -\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}} \times 0 \leq 0$$

et :

$$\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}} \times 0 \leq 0$$

et les conditions données par la formule (6.2) sont vérifiées.

Les formules (C.1) et (C.2) sont alors vraies. Comme $\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}} \right) = \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right)$, la condition donnée par la formule (6.2) est vraie.

De plus, nous avons $A = 0$ et $B = 1$. Nous obtenons alors $\theta_s = \pi$. En choisissant $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et en utilisant la formule (6.4), nous obtenons :

$$\begin{cases} a_{\theta_0} = -\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}} \\ b_{\theta_0} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

et $a_{\theta_0}^2 + b_{\theta_0}^2 = 1$. A partir de la formule (C.4) nous calculons ψ_0 . Nous pouvons remarquer la relation suivante :

$$(A \cos \theta_0 - B \sin \theta_0)^2 = \left(0 \times \cos \frac{\pi}{2} - 1 \times \sin \frac{\pi}{2} \right)^2 = 1 \quad (\text{C.5})$$

Second cas : $0 \leq \alpha < 1$ et $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$:

Quitte à effectuer une ou deux réflexion(s) de plan d'équation $y = 0$ et/ou $z = 0$, nous pouvons toujours nous ramener à ce cas.

Le second cercle \mathcal{C}_{ψ_0} a pour centre :

$$\Omega_{\psi_0} \left(x_0; y_0; -\frac{\alpha(y_0 - 1)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right)$$

et pour rayon :

$$r_{\psi_0} = \sqrt{\frac{x_0^2 (1 - \alpha^2) + (y_0 - 1)^2}{1 - \alpha^2}}$$

Ainsi, nous avons :

$$\sigma_{\psi_I} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2}} \left(y_0 \sqrt{1 - \alpha^2}; x_0 \sqrt{1 - \alpha^2}; y_0 \sqrt{1 - \alpha^2}; (1 - y_0) \alpha; (y_0 - 1) \sqrt{1 - \alpha^2} \right)$$

et :

$$\tau_{\psi_I} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2}} \left(x_0 (1 - \alpha^2); 1 - y_0; x_0 (1 - \alpha^2); -x_0 \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}; x_0 (1 - \alpha^2) \right)$$

Notons que la condition donnée par la formule (6.2) est vraie :

$$\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5 \sigma_{\theta_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5 \tau_{\theta_I}} \right) = -\frac{\sqrt{1 - \alpha^2} \alpha (y_0 - 1)^2}{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2} \leq 0$$

et :

$$\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5 \tau_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \tau_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5 \tau_{\theta_I}} \right) = \frac{x_0^2 (\alpha^2 - 1) \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2} \leq 0$$

De plus :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5 \sigma_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \tau_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5 \tau_{\theta_I}} \right) &= \frac{(1 - y_0) x_0 \alpha (1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2} \\ &= \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5 \tau_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5 \tau_{\theta_I}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, la formule (C.1) est vraie. De plus :

$$\begin{aligned} A^2 &= \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5 \sigma_{\psi_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5 \tau_{\psi_I}} \right)^2 = \frac{(1 - y_0)^2 (1 - \alpha^2) + x_0^2 (\alpha^2 - 1)^2}{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2} \\ &= (1 - \alpha^2) \frac{(1 - y_0)^2 + x_0^2 (1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2} = 1 - \alpha^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5 \tau_{\theta_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5 \tau_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5 \tau_{\theta_I}} \right)^2 = \frac{\alpha^2 (y_0 - 1)^2 + x_0^2 \alpha^2 (1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2} \\ &= \alpha^2 \frac{(y_0 - 1)^2 + x_0^2 (1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2} = \alpha^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $A^2 + B^2 = 1$ et la formule (C.2) est vraie.

La valeur θ_s est définie par :

$$\begin{cases} \cos(\theta_s) &= 1 - 2\alpha^2 \\ \sin(\theta_s) &= 2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2} \end{cases}$$

et en utilisant la relation $2 \cos^2(\theta_0) = 1 + \cos(2\theta_0) = 1 + \cos(-\theta_s)$, la valeur θ_0 vérifie :

$$\begin{cases} \cos^2(\theta_0) = 1 - \alpha^2 \\ \sin^2(\theta_0) = \alpha^2 \end{cases}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta_0) = \varepsilon_c \sqrt{1 - \alpha^2} \\ \sin(\theta_0) = \varepsilon_s \alpha \end{cases}, \quad (\varepsilon_c, \varepsilon_s) \in \{-1, 1\}$$

D'après la formule :

$$\frac{2 \tan(\theta_0)}{1 - \tan^2(\theta_0)} = \tan(2\theta_0) = -\tan(\theta_s)$$

nous avons :

$$\frac{2\varepsilon_s \alpha}{\varepsilon_c \sqrt{1 - \alpha^2}} \times \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}} = -\frac{2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}{1 - 2\alpha^2}$$

qui peut être simplifiée en :

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_c \sqrt{1 - \alpha^2}} \times \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha^2} = -\frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{1 - 2\alpha^2}$$

et nous obtenons la relation :

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_c$$

Nous pouvons remarquer la relation suivante :

$$(A \cos \theta_0 - B \sin \theta_0)^2 = \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \varepsilon_c \sqrt{1 - \alpha^2} - \alpha \varepsilon_s \alpha \right)^2 = \left(\varepsilon_c (1 - \alpha^2 + \alpha^2) \right)^2 = 1 \quad (\text{C.6})$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} a_{\theta_0} = \frac{\varepsilon_c \sqrt{1 - \alpha^2} (1 - y_0) \sqrt{1 - \alpha^2} - \varepsilon_c \alpha^2 (y_0 - 1)}{\sqrt{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2}} \\ b_{\theta_0} = \frac{\varepsilon_c \sqrt{1 - \alpha^2} x_0 (\alpha^2 - 1) - \varepsilon_c \alpha x_0 \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2}} \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} a_{\theta_0} = (y_0 - 1) \frac{-\varepsilon_c (1 - \alpha^2) - \varepsilon_c \alpha^2}{\sqrt{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2}} \\ b_{\theta_0} = x_0 \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\varepsilon_c (\alpha^2 - 1) - \varepsilon_c \alpha^2}{\sqrt{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2}} \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} a_{\theta_0} = \frac{-\varepsilon_c (y_0 - 1)}{\sqrt{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2}} \\ b_{\theta_0} = \frac{-\varepsilon_c x_0 \sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2) x_0^2 + (y_0 - 1)^2}} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

et nous avons :

$$a_{\theta_0}^2 + b_{\theta_0}^2 = 1 \quad (\text{C.8})$$

□

Lemme 12 : *Nous avons :*

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right)^2} \sqrt{\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right)^2} \\ &= - \left(\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) \right) \end{aligned} \quad (C.9)$$

Démonstration 23

Nous rappelons que nous avons les conditions données par la formule (6.2). A partir de la formule (C.9), nous avons :

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right)^2 \right) \left(\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right)^2 + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right)^2 \right) \\ &= \left(\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) + \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent (après quelques calculs) à :

$$\left(\mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) - \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\theta_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\psi_I}} \right) \mathcal{L}_{4,1} \left(\overrightarrow{O_5\sigma_{\psi_I}}, \overrightarrow{O_5\tau_{\theta_I}} \right) \right)^2 = 0$$

Cette relation est vraie d'après la formule (C.1).

□

Bibliographie

- [AAGR92] J. Rossignac A. A. G. Requicha. Solid modeling and beyond. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(5) :31–44, September 1992.
- [AD97a] S. Allen and D. Dutta. Cyclides in pure blending I. *Computer Aided Geometric Design*, 14(1) :51–75, 1997. ISSN 0167-8396.
- [AD97b] S. Allen and D. Dutta. Cyclides in pure blending II. *Computer Aided Geometric Design*, 14(1) :77–102, 1997. ISSN 0167-8396.
- [Béc97] J. P. Bécar. *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [BGF11] Bertrand Belbis, Lionel Garnier, and Sebti Foufou. Construction of 3D Triangles on Dupin Cyclides. *IJCVIP*, 1(2) :42–57, 2011.
- [BGL01] A. Bouvier, M. George, and F. Le Lionnais. *Dictionnaire des Mathématiques*. Quadrige, PUF, 1ère edition, 2001.
- [Boe90] W. Boehm. On cyclides in geometric modeling. *Computer Aided Geometric Design*, 7(1-4) :243–255, June 1990.
- [BP99] Claudia Bangert and Hartmut Prautzsch. Quadric splines. *Computer Aided Geometric Design*, 16 :497–515, 1999.
- [Cay73] A. Cayley. On the cyclide. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12 :148–165, 1873.
- [Cec92] T.E. Cecil. *Lie sphere geometry*. Universitext, 1992.
- [Dar87] G. Darboux. *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*, volume 1. Gauthier-Villars, 1887.
- [Dar17] G. Darboux. *Principes de géométrie analytique*. Gauthier-Villars, 1917.
- [DFGL12] L. Druoton, L. Fuchs, L. Garnier, and R. Langevin. The non-degenerate Dupin cyclides in the space of spheres using Geometric Algebra. In *AGACSE*, La Rochelle, France, July 2012. MIA, University of La Rochelle, and XLIM/SIC, University of Poitiers.
- [DFM07] Leo Dorst, Daniel Fontijne, and Stephen Mann. *Geometric Algebra for Computer Science : An Object Oriented Approach to Geometry*. Morgan Kaufmann Publishers, 2007.
- [DGL10] L. Druoton, L. Garnier, and R. Langevin. Les cyclides de Dupin et l’espace des sphères. In *Actes des journées AFIG*, pages 147–155, Novembre 2010.

- [DMP93] D. Dutta, R. R. Martin, and M. J. Pratt. Cyclides in surface and solid modeling. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(1) :53–59, January 1993.
- [Dup22] C. P. Dupin. *Application de Géométrie et de Mécanique à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc.* Bachelier, Paris, 1822.
- [Far93] G. Farin. *Curves And Surfaces*. Academic Press, 3ème édition, 1993.
- [FGP05] S. Foufou, L. Garnier, and M. Pratt. Conversion of Dupin Cyclide Patches into Rational Biquadratic Bézier Form. In R. Martin, H. Bez, and M. Sabin, editors, *Proceedings of the 11th Conference on the Mathematics of Surfaces*, pages 201–218. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, September 2005. ISBN : 3-540-28225.
- [FJ89] J. C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes et surfaces rationnelles*, volume RMA 12. Masson, 1989.
- [For12] A. R. Forsyth. *Lecture on Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge University Press, 1912.
- [Gar07] L. Garnier. *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007. ISBN : 978-2-7298-3412-8.
- [Gar08] L. Garnier. Représentation analytique des pendants des cercles de villarceau sur une cyclide de dupin en anneau. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*, 2(1) :47–59, 2008.
- [Gar09] L. Garnier. Courbes de Bézier quadratiques et arcs de coniques. *Feuille de Vigne, IREM de Dijon*, Septembre 2009.
- [Gar10] L. Garnier. Constructions euclidiennes, dans le plan affine, d'arcs de coniques propres par des I.F.S. affines non stationnaires. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*, 4(1) :21–56, 2010.
- [GDLre] L. Garnier, L. Druoton, and R. Langevin. Subdivisions itératives d'arcs d'ellipses et d'hyperboles et application à la visualisation de cyclides de Dupin. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*, 2012 à paraître.
- [GFN04] L. Garnier, S. Foufou, and M. Neveu. Blending of surfaces of revolution and planes by Dupin cyclides. In *Geometric Modeling and Computing [Proc. book of the 8th SIAM Conference on Geometric Design and Computing, Seattle, USA, Nov. 2003]*, Nashville, USA, 2004. Nashboro Press.
- [GFN06] L. Garnier, S. Foufou, and M. Neveu. Conversion d'un carreau de Bézier rationnel biquadratique en un carreau de cyclide de Dupin quartique. *RTSI-TSI*, 25(6) :709–734, 2006. numéro spécial AFIG'04.
- [GG11] L. Garnier and C. Gentil. Construction itérative de carreaux de cyclide de Dupin et représentation par des G.I.F.S. affines. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*, 5(2) :89–106, 2011.
- [Gou83] M. Gourion. *Mathématiques, Terminales C et E, tome 2*. Fernand Nathan, 1983.
- [HJ03] U. Hertrich-Jeromin. Introduction to Mobius differential geometry. *London Mat. Soc. Lecture note, Cambridge University Press*, xii :300, 2003.
- [Lad02] Y. Ladegaillerie. *Géométrie pour le CAPES de Mathématiques*. Ellipses, Paris, 2002. ISBN 2-7298-1148-6.

- [Lad03] Y. Ladegaillerie. *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, Paris, 2003. ISBN 2-7298-1416-7.
- [LFA91] J. Lelong-Ferrand and J. M. Arnaudies. *Cours de Mathématiques : variétés, courbes et surfaces*. Dunod, 2ème edition, Octobre 1991.
- [LO08] R. Langevin and J. O'Hara. Conformal arc-length via osculating circles. *Rapport de recherche IMB*, 531, janv 2008.
- [LS11] R. Langevin and G. Solanes. The geometry of canal surfaces and the length of curves in de sitter space. *Advances in Geometry*, 11(4) :585–601, November 2011.
- [LSD⁺12] R. Langevin, J.C. Sifre, L. Druoton, L. Garnier, and M. Paluszny. Gluing dupin cyclides along circles, finding a cyclide given three contact conditions. Technical report, Institut Mathématiques de Bourgogne, Dijon, 2012.
- [LW08] R. Langevin and P.G. Walczak. Conformal geometry of foliations. *Geom Dedicata*, 132(5) :135–178, 2008.
- [Man98] M. Mantyla. *An Introduction to Solid Modeling*. Computer Science Press, Rockville, Md, 1998.
- [Mar82] R. R. Martin. *Principal patches for computational geometry*. PhD thesis, Engineering Department, Cambridge University, 1982.
- [Mar83] R. Martin. Principal Patches. A new class of surface patch based on differential geometry. In *Eurographic's 1983*, pages 47–55, 1983.
- [Pal] M. Paluszny. Communication privée, Novembre 2010.
- [Pra97a] M. J. Pratt. Quartic supercyclides I : Basic theory. *Computer Aided Geometric Design*, 14(7) :671–692, 1997.
- [Pra97b] M. J. Pratt. Quartic supercyclides I : Basic theory. *Computer Aided Geometric Design*, 14(7) :671–693, 1997.
- [Rol04] R. Rolland. *Géométrie projective*. Publications de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille. IREM d'Aix-Marseille, 2004.
- [SKD96] Y. L. Srinivas, K. P. Vinod Kumar, and Debasish Dutta. Surface design using cyclide patches. *Computer-aided Design*, 28(4) :263–276, 1996.
- [Ued95] K. Ueda. Normalized Cyclide Bézier Patches. In *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pages 507–516, Nashville, USA, 1995. Vanderbilt University Press.