UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques
Institut de Mathématiques de Bourgogne
UMR 5584 du CNRS

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Discipline : **Mathématiques**

Présentée par

François MICHAS

le 21 juin 2012

Elimination des quantificateurs dans le cadre quasi-analytique

Directeur de thèse

Jean-Philippe ROLIN

Membres du jury

Jean-Marie LION	Université de Rennes 1	Rapporteur
Daniel PANAZZOLO	Université de Haute-Alsace	Rapporteur et Président
Olivier LE GAL	Université de Savoie	Examinateur
Lucy MOSER-JAUSLIN	Université de Bourgogne	Examinateur
Jean-Philippe ROLIN	Université de Bourgogne	Directeur de thèse
Patrick SPEISSEGGER	McMaster University	Examinateur

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, Monsieur Jean-Philippe Rolin qui a dirigé ma thèse pour sa patience tout au long de ce travail.

Je remercie Monsieur Jean-Marie Lion et Monsieur Daniel Panazzolo d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Mes remerciements vont également à Madame Lucy Moser-Jauslin, Monsieur Olivier Legal et Monsieur Patrick Speisseger qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury.

J'exprime également ma reconnaissance à l'Université de Bourgogne et particulièrement à Monsieur Hans Jauslin, le Directeur de l'Ecole Doctorale Carnot, de m'avoir accueilli en son sein.

La réalisation de ce travail a été facilitée par la prise en charge de diverses tâches administratives par Mesdames Gladys Sion et Véronique di Basio. Qu'elles en soient bien remerciées.

Que soient aussi remerciés ici tous ceux qui m'ont fait profiter de leurs connaissances des mathématiques, en particulier mes professeurs Jean-Pierre Vannier et Robert Moussu.

Enfin, j'exprime ma gratitude à mes relecteurs, Monsieur Claude Roche dont les commentaires ont servi d'aiguillon à mon travail, et Gaël Benabou, mon collègue et ami.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce travail est consacré à l'étude des propriétés de certaines *structures o-minimales*. Cette notion a été introduite par L. van den Dries [10] afin d'étudier le problème de Tarski : *peut-on étendre à la fonction exponentielle les résultats de finitude et de décidabilité connus pour les ensembles semi-algébriques ?* M. Coste, dans l'introduction de son cours sur la géométrie o-minimale [7], explique que la caractéristique principale de ces structures est qu'il ne s'y passe "rien de monstrueux". Afin de préciser ce qu'on entend par là, nous rappelons quelques définitions essentielles dans la section suivante.

1.1 Rappels sur les structures o-minimales

Définition 1.1 *Une* structure *sur le corps des réels est une collection $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où chaque $\mathcal{S}_n$ est une famille de parties de l'espace affine $\mathbb{R}^n$, telle que :*

1. *Tous les ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$ sont dans $\mathcal{S}_n$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n$ est une sous algèbre de Boole de l'algèbre des parties de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Si $A \in \mathcal{S}_n$ et $B \in \mathcal{S}_m$, alors le produit $A \times B$ appartient à $\mathcal{S}_{m+n}$.*
4. *Si $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ est la projection sur les n premières coordonnées et si $A \in \mathcal{S}_{n+1}$, alors $\pi(A) \in \mathcal{S}_n$.*

En particulier, si $\mathcal{F}$ est une collection de fonctions $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ pour des entiers $m \in \mathbb{N}$, la structure engendrée par $\mathcal{F}$ *est la plus petite structure sur $\mathbb{R}$ qui contient les graphes de tous les éléments de $\mathcal{F}$.*

Définition 1.2 *Les éléments des familles $\mathcal{S}_n$ sont appelés les* sous-ensembles définissables *de $\mathbb{R}^n$. Enfin, une application $f\colon A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est dite* définissable *si son graphe est un sous-ensemble définissable de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ (ce qui implique que son domaine de définition A est définissable).*

L'étude des propriétés des ensembles et des fonctions définissables dans telle ou telle structure est classiquement l'objet de la *théorie des modèles*, qui est une branche de la logique mathématique. Mais nous privilégierons une approche plus géométrique.

Introduisons maintenant la propriété qui nous intéresse principalement dans ce travail :

Définition 1.3 *Une structure $\mathcal{S}$ est dite* o-minimale *si les éléments de $\mathcal{S}_1$ sont précisément les unions finies de points et d'intervalles.*

Il peut paraître surprenant de ne considérer dans cette définition que les propriétés des sous-ensembles définissables de la droite réelle. Pourquoi dans ce cas s'encombrer de la notion de structure, et de la collection des ensembles définissables en toute dimension ? La réponse est donnée dans le texte introductif de L. van den Dries sur ce sujet [12] : il résulte de la propriété de finitude des ensembles définissables de la droite réelle que tous les ensembles définissables de la structure $\mathcal{S}$ ont une “géométrie modérée” [1] :

Théorème 1.1 ([12] ou [7]) *Soit $\mathcal{S}$ une structure o-minimale. Alors tout ensemble définissable de $\mathcal{S}$ a un nombre fini de composantes connexes.*

Cet énoncé admet en fait une version uniforme :

Théorème 1.2 *Soient $\mathcal{S}$ une structure o-minimale et $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un ensemble définissable de $\mathcal{S}$. Alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le nombre de composantes connexes de l'ensemble $A_x = \{y \in \mathbb{R}^m \colon (x,y) \in A\}$ soit inférieur ou égal à N.*

Ce résultat topologique s'étend enfin en une propriété géométrique :

Théorème 1.3 *Soit $\mathcal{S}$ une structure o-minimale, et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors tout ensemble définissable dans $\mathcal{S}$ admet une stratification finie en variétés définissables de classe $\mathcal{C}^k$.*

C'est ce type de résultat qui relève typiquement de la “géométrie modérée”. Ayant expliqué le type de propriétés recherché dans la notion de structure o-minimale, nous donnons plusieurs exemples classiques dans la section suivante.

1.2 Exemples classiques de structures o-minimales

L'un des intérêts de la notion de structure o-minimale est le nombre et la variété des exemples qui l'illustrent. Ils montrent l'étendue de son champ d'application, confirmant ainsi la pertinence du programme de géométrie modérée de Grothendieck. Nous reprenons les notations de la section précédente, en désignant par $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ la structure engendrée par une collection $\mathcal{F}$ de fonctions réelles.

1) La structure $\mathbb{R}_\emptyset$ associée à $\mathcal{F} = \emptyset$. Les ensembles définissables de la structure $\mathbb{R}_\emptyset$ sont exactement les sous-ensembles semi-algébriques des espaces réels. Il est facile de voir que la famille des sous-ensembles semi-algébriques de l'espace $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, est une algèbre de Boole. En revanche, il est plus délicat de montrer que la collection des ensembles semi-algébriques est stable par projection linéaire. C'est une conséquence du célèbre théorème d'élimination de Tarski-Seidenberg [34, 33].

Maintenant, il est clair que les ensembles semi-algébriques de la droite réelle, étant définis par des polynômes réels en une variable, sont les unions finies de points et d'intervalles. La structure $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est donc o-minimale. On pourrait déduire des théorèmes “modérés” de la section précédente que tout ensemble semi-algébrique a un nombre fini de composantes connexes. En réalité, les preuves de ces théorèmes s'inspirent de ce qui était bien connu dans le cadre semi-algébrique, notamment la notion de *décomposition cylindrique*.

2) La structure $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$. Cette structure est engendrée par la collection des *fonctions analytiques restreintes* $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$, dont la restriction à $[-1,1]^n$ est analytique réelle et qui sont identiquement nulles hors de $[-1,1]^n$. Les ensembles définissables de cette structure sont les sous-ensembles *sous-analytiques*. Il est clair, par définition, que cette collection est stable par projection linéaire. En revanche, il est plus difficile de montrer que la famille des ensembles sous-analytiques de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, est une algèbre de Boole. On sait bien qu'un théorème d'élimination du type Tarski-Seidenberg n'est pas valide dans le cadre analytique réel (il existe un contre-exemple ancien du à W. Osgood [30]). On utilise donc un autre énoncé, le *théorème du complémentaire*

1. Cette terminologie est une allusion faite par L. van den Dries dans l'introduction de [12] au texte, qu'il qualifie de “prophétique”, *Esquisse d'un programme* d'A. Grothendieck [20]. Van den Dries estime que les structures o-minimales constituent un “cadre excellent pour le développement de la *topologie modérée* de Grothendieck”, telle que ce dernier la décrit dans le cinquième chapitre de son *Esquisse*.

de Gabrielov [17], qui dit essentiellement que le complémentaire d'un ensemble sous-analytique est également sous-analytique.

Là encore, il est clair que les sous-ensembles de la droite réelle définissables dans cette structure sont exactement les unions finies de points et d'intervalles, et donc que la structure $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ est o-minimale.

Ces deux exemples correspondent aux cadres bien étudiés de la *géométrie algébrique réelle* et de la *géométrie analytique réelle*. On peut donc voir la notion de structure o-minimale comme une extension de ces deux situations. Cette vision des choses mène naturellement à la question suivante :

> *Etant donnée une structure o-minimale $\mathcal{S}$, de quelles propriétés des ensembles semi-algébriques ou sous-analytiques héritent les ensembles définissables dans $\mathcal{S}$?*

Les "théorèmes modérés" de la section précédente répondent partiellement à cette question : les ensembles définissables héritent de la géométrie modérée. Nous verrons dans ce travail que d'autres propriétés, plus inattendues, peuvent également être satisfaites par certaines structures.

Donnons deux autres exemples devenus classiques, bien que plus récents. Ils sont tous deux dûs à. A. Wilkie.

3) La structure $\mathbb{R}_{\exp}$. Il s'agit de la structure engendrée par le singleton $\mathcal{F} = \{\exp\}$. Le fait que les ensembles définis par un nombre fini d'égalités et d'inégalités satisfaites par des polynômes exponentiels ont un nombre fini de composantes connexes résulte des travaux de Hovanskii [24]. A. Wilkie a montré dans [35] que le complémentaire de la projection linéaire d'un tel ensemble est encore un ensemble de même nature (c'est donc un analogue exponentiel du théorème du complémentaire de Gabrielov, une propriété que les spécialistes de théorie des modèles appellent *modèle-complétude*). Ainsi, $\mathbb{R}_{\exp}$ est bien une structure, de surcroît o-minimale grâce à la propriété de finitude.

Elle présente une différence notable avec les structures $\mathbb{R}_{\emptyset}$ et $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$: dans ces deux dernières, le germe à l'infini d'une fonction définissable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a une croissance au plus polynomiale. On dit qu'il s'agit de structures *polynomialement bornées*. Ce n'est évidemment pas le cas de $\mathbb{R}_{\exp}$. C'est avec cet exemple que la théorie des structures o-minimales prend véritablement son ampleur. D'une part, il donne une réponse positive au problème de finitude de Tarski sur les propriétés de l'exponentielle réelle, qui était la motivation originelle de l'introduction de cette notion par L. van den Dries. D'autre part, il montre qu'il n'y a aucune raison de contenir la géométrie modérée dans son cadre initial (algébrique et analytique), et permet de penser que bien d'autres fonctions "modérées", au sens de *non oscillantes*, peuvent relever du programme original d'A. Grothendieck.

4) La structure $\mathbb{R}_{\mathrm{Pfaff}}$. Ce dernier exemple classique est apparu dans l'article [36]. La famille génératrice $\mathcal{F}$ est celle des *fonctions pfaffiennes*, dont un rappel de la définition complète dépasserait le cadre de ce travail. Disons simplement qu'il s'agit de fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ définies par des systèmes triangulaires d'équations différentielles polynomiales du premier ordre [2]. A. Wilkie justifie dans [36] que la structure $\mathbb{R}_{\mathrm{Pfaff}}$ est o-minimale, en démontrant qu'elle s'étend en une structure qui vérifie une propriété du complémentaire à la Gabrielov, et en s'appuyant sur les résultats de finitude de Khovanskii.

2. Depuis les travaux de Hovanskii [23], il existe plusieurs façons d'introduire la notion d'ensembles et de fonctions pfaffiennes. Nous pouvons mentionner celle de R. Moussu et C. Roche, basée sur la notion de *feuille de Rolle* de feuilletage analytique de codimension 1 d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ [29]. Il a été montré par J.-M. Lion et J.-P. Rolin dans [25] que les feuilles de Rolle engendrent également une structure o-minimale.

1.3 O-minimalité et quasianalyticité

Le cadre de notre travail est celui des *algèbres de fonctions quasianalytiques*. On trouve dans la littérature plusieurs définitions de ce terme, dépendant considérablement du type des fonctions étudiées. Nous nous concentrerons sur le cas de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous disons dans ce cas qu'une algèbre $\mathcal{A}$ de germes $\mathcal{C}^\infty$ en l'origine de $\mathbb{R}^n$ est *quasianalytique* si l'application qui à tout élément $f \in \mathcal{A}$ associe son développement de Taylor $\hat{f} \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$ est injective. L'application de Taylor constitue donc une sorte de "dictionnaire" entre l'algèbre $\mathcal{A}$ et une sous-algèbre de $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$, dont il est raisonnable de penser qu'on peut déduire des informations géométriques.

La notion de quasianlyticité a été introduite par E. Borel dans [2, 3], à qui l'on doit les premiers exemples d'ensembles de fonctions quasianalytiques en tout point de l'intervalle $[0, 1]$. Après cette découverte de Borel, on doit à Hadamard l'idée qu'il devrait être possible de lier la propriété de quasianalyticité à une condition de croissance sur les dérivées successives [21]. La réponse précise à cette question a été apportée indépendamment par A. Denjoy [9] et T. Carleman [5]. Rappelons la, bien que nous ne l'utilisions pas explicitement dans la suite.

Considérons une suite croissante $M = (M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $M_1 \geq 1$, et $B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ avec $a_k < b_k$ pour $k = 1, \ldots, n$. On désigne par $\mathcal{C}_B(M)$ la collection des fonctions $f\colon B \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe un voisinage ouvert U de B, une fonction $g\colon U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et une constante $A > 0$ tels que $g|_B = f$ et

$$\left|g^{(a)}(x)\right| \leq A^{|\alpha|+1} \cdot M_{|\alpha|} \text{ pour tous } x \in U \text{ et } \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. On appelle $\mathcal{C}_B(M)$ la *classe de Denjoy-Carleman sur B associée à M*. On peut supposer sans perdre de généralités que M est *logarithmiquement convexe*, c'est à dire que $M_i^2 \leq M_{i-1}M_{i+1}$ pour tout $i > 0$. On dit que la classe $\mathcal{C}_B(M)$ est *quasianalytique* si pour tout $x \in B$, le développement de Taylor $\widehat{f_x}$ de f au point x détermine f de façon unique parmi les éléments de $\mathcal{C}_B(M)$. On a alors :

Théorème 1.4 (Denjoy-Carleman) *La classe $\mathcal{C}_B(M)$ est quasianalytique si et seulement si*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{M_i}{M_{i+1}} = \infty.$$

De façon générale, les développements de Taylor des germes quasianalytiques ne sont pas des séries convergentes. De tels germes ne sont donc pas égaux à la somme de leur développement de Taylor, mais ils sont tout de même déterminés par ceux-ci. En ce sens, la notion de quasianalyticité étend celle d'analyticité. Il est donc naturel de poser la question du lien possible entre quasianalyticité et o-minimalité.

Ce lien apparaît pour la première fois de façon explicite dans l'article de P. Speissegger et L. van den Dries consacré à l'étude de la structure $\mathbb{R}_\mathcal{G}$ engendrée par les *séries multisommables* [14]. Il serait trop long d'en donner la définition précise ici, mais disons simplement qu'il s'agit de fonctions $f\colon [0, R_1] \times \cdots \times [0, R_m] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, obtenues depuis leur développement de Taylor à l'origine par un *procédé de resommation du type Borel-Laplace*. De telles classes de fonctions sont donc quasianalytiques. On montre dans [14] que la structure $\mathbb{R}_\mathcal{G}$ est o-minimale. La preuve utilise la quasianalyticité de façon essentielle. En effet, puisqu'on peut associer à tout germe multisommable f non nul un développement de Taylor à l'origine $\widehat{f}$ non nul, il est possible d'étudier les ensembles du type $\{f = 0, g_1 > 0, \ldots, g_k > 0\}$, où $f, g_1, \ldots, g_k$ sont multisommables, à l'aide d'un processus *d'éclatements quadratiques*. Il n'est d'ailleurs pas surprenant de retrouver, dans ces structures qui généralisent naturellement la géométrie analytique usuelle, les méthodes analytiques classiques.

Naturellement, une affirmation élémentaire du type "quasianalyticité implique o-minimalité" ne serait pas raisonnable. La famille des ensembles définissables dans une structure est bien trop vaste, pour qu'on puisse espérer montrer la propriété de finitude sur la simple base d'une hypothèse quasianalytique. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple suivant. Considérons une solution quelconque $g : (0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, de l'*équation différentielle d'Euler* $x^2 y' = y - x$. La fonction g est analytique sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$, se prolonge par continuité par $g(0) = 0$, et admet le développement asymptotique divergent

$$\widehat{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n+1}$$

à l'origine. Posons maintenant $f(x) = g(x) + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Autrement dit, f s'obtient en ajoutant un *terme oscillant plat* à g. Malgré la nature oscillante de cette perturbation, l'algèbre $\mathcal{A}_f = \left\{F(x, f(x)) : F \text{ germe analytique en } 0 \in \mathbb{R}^2\right\}$ est quasianalytique. En effet, tout élément non nul $F(x, f(x))$ de $\mathcal{A}_f$ admet à l'origine le développement asymptotique $F\left(x, \widehat{f}(x)\right) = F(x, \widehat{g}(x))$. Or, puisqu'il résulte du théorème de Puiseux que tout série formelle $\widehat{h}(x)$ satisfaisant $F\left(x, \widehat{h}(x)\right) = 0$ est convergente, on a donc $F(x, \widehat{g}(x)) \neq 0$.

Néanmoins la structure $\mathbb{R}_f$ engendrée par f sur le corps des réels n'est pas o-minimale. En effet, on déduit du fait que g est solution de l'équation différentielle d'Euler la relation suivante :

$$x^2 f'(x) - f(x) + x = -\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right);$$

il existe ainsi une fonction oscillante définissable dans la structure $\mathbb{R}_f$, qui ne peut donc être o-minimale. On voit sur cet exemple que la propriété de quasianalyticité satisfaite par l'algèbre initiale $\mathcal{A}_f$ n'est pas suffisante pour garantir la "modération" de toutes les fonctions définissables dans $\mathbb{R}_f$.

Afin de se prémunir contre ce type de phénomène, J.-P. Rolin, P. Speissegger et A. Wilkie ont montré dans [32] que si l'on considère non plus une unique algèbre quasianalytique initiale, mais une collection $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'algèbres quasianalytiques stables par un certain nombre d'opérations "raisonnables", adaptées à la description de la totalité des ensembles définissables, alors la structure $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ est o-minimale. Nous rappelons la liste ces conditions dans notre premier chapitre. En appliquant ce résultat à la famille des algèbres quasianalytiques de Denjoy-Carleman, ils montrent l'existe de deux structures o-minimale incompatibles, c'est dire qui n'admettent pas d'extension o-minimale commune.

C'est dans ce cadre quasianalytique général que se situe notre travail.

1.4 Quasianalyticité et élimination des quantificateurs

Nous considérons dorénavant une "structure quasianalytique" $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ du type étudié dans [32].

Les résultats de [32] montrent qu'il existe de nombreuses analogies entre les ensembles définissables de $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ et les ensembles sous-analytiques. En particulier, l'o-minimalité de $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ résulte d'un théorème du complémentaire à la Gabrielov. On déduit de ce résultat d'un processus de *normalisation* par éclatement des éléments des algèbres quasianalytiques $\mathcal{C}_n$ ou plus précisément de leurs germes en tout point. Dans cette terminologie, un germe à l'origine de $\mathbb{R}^n$ est dit *normal* s'il est égal au produit d'un monôme par une unité, c'est à dire d'un germe quasianalytique U tel que $U(0) \neq 0$. Il en résulte aisément que $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ est d'une structure polynomialement bornée. De plus, tout ensemble définissable de $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ admet une décomposition cellulaire finie en variétés définissables de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ [3].

Dans le cadre de l'étude des propriétés des ensembles sous-analytiques dont pourraient hériter les ensembles définissables de $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, il en est une cependant qui semble moins naturelle que les

3. Mais pas toujours en variétés analytiques. Il existe en effet des éléments de certaines classes de Denjoy-Carleman qui ne sont analytiques en aucun point de de leur domaine de définition.

autres. Il s'agit d'une éventuelle propriété d'*élimination des quantificateurs.* Précisons ce que nous entendons par là. Dans l'article [8], J. Denef et L. van den Dries donnent une preuve originale du théorème du complémentaire de Gabrielov pour les ensembles sous-analytiques. Cette preuve s'éloigne des arguments géométriques classiques, notamment le célèbre *fiber cutting lemma* (ou *lemme de section*) [1, Lemme 3.6], qui s'appuie fortement sur la connexité de $\mathbb{R}$. La raison de ce choix est en effet d'étendre les résultats de géométrie analytique réelle au corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques.

Ils présentent donc le théorème de Gabrielov comme une conséquence immédiate d'un théorème dit "d'élimination des quantificateurs". Le théorème de Tarski-Seidenberg illustre très bien ce que "éliminer les quantificateurs" signifie. Il affirme en effet que toute projection linéaire d'un ensemble semi-algébrique est également semi-algébrique. On peut rapidement se convaincre que ceci équivaut à affirmer que tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ défini par une formule du premier ordre satisfaite par certains polynômes à coefficients réels, et contenant les symboles d'égalité et d'inégalité, peut être défini par une formule du même type *sans quantificateurs.* L'exemple le plus élémentaire que l'on peut donner est l'équivalence entre "le polynôme $P(x)$ de degré 2 admet une racine" et "le discriminant Δ de $P(x)$ est positif ou nul" :

$$\exists x P(x) = 0 \Longleftrightarrow \Delta \geq 0.$$

Nous parlerons indifféremment dans la suite "d'élimination du quantificateur $\exists x$" ou "d'élimination de la variable x". Nous avons déja mentionné qu'on ne dispose pas d'un analogue du théorème de type Tarski-Seidenberg dans le cadre analytique. Donc la structure $\mathbb{R}_{\text{an}}$ ne satisfait pas la propriété d'élimination des quantificateurs. Le résultat principal de [8] affirme qu'il est possible toutefois d'obtenir cette propriété, *quitte à élargir le langage de* $\mathbb{R}_{\text{an}}$. Expliquons ce que ce résultat signifie. Le langage de $\mathbb{R}_{\text{an}}$ est celui des *fonctions analytiques restreintes.* Denef et van den Dries introduisent la fonction $D\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto x/y$ si $|y| \geq |x|$ et $y \neq 0$, et $D(x, y) = 0$ sinon. Appelons *terme du langage* $\mathcal{L}_{\text{an},D}$ une composition finie de fonctions analytiques restreintes et de la fonction D. Par exemple, une fonction de la forme $f(x, y, D(z, D(x, g(y, t))))$, où f et g sont analytiques restreintes, est un terme de $\mathcal{L}_{\text{an},D}$. Le théorème de Denef et van den Dries dit alors que tout sous-ensemble sous analytique de $\mathbb{R}^n$ contenu dans $[-1, 1]^n$ peut être défini par un nombre fini d'égalité et d'inégalités satisfaites par des termes du langage $L_{\text{an},D}$. Autrement dit, il s'agit bien d'un résultat d'élimination des quantificateurs adapté au cadre analytique, mais au prix de l'enrichissement du langage initial des fonctions analytiques restreintes par la fonction D.

On voit que le théorème du complémentaire de Gabrielov se déduit aisément de ce résultat. En effet, puisque un ensemble sous-analytique de $E \subset [-1, 1]^n$ est décrit par un nombre fini d'égalités et d'inégalités satisfaites par des termes de $\mathcal{L}_{\text{an},D}$, on décrit aisément son complémentaire $[-1, 1]^n \setminus E$ en renversant ces inégalités et en remplaçant chaque égalité par deux inégalités [4].

Le résultat principal de notre travail est un analogue de ce théorème dans le cadre quasianalytique de [32]. Autrement dit, tout ensemble définissable de la structure $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ est défini par un nombre fini d'égalités et d'inégalités satisfaites par des *termes* obtenus comme compositions de fonctions des algèbres de la classe $\mathcal{C}$ restreintes à un polydisque compact, de polynômes, de la fonction $x \mapsto x^{-1}$ pour $x \neq 0$, et des fonctions $x \mapsto x^{1/n}$ pour $x > 0$. On note deux différences avec l'énoncé de Denef et van den Dries :

i) la première, qui consiste à remplacer la fonction D par la fonction $x \mapsto x^{-1}$, est une modification mineure, déjà notée dans [13]. Elle permet de se débarrasser de la contrainte de ne considérer que des sous-ensembles sous-analytiques de $[-1, 1]^n$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) la seconde consiste à enrichir également le langage de la structure $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ non seulement par la fonction $x \mapsto x^{-1}$, mais également par les fonctions $x \mapsto x^{1/n}$, $n \neq 0$. Ceci résulte de notre preuve, dont nous expliquons ci-dessous en quoi elle diffère de celle de [8]. Nous ne savons pas (même si nous le pensons) si cette extension est nécessaire.

4. Notons que H. Hironaka procède de même dans [22] pour déduire le théorème du complémentaire de Gabrielov de son *théorème de rectilinéarisation des ensembles sous-analytiques.*

A la suite, nous définissons les $\mathcal{T}_n$-ensembles comme étant les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ définis par un nombre fini d'égalités et d'inégalités à l'aide des termes. Cela nous conduit à définir les $\mathcal{T}_n$-cylindres.

Définition 1.4 *Un* $\mathcal{T}_n$-cylindre C *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *défini à l'aide d'un* $\mathcal{T}_n$*-ensemble* B *appelé* base *et d'un ou de deux termes* ϕ *et* ψ *de l'une des manières suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{(X,y)\in\mathbb{R}^{n+1}; X\in B \text{ et } \phi(X)<y<\psi(X)\} \\ C & = & \{(X,y)\in\mathbb{R}^{n+1}; X\in B \text{ et } y<\psi(X)\} \\ C & = & \{(X,y)\in\mathbb{R}^{n+1}; X\in B \text{ et } \phi(X)<y\} \\ C & = & \{(X,y)\in\mathbb{R}^{n+1}; X\in B \text{ et } y=\phi(X)\} \end{array}$$

La raison pour laquelle notre théorème n'est pas une extension des résultats analytiques à laquelle on pouvait s'attendre *a priori* est la suivante. C'est principalement le fait que la preuve du théorème de Denef et van den Dries s'appuie fortement sur le théorème de préparation de Weierstrass, qui affirme qu'un germe analytique $f(x,y)\in\mathcal{O}_{n+1}$, régulier en la variable y (*i. e.* $f(0,y)\neq 0$), peut s'écrire sous la forme

$$f(x,y)=U(x,y)\left(y^d+a_1(x)\,y^{d-1}+\cdots+a_d(x)\right),$$

où $U(x,y)$ est un germe d'unité analytique et les $a_i\in\mathcal{O}_n$ avec $a_i(0)=0$ pour $i=1,\ldots,d$. Ce théorème est utilisé dans [8] à deux reprises.

i) C'est d'une part un argument incontournable de la preuve du Lemme 4.12 de [8], qui permet de donner une "présentation finie" aux germes analytiques. Grâce à ce lemme, on peut réécrire les fonctions analytiques avec lesquelles on travaille de telle sorte qu'elles soient régulières en la variable que l'on souhaite éliminer.

ii) D'autre part, une fois que l'on travaille avec des fonctions régulières en la variable voulue, le théorème de préparation de Weierstrass permet de les supposer polynomiales en cette variable. On peut alors les éliminer grâce à une variante classique du théorème de Tarski-Seidenberg.

Or il est connu que le théorème de Weierstrass fait généralement défaut dans les classes quasianalytiques [5]. C'est d'ailleurs la raison qui conduit à utiliser une *normalisation* [6] des germes quasianalytiques dans [32] pour prouver l'o-minimalité de $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. L'essentiel de notre travail consiste donc à adapter la stratégie de Denef et van den Dries, en remplaçant le théorème de Weierstrass par d'autres outils, que nous résumons maintenant.

Commençons par une remarque, qui concerne ce que nous avons appelé "mise sous présentation finie" des germes analytiques. Soit $f(x,y)\in\mathcal{O}_{m+n}$ un germe analytique sans hypothèse de régularité particulière. Alors il existe un entier $d\in\mathbb{N}$ tel que

$$f(x,y)=\sum_{|J|<d} f_J(x)\,y^J U_J(x,y),$$

où $f_J=\frac{1}{J!}\frac{\partial^J f}{\partial x^J}(x,0)\in\mathcal{O}_m$ et la dérivée partielle U_J est une unité de $\mathcal{O}_{m+n}$, pour tout multi-indice $J=(j_1,\ldots,j_n)$ avec $|J|=j_1+\cdots+j_n<d$. Nous ne pouvons espérer une telle propriété dans les algèbres quasianalytiques. Mais ceci n'est pas un obstacle majeur. En effet, cette présentation finie est utilisée dans [8] afin de réécrire f de telle sorte qu'elle soit régulière en une variable y_j $(j=1,\ldots,n)$ choisie au préalable. Si l'on travaille dans le cadre quasianalytique, on remarque qu'un germe $f(x,y)$ est régulier en y_j si et seulement si son développement de Taylor

5. Voir par exemple [6]

6. C'est à dire le fait de transformer par éclatements un germe quasianalytique en le produit d'un monome par une unité

$\widehat{f}(X,Y) \in \mathbb{R}[[X,Y]]$ est régulier dans la variable Y_j. Mais, même si la présentation finie de $f(x,y)$ n'est pas valide, on peut toujours écrire $\widehat{f}(X,Y)$ sous la forme

$$\widehat{f}(X,Y) = \sum \frac{1}{J!}\frac{\partial^J \widehat{f}}{\partial x^J}(x,0)\, Y^J U_J(X,Y)\,, \text{ avec } U_J \in \mathbb{R}[[X,Y]] \text{ et } U_J(0,0) \neq 0,$$

en raison de la noethérianité de l'anneau $\mathbb{R}[[X,Y]]$. Donc, en raison de cette présentation finie au niveau formel, il nous sera possible de supposer que la variable y_j de notre choix est régulière dans $f(x,y)$.

Notre problème majeur est celui de l'élimination d'une variable régulière, puis de l'élimination successive de plusieurs variables. Nous nous appuyons pour cela sur la procédure de *normalisation* des germes quasianalytiques par éclatements évoquée plus haut.

Notre stratégie est donc de traiter le problème d'élimination dans $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ en montrant comment résoudre les systèmes d'équations quasianalytiques [7]. La résolution d'une équation quasianalytique $f(x,y) = 0$ où $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ par rapport à l'inconnue y se déduit aisément du procédé de normalisation. En revanche, notre méthode de résolutions des systèmes d'équations quasianalytiques nous amène à résoudre par rapport à l'inconnue y des équations du type $F(x,y) = 0$, où F est un *terme* du langage $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ complété par les fonctions $x \mapsto x^{-1}$ et $x \mapsto x^{1/n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Nous montrons qu'il suffit, pour résoudre ces équations, de prouver que les *parties principales* de leurs solutions sont des termes de notre langage étendu. Mais nous n'avons pas trouvé de méthode élémentaire, du moins qui ne relève que des techniques classiques d'éclatements, pour trouver ces parties principales.

Par conséquent nous nous sommes appuyés sur un résultat de théorie des modèles, dû à L. van den Dries et P. Speissegger [15], appelé *théorème de préparation des fonctions définissables dans une structure polynomialement o-minimale bornée*. Son énoncé, que nous donnons précisément dans le Chapitre 5, affirme que les fonctions définissables d'une telle structure (et donc en particulier de la structure $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$) admettent par morceaux une forme factorisée, et donc une partie principale particulièrement simple. C'est précisément ce qu'il nous faut pour résoudre les équations définies par des termes du langage étendu.

Nous obtenons par ce moyen notre résultat principal :

Théorème A : *Les fonctions définissables sont, par morceaux, des termes. Autrement dit, pour toute fonction définissable ϕ admettant n variables, il existe un recouvrement cylindrique fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $\mathcal{T}_n$-cylindre $C \in \mathcal{R}$, il existe un terme g tel que :*

$$\forall X \in C, \quad \phi(X) = g(X)$$

En corollaire, nous obtenons le théorème d'élimination des quantificateurs :

Théorème B : *La structure $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ admet la propriété d'élimination des quantificateurs dans son langage naturel, étendu par :*

1. *le symbole $^{-1}$ représentant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $0 \mapsto 0$,*
2. *les symboles $^{1/n}$ représentant les fonctions $x \mapsto x^{1/n}$ pour $x > 0$ et $0 \mapsto 0$, avec $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.*

Un résultat analogue a auparavant été annoncé par A. Rambaud dans sa thèse [31]. Bien que s'appuyant également sur les résultats de [32], nos méthodes sont différentes. Nous montrons le Théorème A en nous basant sur la paramétrisation des ensembles définissables donnée dans [32], puis en éliminant les paramètres à l'aide du théorème de préparation de van den Dries et Speissegger [15].

7. C'est pour cette raison que nous travaillons dans un langage étendu par les fonctions $x \mapsto x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 2

Généralités

Ce premier chapitre est destiné à présenter les différents objets sur lesquels s'appuie ce travail. Nous commencerons par définir les transformations élémentaires sur les séries de Taylor associées à des germes de fonctions au voisinage de l'origine. pour constater que cela revient à opérer une transformation similaire sur les fonctions. Nous introduirons alors la notion de transformation élémentaire sur les fonctions. L'étude d'un exemple nous permettra d'expliciter notre méthode de résolution et d'introduire les transformations inverses afin de définir la notion de termes.

2.1 Définitions et résultats

Nous allons tout d'abord préciser les principaux résultats et les notations que nous utiliserons dans notre travail. Pour cela, nous nous appuyons sur l'article de J.P. Rolin, P. Speisseger et A. Wilkie[32].

2.1.1 Hypothèses sur notre ensemble de fonctions

Pour simplifier les écritures, on écrira $X = (x_1, ..., x_n)$ et $X' = (x_1, ..., x_{n-1})$ pour $n > 0$. Pour $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $X^r = x_1^{r_1} ... x_n^{r_n}$.

Pour chaque pavé compact $B = [a_1; b_1] \times ... \times [a_n; b_n]$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i = 1, ..., n$, $a_i < b_i$, on considère une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{C}_B$ de fonctions $f : B \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(C1) Pour tout $i = 1, ..., n$, $\mathcal{C}_B$ contient la fonction projection $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$. De plus, pour chaque fonction $f \in \mathcal{C}_B$, la restriction de f à $\mathrm{Int}(B)$, l'intérieur de B, est de classe C^∞.

(C2) Si $B' \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé compact et si $g_1, ..., g_n \in \mathcal{C}_{B'}$ sont des fonctions telles que, pour tout $i = 1, ..., n$, $g_i(B') \subset B$, alors, pour tout $f \in \mathcal{C}_B$, la fonction définie sur B' par $y \mapsto f(g_1(y), ..., g_n(y))$ appartient à $\mathcal{C}_{B'}$.

(C3) Si $B' \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé compact contenu dans B, alors pour tout $f \in \mathcal{C}_B$, $f_{|B'} \in \mathcal{C}_{B'}$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{C}_B$, il existe un pavé compact $B'' \subset \mathbb{R}^n$ avec $B \subset \mathrm{Int}(B'')$ et une fonction $g \in \mathcal{C}_{B''}$ tels que $g_{|B} = f$.

Remarque 1: Ces trois conditions montrent qu'une fonction $f \in \mathcal{C}_B$ peut s'étendre en une fonction g de classe C^∞ sur un voisinage ouvert de B. Cette nouvelle fonction admet des dérivées partielles, on notera par la suite, pour tout $i = 1, ..., n$, la restriction de $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ à B par $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.
Nous imposons alors les conditions suivantes :

(C4) Si $f \in \mathcal{C}_B$, alors, pour tout $i = 1, ..., n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}_B$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r = (r_1, ..., r_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on note $I_r = (-r_1; r_1) \times ... \times (-r_n; r_n)$, $\bar{I_r} = \mathrm{adh}(I_r)$, $\mathcal{C}_{\bar{I_r}} = \mathcal{C}_{n,r}$. Nous appelons $\mathcal{C}_n$ l'ensemble de tous les germes à l'origine des fonctions de $\cup_{r \in (\mathbb{R}_+^*)^n} \mathcal{C}_{n,r}$. A chaque germe $f \in \mathcal{C}_n$, nous associons son développement de Taylor à l'origine noté $\widehat{f} \in \mathbb{R}[[X]]$.

(C5) L'application qui à $f \in \mathcal{C}_n$ associe $\widehat{f}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres. Il s'agit de l'hypothèse de quasi-analycité. Nous notons $\widehat{\mathcal{C}_n}$ l'ensemble des séries formelles associées.

(C6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si une fonction $f \in \mathcal{C}_n$ vérifie $f(0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x_n}(0) \neq 0$, alors il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_{n-1}$ avec $\alpha(0) = 0$ et $f(X', \alpha(X')) = 0$. Il s'agit de la stabilité pour le théorème des fonctions implicites.

(C7) Soit $f \in \mathcal{C}_n$. S'il existe un entier $i \leq n$ et une série $G \in \mathbb{R}[[X]]$ tels que $\widehat{f} = x_i G$, alors il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_n$ telle que $f = x_i g$ et $\widehat{g} = G$. Il s'agit de la stabilité pour la division monomiale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous choisissons une $\mathbb{R}$-sous algèbre $\mathcal{D}_n$ de $\mathcal{C}_{n,1}$, qui est close pour les dérivées partielles et contient les projections sur la i-ième variable. On note alors $\mathcal{F} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n$ et $\mathbb{R}_{\mathcal{D}} = \mathbb{R}(\mathcal{F})$. Nous utiliserons les résultats suivants démontrés dans l'article [32] :

Théorème 2.1 *La structure $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ est o-minimale et modèle complète.*

Théorème 2.2 *$\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ est polynomialement bornée. De plus, la fonction $x \mapsto x^\lambda$ définie sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est définissable si et seulement si $\lambda \in \mathbb{Q}$.*

2.1.2 Relation de comparaison sur les fonctions

Nous reprenons les définitions qui figurent dans l'article [26] :

Définition 2.1 *Soient f et g deux fonctions définies sur un sous-ensemble B de $\mathbb{R}^n$. Nous définissons les relations de comparaison de la manière suivante :*

1. *La fonction f domine la fonction g sur B s'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :*
$$\forall X \in B, |g(X)| \leq K|f(X)|$$
Nous noterons $g \prec f$.

2. *Les fonctions f et g sont équivalentes sur B si f domine g et g domine f sur B. Nous noterons $f \sim g$.*

3. *Une unité sur B est une fonction de signe constant sur B, équivalente à la fonction 1 sur B.*

2.1.3 Cylindres

Définition 2.2 *Nous appellerons un $\mathcal{C}_n$-ensemble un sous-ensemble B de $\mathbb{R}^n$ défini par un nombre fini d'égalités et d'inégalités à l'aide de fonctions de $\mathcal{C}_n$. Autrement dit, il existe deux entiers $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et deux familles finies $(f_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ et $(g_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ d'éléments de C_n avec $I = \{1, ..., p\}$ et $J = \{1, ..., q\}$ tels que :*

$$B = \cup_{i \in I} \Big(\cap_{j \in J} \{X \in \mathbb{R}^n; f_{i,j}(X) = 0, g_{i,j}(X) > 0\} \Big)$$

Nous appelerons un $\mathcal{C}_n$-cylindre un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^{n+1}$ construit à l'aide d'un $\mathcal{C}_n$-ensemble B de $\mathbb{R}^n$ appelé base et d'une ou de deux fonctions ϕ et ψ de $\mathcal{C}_n$, et défini de l'une des manières suivantes :

$$C = \{(X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; X \in B, \phi(X) < y < \psi(X)\}\ ;$$
$$C = \{(X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; X \in B, y < \phi(X)\}\ ;$$
$$C = \{(X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; X \in B, \phi(X) < y\}\ ;$$
$$C = \{(X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; X \in B, y = \phi(X)\}.$$

2.2 Transformations élémentaires sur les séries formelles

Si nous considérons un élément f de $\mathcal{C}_n$, nous pouvons lui associer une unique série formelle, son développement de Taylor à l'origine, notée $\widehat{f}$. Nous effectuerons sur cette série formelle un nombre fini de transformations élémentaires dans le but d'obtenir des informations sur la fonction f. Suivant la méthode mise en oeuvre dans l'article [32], nous ne nous autorisons que les homomorphismes d'algèbres suivants :

Définition 2.3 1. ***Les éclatements :*** *ils se classent en deux types possibles. Pour le premier, le type (I), nous fixons un indice $j \in \{1, ..., n\}$, un monôme m ne contenant pas la variable x_j et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous définissons l'éclatement $\widehat{b}_\lambda^{m,x_j}$ par :*

$$\widehat{b}_\lambda^{m,x_j}(x_1, ..., x_j, ..., x_n) = (x_1, ..., m(\lambda + x_j), ..., x_n)$$

Pour le second, le type (II), nous nous donnons $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$ avec $i \neq j$ et nous définissons $\widehat{b}_\infty^{x_i,x_j}$ par :

$$\widehat{b}_\infty^{x_i,x_j}(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = (x_1, ..., x_i x_j, ..., x_n)$$

2. ***Les translations :*** *Nous définissons une transformation de type Tchirnhausen $\widehat{t}_{\widehat{\alpha}}^{x_i}$ par la donnée de $\widehat{\alpha} \in \widehat{C}_n$ avec $\widehat{\alpha}(0) = 0$, $i \in \{1, ..., n\}$ et par :*

$$\widehat{t}_{\widehat{\alpha}}^{x_i}(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = (x_1, ..., x_i + \alpha(X), ..., x_n)$$

3. ***Les ramifications :*** *soit p un nombre entier strictement positif. Nous définissons les ramifications $\widehat{r}_i^{+,p}$ et $\widehat{r}_i^{-,p}$ par les égalités suivantes :*

$$\widehat{r}_i^{+,p}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_i^p, ..., x_n) \text{ et } \widehat{r}_i^{-,p}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., -x_i^p, ..., x_n)$$

Les transformations précédentes seront appelées les transformations élémentaires formelles. la composée de ces transformations est dite changement élémentaire d'indéterminées que l'on notera $\widehat{b}$.
Si, dans notre composée, il n'y a pas de transformation du type $b_\infty^{x_i,y}$ avec $i \in \{1, ..., n\}$, ni de translation $t_\alpha^{x_i}$ avec α dépendant de y, alors nous dirons que la transformation conserve la verticalité de la variable y.
De plus, si $\widehat{f} \in \mathbb{R}[[X]]$ est une série formelle et $\widehat{b}$ est un changement élémentaire d'indéterminées , nous noterons $\widehat{b}\widehat{f}$ la série obtenue à partir de $\widehat{f}$ en effectuant la transformation $\widehat{b}$.

Remarque 2: Puisqu'un changement élémentaire d'indéterminées $\widehat{b}$ est un composé d'homomorphismes d'algèbre, $\widehat{b}$ est un homomorphisme d'algèbre. En particulier, nous pouvons écrire :

$$\forall (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2) \in \mathbb{R}[[X]], \quad \widehat{b}(\widehat{f}_1 \widehat{f}_2) = \widehat{b}(\widehat{f}_1)\widehat{b}(\widehat{f}_2) \text{ et } \widehat{b}(\widehat{f}_1 + \widehat{f}_2) = \widehat{b}\widehat{f}_1 + \widehat{b}\widehat{f}_2$$

Définition 2.4 *Soit $(\widehat{b}_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ une famille finie de transformations élémentaires. Nous appellerons transformation élémentaire formelle la composée $\widehat{b}$ des éléments de la famille. Nous noterons alors :*

$$\forall \widehat{f} \in \widehat{C}_n, \widehat{b}\widehat{f} = \widehat{b}_p ... \widehat{b}_1 \widehat{f}$$

Nous appellerons arbre formel de changement élémentaire d'indéterminées un ensemble de transformations élémentaires formelles.

Remarque 3: Nous utiliserons dans la suite la notation $\widehat{\mathcal{T}}$ pour les arbres de transformations formelles.

Définition 2.5 *Nous appellerons transformation admissible formelle un des ensembles de transformations élémentaires suivant :*

1. $\widehat{\tau} = \{\widehat{t^{x_i}_\alpha}\}$ *pour un entier* $i \in \{1, ..., n\}$ *et une fonction* $\alpha \in \mathcal{C}_{n-1}$ *;*
2. $\widehat{\tau} = \{\widehat{r_i^{+,p}}, r_i^{-,p}\}$ *pour un indice* $i \in \{1, ..., n\}$ *et un entier* $p \in \mathbb{N}^*$ *;*
3. $\widehat{\tau} = \{\widehat{b^{x_i,x_j}_\lambda}; \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ *pour un couple d'indices* $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$.

Remarque 4: si $\widehat{b}$ est une transformation élémentaire, nous voyons qu'il existe une transformation admissible formelle $\widehat{\tau}$ telle que $\widehat{b} \in \widehat{\tau}$. Nous dirons que $\widehat{\tau}$ est la transformation admissible formelle associée à b. Par la suite, nous pourrons écrire $\widehat{bf}$ au lieu de $\{\widehat{bf}; \widehat{b} \in \widehat{\tau}\}$.

Définition 2.6 *Un arbre de transformations élémentaires formelles* $\widehat{\mathcal{T}}$ *sera dit admissible si et seulement si pour tout changement élémentaire d'indéterminées* $\widehat{b} = \widehat{b}_n ... \widehat{b}_1 \in \widehat{\mathcal{T}}$*, nous avons la propriété suivante :*
"Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$*, nous notons* $\widehat{\tau}_i$ *la transformation admissible associée à* $\widehat{b}_i$*. Alors pour tout* $\tilde{b} \in \widehat{\tau}_i$*, il existe un changement élémentaire d'indéterminées* $\overline{b}$ *tel que* $\overline{b}\tilde{b}\widehat{b}_{i-1} ... \widehat{b}_1 \in \widehat{\mathcal{T}}$*."*

2.3 Propriétés de l'application $f \mapsto \widehat{f}$

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à l'application qui associe à une fonction sa série de Taylor à l'origine. Nous allons démontrer des propriétés sur les séries de taylor que nous utiliserons par la suite. Puis nous montrerons que les transformations élémentaires sur les séries formelles peuvent se traduire par des opérations sur les fonctions.

2.3.1 Rappels sur les séries de Taylor

Soit $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ une fonction définie sur le pavé B. Nous écrivons la série de Taylor associée :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(X, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{i_1+...+i_{n+1}=i} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n+1} i_j!} (\prod_{j=1}^{n} x_j^{i_j}) y^{i_{n+1}} \frac{\partial^i f}{\partial x_{i_1}^{i_1} ... \partial x_{i_n}^{i_n} \partial y^{i_{n+1}}}(0) \Big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Big[\sum_{l=0}^{i} \Big(\sum_{i_1+...+i_n=i-l} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} i_j! l!} (\prod_{j=1}^{n} x_j^{i_j}) y^l \frac{\partial^i f}{\partial x_{i_1}^{i_1} ... \partial x_{i_n}^{i_n} \partial y^l}(0) \Big) \Big] \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \Big[\sum_{i=l}^{\infty} \Big(\sum_{i_1+...+i_n=i-l} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} i_j!} (\prod_{j=1}^{n} x_j^{i_j}) \frac{\partial^i f}{\partial x_{i_1}^{i_1} ... \partial x_{i_n}^{i_n} \partial y^l}(0) \Big) \Big] \frac{y^l}{l!}
\end{aligned}$$

Nous notons :

$$\widehat{a}_l(X) = \sum_{i=l}^{\infty} \Big(\sum_{i_1+...+i_n=i-l} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} i_j!} (\prod_{j=1}^{n} x_j^{i_j}) \frac{\partial^i f}{\partial x_{i_1}^{i_1} ... \partial x_{i_n}^{i_n} \partial y^l}(0) \Big)$$

Nous avons alors après avoir effectué un changement d'indice :

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_l(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{i_1+...+i_n=k} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} i_j!} (\prod_{j=1}^{n} x_j^{i_j}) \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x_{i_1}^{i_1} ... \partial x_{i_n}^{i_n} \partial y^l}(0) \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{i_1+...+i_n=k} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} i_j!} (\prod_{j=1}^{n} x_j^{i_j}) \frac{\partial^k (\frac{\partial^l f}{\partial y^l})}{\partial x_{i_1}^{i_1} ... \partial x_{i_n}^{i_n}}(0) \Big) \\
&= \widehat{\frac{\partial^l f}{\partial y^l}}(X, 0)
\end{aligned}$$

En effet, en appliquant la formule de Taylor à la fonction $\frac{\partial^l f}{\partial y^l}$, nous avons :

$$\widehat{\frac{\partial^l f}{\partial y^l}}(X,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{i_1+\ldots+i_{n+1}=i}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n+1}i_j!}(\prod_{j=1}^{n}x_j^{i_j})y^{i_{n+1}}\frac{\partial^i(\frac{\partial^l f}{\partial y^l})}{\partial x_{i_1}^{i_1}\ldots\partial x_{i_n}^{i_n}\partial y^{i_{n+1}}}(0)\right)$$

Pour $y=0$, il reste les termes tels que $i_{n+1}=0$. Autrement dit, nous avons :

$$\widehat{\frac{\partial^l f}{\partial y^l}}(X,0)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{i_1+\ldots+i_n=i}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n+1}i_j!}(\prod_{j=1}^{n}x_j^{i_j})\frac{\partial^i(\frac{\partial^l f}{\partial y^l})}{\partial x_{i_1}^{i_1}\ldots\partial x_{i_n}^{i_n}}(0)\right)$$

Pour tout $l\in\mathbb{N}$, nous définissons la fonction $f_{l,y}$ par :

$$\forall X\in I_{r'},\quad f_{l,y}(X)=\frac{\partial^l f}{\partial y^l}(X,0)$$

Nous avons alors : $\widehat{f_{l,y}}=\widehat{a}_l$. D'après la condition de stabilité pour la dérivation partielle, nous savons que, pour tout $l\in\mathbb{N}$, $f_{l,y}\in\mathcal{C}_n$, donc $\widehat{a}_l\in\widehat{\mathcal{C}}_n$. L'hypothèse de quasi-analycité nous permet de conclure que, pour tout $l\in\mathbb{N}$, il existe une fonction $a_l\in\mathcal{C}_n$ telle que $\widehat{(a_l)}=\widehat{a}_l$.

2.3.2 Propriétés

Nous démontrons les propositions suivantes :

Proposition 2.3 *Soit $(f,g)\in(\mathcal{C}_n)^2$, nous avons les égalités suivantes :*

$$\widehat{f+g}=\widehat{f}+\widehat{g}\ \text{ et }\ \widehat{fg}=\widehat{f}\widehat{g}$$

Preuve : Nous considérons deux fonctions f et g éléments de $\mathcal{C}_n$. D'après ce qui précède, nous savons que :

$$\widehat{f}(X',x_n)=\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^l f}{\partial x_n^l}}(X',0)\frac{x_n^l}{l!}\ \text{ et }\ \widehat{g}(X',x_n)=\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^l g}{\partial x_n^l}}(X',0)\frac{x_n^l}{l!}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\widehat{(f+g)}(X',x_n)&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\partial^l\widehat{(f+g)}}{\partial x_n^l}(X',0)\frac{x_n^l}{l!}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\widehat{\frac{\partial^l f}{\partial x_n^l}}(X',0)+\widehat{\frac{\partial^l g}{\partial x_n^l}}(X',0)\right)\frac{x_n^l}{l!}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^l f}{\partial x_n^l}}(X',0)\frac{x_n^l}{l!}+\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^l g}{\partial x_n^l}}(X',0)\frac{x_n^l}{l!}\\&=\widehat{f}(X',x_n)+\widehat{g}(X',x_n)\end{aligned}$$

La première égalité est démontrée.
Pour justifier la seconde égalité, nous commençons par développer le produit des séries, ce qui donne :

$$\begin{aligned}(\widehat{f}\widehat{g})(X',x_n)&=\left(\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^l f}{\partial x_n^l}}(X',0)\frac{x_n^l}{l!}\right)\times\left(\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^l g}{\partial x_n^l}}(X',0)\frac{x_n^l}{l!}\right)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{l}\frac{1}{p!(l-p)!}\widehat{\frac{\partial^p f}{\partial x_n^p}}(X',0)\widehat{\frac{\partial^{l-p} g}{\partial x_n^{l-p}}}(X',0)\right)x_n^l\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Leibniz pour la dérivation d'un produit de fonctions, nous savons que :

$$\forall X \in I_{r'}, \quad \frac{\partial^l (fg)}{\partial x_n^l}(X',0) = \sum_{p=0}^{l} \binom{l}{p} \frac{\partial^p f}{\partial x_n^p}(X',0)\frac{\partial^{l-p} g}{\partial x_n^{l-p}}(X',0)$$

En reportant dans l'égalité précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(\widehat{f}\widehat{g})(X',x_n) &= \sum_{l=0}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^l (fg)}{\partial x_n^l}}(X',0)\frac{x_n^l}{l!} \\ &= \widehat{(fg)}(X',x_n).\diamond\end{aligned}$$

Proposition 2.4 *Soient $f \in \mathcal{C}_p$ et $(g_1, ..., g_p) \in (\mathcal{C}_n)^p$. Alors nous avons :*

$$(f(\widehat{g_1, ..., g_p})) = \widehat{f}(\widehat{g}_1, ..., \widehat{g}_p)$$

Proposition 2.5 *Soit $f \in \mathcal{C}_n$. Alors, pour tout $i = 1, ..., n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}_n$ et nous avons :*

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i}$$

2.3.3 Lien avec les transformations élémentaires

Proposition 2.6 *Soit $f \in \mathcal{C}_n$. Nous considérons une transformation élémentaire des indéterminées $\widehat{b}$. Il existe une fonction $b \in (\mathcal{C}_n)^n$ telle que : $\widehat{f \circ b} = \widehat{b}\widehat{f}$.*

Preuve : Sans nuire à la généralisation de la démonstration, nous pouvons supposer que f est un élément de $\mathcal{C}_{n+1}$ définie sur un pavé I_r avec $r = (r_1, ..., r_{n+1}) \in (]0; +\infty[)^{n+1}$ et que la transformation $\widehat{b}$ porte sur la dernière indéterminée que nous noterons y. Nous savons que :

$$\widehat{f}(X,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{y^i}{i!}$$

Il faut considérer plusieurs cas selon la nature de la transformation $\widehat{b}$:

- **Premier cas : Les éclatements.**
  Il existe un indice $l \in \{1, ..., n\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\widehat{b} = \widehat{b}_\lambda^{x_l,y}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\widehat{b}\widehat{f}(X,y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{x_l^i(\lambda+y)^i}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{x_l^i \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\lambda^{i-j}y^j}{i!} \quad \text{en utilisant le binôme de Newton} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} \widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{x_l^i\binom{i}{j}\lambda^{i-j}y^j}{i!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{x_l^i\binom{i}{j}\lambda^{i-j}y^j}{i!} \quad \text{en permutant les sommations} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^{k+j} f}{\partial y^{k+j}}}(X,0)\frac{x_l^{k+j}\binom{k+j}{j}\lambda^{k}y^j}{(k+j)!} \quad \text{en posant } k = i-j\end{aligned}$$

Nous en concluons que :

$$\widehat{b}\widehat{f}(X,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^{k+j}f}{\partial y^{k+j}}}(X,0)\frac{x_l^{k+j}\lambda^k y^j}{k!j!} \tag{2.1}$$

Nous définissons la fonction b sur $I_{r'}$ par :

$$\forall (X,y)\in I_{r'},\quad b(X,y)=(X,x_l(\lambda+y))$$

où $r'\in(]0;+\infty[)^{n+1}$ est choisi de sorte que $b(I_{r'})\subset I_r$. Nous notons g la fonction définie sur $I_{r'}$ par : $g=f\circ b$. Pour tout $i\in\mathbb{N}$, nous avons donc :

$$\forall (X,y)\in I_{r'},\quad \frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X,y)=x_l^i\frac{\partial^i f}{\partial y^i}(X,x_l(\lambda+y))$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\widehat{\frac{\partial^i g}{\partial y^i}}(X,0)=x_l^i\widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,\lambda x_l) \tag{2.2}$$

Maintenant, nous savons que :

$$\widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^{i+j}f}{\partial y^{i+j}}}(X,0)\frac{y^j}{j!}$$

D'où, en remplaçant dans l'équation (2.2), nous obtenons :

$$\widehat{\frac{\partial^i g}{\partial y^i}}(X,0)=x_l^i\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^{i+j}f}{\partial y^{i+j}}}(X,0)\frac{x_l^j\lambda^j}{j!}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\widehat{f\circ b}(X,y) &= \widehat{g}(X,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^i g}{\partial y^i}}(X,0)\frac{y^i}{i!}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}x_l^i\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^{i+j}f}{\partial y^{i+j}}}(X,0)\frac{x_l^j\lambda^j}{j!}\frac{y^i}{i!}\end{aligned}$$

D'après l'équation (2.1), nous obtenons : $\widehat{f\circ b}(X,y)=\widehat{b}\widehat{f}(X,y)$.

- **Deuxième cas : les translations.**
  Il existe une série $\widehat{\alpha}\in\widehat{\mathcal{C}_n}$ avec $\widehat{\alpha}(0)=0$ telle que $\widehat{b}=\widehat{t_y^{\alpha}}$. D'après la condition de quasi-analycité, il existe un unique $\alpha\in\mathcal{C}_n$ tel que $\widehat{(\alpha)}=\widehat{\alpha}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\widehat{b}\widehat{f}(X,y) &= \sum_{i=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{(\widehat{\alpha}(X)+y)^i}{i!}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\widehat{\alpha}(X)^{i-j}y^j}{i!} \quad\text{en utilisant le binôme de Newton}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{\binom{i}{j}\widehat{\alpha}(X)^{i-j}y^j}{i!}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{\binom{i}{j}\widehat{\alpha}(X)^{i-j}y^j}{i!} \quad\text{en permutant les sommations}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^{k+j}f}{\partial y^{k+j}}}(X,0)\frac{\binom{k+j}{j}\widehat{\alpha}(X)^k y^j}{(k+j)!} \quad\text{en posant } k=i-j\end{aligned}$$

Nous en concluons que :

$$\widehat{b}\widehat{f}(X,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^{k+j}f}{\partial y^{k+j}}}(X,0)\frac{\widehat{\alpha}(X)^k y^j}{k!j!} \tag{2.3}$$

Nous définissons la fonction b sur $I_{r'}$ par :

$$\forall (X,y)\in I_{r'},\quad b(X,y)=(X,\alpha(X)+y)$$

où $r'\in(]0;+\infty[)^{n+1}$ est choisi de sorte que $b(I_{r'})\subset I_r$. Nous notons g la fonction définie sur $I_{r'}$ par : $g=f\circ b$. Pour tout $i\in\mathbb{N}$, nous avons donc :

$$\forall (X,y)\in I_{r'},\quad \frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X,y)=\frac{\partial^i f}{\partial y^i}(X,\alpha(X)+y)$$

Comme $\widehat{(\alpha)}=\widehat{\alpha}$, nous avons :

$$\widehat{\frac{\partial^i g}{\partial y^i}}(X,0)=\widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,\widehat{\alpha}(X)) \tag{2.4}$$

Or, nous savons que :

$$\widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^{i+j}f}{\partial y^{i+j}}}(X,0)\frac{y^j}{j!}$$

D'où, nous obtenons :

$$\widehat{\frac{\partial^i g}{\partial y^i}}(X,0)=\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^{i+j}f}{\partial y^{i+j}}}(X,0)\frac{\widehat{\alpha}(X)^j}{j!}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\widehat{f\circ b}(X,y) &= \widehat{g}(X,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^i g}{\partial y^i}}(X,0)\frac{y^i}{i!}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^{i+j}f}{\partial y^{i+j}}}(X,0)\frac{\widehat{\alpha}(X)^j}{j!}\frac{y^i}{i!}\end{aligned}$$

En comparant avec l'équation (2.3), nous avons démontré que : $\widehat{f\circ b}(X,y)=\widehat{b}\widehat{f}(X,y)$.

– **Troisième cas : les ramifications.**
Il existe un entier $\alpha\in\mathbb{N}^*$ tel que $\widehat{b}=\widehat{r}_y^{\alpha}$. Nous avons alors :

$$\widehat{b}\widehat{f}(X,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{y^{i\alpha}}{i!}$$

Nous définissons alors l'application b sur $I_{r'}$ par :

$$\forall (X,y)\in I_{r'},\quad b(X,y)=(X,y^{\alpha})$$

avec $r'\in(]0;+\infty[)^{n+1}$ choisi de sorte que $b(I_{r'})\subset I_r$.
Il s'agit d'un élément de $(\mathcal{C}_{n+1})^{n+1}$. Nous notons $g=f\circ b$. Nous avons donc :

$$\forall (X,y)\in I_{r'},\quad g(X,y)=f(X,y^{\alpha})$$

Pour calculer les dérivées successives de g par rapport à la variable y, nous utilisons la formule de Faà di Bruno, ce qui nous donne, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\forall (X,y) \in I_{r'}, \quad \frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X,y) = \sum_{k=0}^{i} \frac{\partial^i f}{\partial y^i}(X, y^\alpha) B_{i,k}(h'(y), ..., h^{(i-k+1)}(y))$$

avec h l'application $y \mapsto y^\alpha$ et $B_{i,k}$ le polynôme de Bell donné par la formule :

$$B_{i,k}(x_1, ..., x_{i-k+1}) = \sum \frac{i!}{\prod_{l=1}^{i-l+1} j_l!} \prod_{l=1}^{i-l+1} \left(\frac{x_l}{l!}\right)^{j_l}$$

où la somme porte sur toutes les familles d'entiers $(j_l)_{1 \leq l \leq i-k+1}$ avec :

$$\sum_{l=1}^{i-k+1} j_l = k \text{ et } \sum_{l=1}^{i-k+1} l j_l = i$$

Nous obtenons alors que :

$$\frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X,0) = \sum_{k=0}^{i} \frac{\partial^i f}{\partial y^i}(X,0) B_{i,k}(h'(0), ..., h^{(i-k+1)}(0))$$

Nous remarquons que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, si $i \neq \alpha$, alors $h^{(i)}(0) = 0$ et $h^{(\alpha)}(0) = \alpha!$. Nous en déduisons que :
– Si $i \neq k\alpha$, alors $B_{i,k}(h'(0), ..., h^{(i-k+1)}(0)) = 0$;
– Si $i = k\alpha$, alors $B_{i,k}(h'(0), ..., h^{(i-k+1)}(0)) = \frac{(k\alpha)!}{k!}$.
Nous avons :

$$\widehat{g}(X,y) = \sum_{d=0}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0) \frac{(d\alpha)!}{k!} \frac{y^{d\alpha}}{(d\alpha)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^k f}{\partial y^k}}(X,0) \frac{y^{k\alpha}}{k!}$$

Dans tous les cas, nous avons démontré que si $\widehat{b}$ est une transformation élémentaire des indéterminées, alors il existe une fonction $b \in (\mathcal{C}_n)^n$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{C}_n$, $\widehat{f \circ b} = \widehat{b}\widehat{f}$.⋄

Proposition 2.7 *Soit $\widehat{b}$ un changement élémentaire d'indéterminées . Il existe $b \in \mathcal{C}_n$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}_n$, $\widehat{f \circ b} = \widehat{b}\widehat{f}$.*

Preuve : Par définition d'un changement élémentaire d'indéterminées , nous savons qu'il existe une famille finie $(\widehat{b}_i)_{1 \leq i \leq p}$ de transformations élémentaires telle que, pour tout $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{C}}_n$, nous ayons : $\widehat{b}\widehat{f} = \widehat{b}_p(...(\widehat{b}_1\widehat{f})...)$. D'après le résultat précédent, nous savons qu'il existe une famille $(b_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $(\mathcal{C}_n)^n$ telle que, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$ et tout $f \in \mathcal{C}_n$, $\widehat{b}_i\widehat{f} = \widehat{f \circ b_i}$. Nous en déduisons que :

$$\forall f \in \mathcal{C}_n, \widehat{b}\widehat{f} = \widehat{b}_p(...(\widehat{b}_1\widehat{f})...) = \widehat{f \circ b_1 \circ ... \circ b_p}$$

D'après la condition de stabilité par composition (C_2), nous savons que $b = b_1 \circ ... \circ b_p$ est un élément de $(\mathcal{C}_n)^n$.⋄

2.4 Transformations élémentaires des germes de l'algèbre

2.4.1 Définitions

Les propositions précédentes nous conduisent à définir des transformations élémentaires pour les germes de $\mathcal{C}_n$. Nous donnons les définitions suivantes :

Définition 2.7 *Nous appellerons transformation élémentaire de $\mathcal{C}_n$ une des transformations qui suivent :*

1. ***Les éclatements :*** *Ils se classent en deux types possibles. Pour le premier, le type (I), nous fixons deux indices $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, un monôme m ne contenant pas la variable x_j et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$. La transformation b_λ^{m,x_j} est définie par :*

$$b_\lambda^{m,x_j}(x_1, ..., x_j, ..., x_n) = (x_1, ..., m(\lambda + x_j), ..., x_n)$$

Pour le second, le type (II), nous fixons $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$. Nous définissons $b_\infty^{x_i,x_j}$ par :

$$b_\infty^{x_i,x_j}(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = (x_1, ..., x_i x_j, ..., x_n)$$

2. ***Les translations :*** *Dans un premier temps, nous définissons une transformation de type Tchirnhausen $t_\alpha^{x_i}$ par la donnée de $\alpha \in \mathcal{C}_{n-1}$ avec $\alpha(0) = 0$, $i \in \{1, ..., n\}$ et par :*

$$t_\alpha^{x_i}(x_1, ..., x_j, ..., x_n) = (x_1, ..., x_j + \alpha(X), ..., x_n)$$

3. ***Les ramifications :*** *soit α un nombre entier strictement positif. Nous définissons les ramifications $r_i^{+,\alpha}$ et $r_i^{-,\alpha}$ par l'égalité suivante :*

$$r_i^{\epsilon,\alpha}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., \epsilon x_i^\alpha, ..., x_n)$$

avec $\epsilon \in \{-1; 1\}$.
Ces transformations sont des éléments de $(\mathcal{C}_n)^n$.

Remarque 5: A chacune de ces transformations élémentaires b correspond une transformation élémentaire dans les séries formelles, notée $\widehat{b}$. Nous noterons $bf = f \circ b$. D'après ce qui précède, nous avons : $\widehat{bf} = \widehat{b}\widehat{f}$.

Définition 2.8 *Nous appellerons transformation admissible un des ensembles de transformations élémentaires suivant :*

1. *$\tau = \{t_\alpha^{x_i}\}$ pour un entier $i \in \{1, ..., n\}$ et une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_{n-1}$;*
2. *$\tau = \{r_i^{+,\alpha}, r_i^{-,\alpha}\}$ pour un indice $i \in \{1, ..., n\}$ et un entier $\alpha \in \mathbb{N}$;*
3. *$\tau = \{b_\lambda^{x_i,x_j}; \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ pour un couple d'indices $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$.*

Remarque 6: si b est une transformation élémentaire, nous voyons qu'il existe une transformation admissible τ tel que $b \in \tau$. Nous dirons que τ est la transformation admissible associée à b. Par la suite, nous pourrons écrire τf au lieu de $\{bf; b \in \tau\}$.

2.4.2 Arbre de transformations élémentaires

Notre méthode de travail va consister à transformer les germes pour leur donner une forme particulière (réduite ou préparée) à partir de laquelle nous pourrons démontrer des résultats. Nous aurons donc à effectuer successivement un certain nombre de transformations élémentaires. Pour représenter schématique l'évolution de nos objets nous utiliserons une représentation sous la forme d'une arbre.

Définition 2.9 *Soit $(b_i)_{i\in\{1,...,p\}}$ une famille finie de transformations élémentaires sur les germes. Nous appellerons suite de transformations élémentaires sur les fonctions la composée de ces transformations.*
Nous noterons $bf = b_p...b_1 f = f \circ b_1 \circ ... \circ b_p$.
Nous appellerons arbre de transformations élémentaires sur les germes un ensemble de suites finies de transformations élémentaires sur les germes. Les éléments d'un arbre seront appelés les branches de l'arbre.

Le lien établi entre les transformations sur les séries et sur les germes amène la définition suivante :

Définition 2.10 *Soit $\mathcal{T}$ est un arbre de transformations élémentaires. Si $b \in \mathcal{T}$ est une branche de cet arbre, alors il existe une transformation formelle $\widehat{b}$ associée. L'arbre de transformations formelles $\widehat{\mathcal{T}} = \left\{\widehat{b}; b \in \mathcal{T}\right\}$ est appelé l'arbre formel associé à $\mathcal{T}$.*

Définition 2.11 *Soit $\mathcal{T}$ un arbre de transformations élémentaires. L'arbre est dit admissible si l'arbre formelle $\widehat{\mathcal{T}}$ associé est admissible.*

2.4.3 Propriétés

Lemme 2.8 *Soit $r \in (]0; +\infty[)^n$ un polyrayon et $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$ avec $i \neq j$. Il existe un sous-ensemble fini Λ de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tel que $\cup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda^{x_i,x_j}(I_r)$ est un voisinage de l'origine.*

Preuve : Soit r un polyrayon. Sans nuire à la généralisation de la démonstration, nous pouvons supposer que notre éclatement porte sur les variables x_{n-1} et x_n. Pour tout $X = (x_1, ..., x_n) \in I_r$, nous notons $X' = (x_1, ..., x_{n-2})$ et $r' = (r_1, ..., r_{n-2})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous considérons l'éclatement $b_\lambda^{x_{n-1},x_n}$. Nous avons :

- Si $x_{n-1} > 0$, alors nous avons les équivalences suivantes :

$$-r_n \leq x_n \leq r_n \Leftrightarrow \lambda - r_n \leq \lambda + x_n \leq \lambda + r_n \Leftrightarrow x_{n-1}(\lambda - r_n) \leq x_{n-1}(\lambda + y) \leq x_{n-1}(\lambda + r_n)$$

- Si $x_{n-1} < 0$, alors nous avons les équivalences suivantes :

$$-r_n \leq x_n \leq r_n \Leftrightarrow \lambda - r_n \leq \lambda + x_n \leq \lambda + r_n \Leftrightarrow x_{n-1}(\lambda + r_n) \leq x_{n-1}(\lambda + y) \leq x_{n-1}(\lambda - r_n)$$

Cela nous permet de conclure que :

$$\begin{aligned} b_\lambda^{x_{n-1},x_n}(I_r) &= \{X \in \mathbb{R}^n; X' \in I_{r'},\ 0 \leq x_{n-1} \leq r_{n-1} \text{ et } x_{n-1}(\lambda - r_n) \leq x_n \leq x_{n-1}(\lambda + r_n)\} \\ &\cup \{X \in \mathbb{R}^n; X' \in I_{r'},\ -r_{n-1} \leq x_{n-1} \leq 0 \text{ et } x_{n-1}(\lambda + r_n) \leq x_n \leq x_{n-1}(\lambda - r_n)\} \end{aligned}$$

Nous obtenons de même que :

$$\begin{aligned} b_\infty^{x_n,x_{n-1}}(I_r) &= \{X \in \mathbb{R}^n; X' \in I_{r'},\ 0 \leq x_n \leq r_n \text{ et } -r_{n-1}x_n \leq x_{n-1} \leq x_n r_{n-1}\} \\ &\cup \{X \in \mathbb{R}^n; X' \in I_{r'},\ -r_{n-1} \leq x_n \leq 0 \text{ et } r_{n-1}x_n \leq x_{n-1} \leq -r_{n-1}x_n\} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\mathcal{V} = \cup_{\lambda \in \mathbb{R}} b_\lambda^{x_{n-1},x_n}(I_r) \cup b_\infty^{x_n,x_{n-1}}(I_r)$ est un voisinage de l'origine. Il existe donc $r_0 \in (]0; +\infty[)^n$ tel que $I_{r_0} \subset \mathcal{V}$. Par compacité de I_{r_0}, nous pouvons conclure qu'il existe un ensemble fini Λ de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tel que $\cup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda^{x_i,x_j}(I_r)$ est un recouvrement de I_{r_0} et donc un voisinage de l'origine.$\diamond$

Proposition 2.9 *Soit $r = (r_1, ..., r_n) \in (]0; +\infty[)^n$ un polyrayon. Si b est une transformation élémentaire sur les fonctions, alors $b(I_r)$ est une union finie de $\mathcal{C}_n$-cylindres.*

Preuve : Il faut distinguer différents cas selon la nature de la transformation :

- Il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, deux entiers $(i,j) \in \{1, ..., n\}$ tels que $b = b_\lambda^{x_i,x_j}$. Nous savons que $(x_1, ..., x_n) \in b(I_r)$ si et seulement s'il existe $(a_1, ..., a_n) \in I_r$ tel que : $b(a_1, ..., a_n) = (x_1, ..., x_n)$. Cela équivaut à :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, k \neq j, a_k = x_k \text{ et } x_j = a_i(\lambda + a_j)$$

  Nous notons $B = \prod_{k=1,k\neq j}^n] - r_k; r_k[$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} b(I_r) &= \{X \in \mathbb{R}^n; (x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \in B,\ x_i > 0 \text{ et } x_i(-r_j + \lambda) < x_j < x_i(r_j + \lambda)\} \\ &\cup \{X \in \mathbb{R}^n; (x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \in B,\ x_i = 0 \text{ et } x_j = 0\} \\ &\cup \{(X \in \mathbb{R}^n; (x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \in B,\ x_i < 0 \text{ et } x_i(r_j + \lambda) < x_j < x_i(-r_j + \lambda)\} \end{aligned}$$

En remarquant que $B \cap \{X \in \mathbb{R}^n; x_i < 0\}$, $B \cap \{X \in \mathbb{R}^n; x_i = 0\}$ et $B \cap \{X \in \mathbb{R}^n; x_i > 0\}$ sont des $\mathcal{C}_n$-ensembles, nous avons bien décomposé l'ensemble image comme une union de cylindres.

- Nous considérons une ramification $b = r_\alpha^{+,x_i}$ avec α un entier. Dans un premier temps, nous supposons que α est un nombre impair. Comme la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}$, nous avons :

$$b(C) = \{X \in \mathbb{R}^n; (x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \in B, -r_i^\alpha < x_i < r_i^\alpha\}$$

Nous supposons que α est pair. En utilisant les variations de la fonction $t \mapsto t^\alpha$, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} b(C) & = & \{X \in \mathbb{R}^n; (x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \in B, 0 < x_i < r_i^\alpha\} \\ & \cup & \{X \in \mathbb{R}^n; (x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \in B, x_i = 0\} \end{array}$$

Nous avons bien une union de $\mathcal{C}_n$-cylindres. Pour la ramification r_α^{-,x_i}, nous obtenons :
– Si α est impair, alors : $b(C) = \{X \in \mathbb{R}^n; (x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \in B, -r_i^\alpha < x_i < r_i^\alpha\}$.
– Si α est pair, alors :

$$\begin{array}{rcl} b(C) & = & \{X \in \mathbb{R}^n; (x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \in B, -r_i^\alpha < x_i < 0\} \\ & \cup & \{X \in \mathbb{R}^n; (x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \in B, x_i = 0\} \end{array}$$

- Soit une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_{n-1}$ telle que $\alpha(0) = 0$. Nous considérons la transformation $b = t_\alpha^{x_i}$. Nous obtenons alors :

$$b(I_r) = \{X \in \mathbb{R}^n; (x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \in B \text{ et } -r_i - \alpha((x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i}) < x_i < r_i - \alpha((x_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i})\}$$

Dans tous les cas, nous voyons que l'image de I_r est une union finie de $\mathcal{C}_n$-cylindres.$\diamond$

2.5 Unités

Les théorèmes de normalisation et de préparation font apparaître des germes particuliers, les unités.

Définition 2.12 *Nous définissons les unités de la manière suivante :*

1. *Soit $\widehat{U} \in \mathbb{R}[[X]]$, une série formelle. $\widehat{U}$ sera appelée une* unité formelle *si $\widehat{U}(0) \neq 0$.*
2. *Soit $U \in \mathcal{C}_n$ un germe. U sera appelée une* unité *si $U(0) \neq 0$.*

Remarque 7: Si U est une unité dans $\mathcal{C}_n$, alors par continuité, il existe un voisinage de l'origine sur lequel la fonction U garde un signe constant.

Proposition 2.10 *$\widehat{U} \in \widehat{\mathcal{C}_n}$ est une unité formelle si et seulement s'il existe un polyrayon $r \in (]0; +\infty[)^n$ tel que la fonction U soit une unité sur I_r.*

Preuve : nous remarquons que, par définition du développement de Taylor à l'origine, $\widehat{U}(0) = U(0)$.$\diamond$

Proposition 2.11 *Soit $U \in \mathcal{C}_n$ une unité telle que $U(0) \geq 0$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sqrt[p]{U}$ est une unité appartenant à $\mathcal{C}_n$.*

Preuve : Soit un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_λ par :

$$\forall x \in I_1, \quad f_\lambda(x) = \lambda + x$$

Nous considérons la fonction f définie par :

$$\forall (x,y) \in I_1, \quad f(x,y) = (y - \sqrt[p]{\lambda})^p - f_\lambda(x)$$

Il s'agit d'un polynôme, donc $f \in \mathcal{C}_2$. De plus, après calcul, on obtient que :

$$f(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = p(\sqrt[p]{\lambda})^{p-1} \neq 0$$

Nous utilisons alors le théorème des fonctions implicites. D'après la condition $(C6)$, nous savons qu'il existe une fonction $a \in \mathcal{C}_1$ telle que :

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = a(x)$$

Or, la résolution de l'équation nous donne :

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt[p]{\lambda} + \sqrt[p]{f_\lambda(x)}$$

Nous en concluons que $\sqrt[p]{f_\lambda} \in \mathcal{C}_1$.
Soit une unité $U \in \mathcal{C}_n$ telle que $U(0) \in \mathbb{R}_+^*$. Nous définissons la fonction g par :

$$\forall X \in I_1, \quad g(X) = U(X) - U(0) \Leftrightarrow U(X) = f_{U(O)}(g(X))$$

Par la condition de stabilité pour la composition, nous en déduisons que $\sqrt[p]{U} = \sqrt[p]{f_{U(0)}} \circ g$ appartient à $\mathcal{C}_n$.$\diamond$

Proposition 2.12 *Soit $U \in \mathcal{C}_n$ une unité. Alors $\frac{1}{U}$ est une unité appartenant à $\mathcal{C}_n$.*

Preuve : Nous considérons toujours la fonction f_λ. Mais, maintenant, nous définissons la fonction f par :

$$\forall (x,y) \in I_1, \quad f(x,y) = y f_\lambda(x) - x$$

Le calcul de la dérivée partielle permet d'écrire :

$$f(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f_\lambda(0) = \lambda \neq 0$$

En utilisant le théorème des fonctions implicites et d'après la condition $(C6)$, nous savons qu'il existe une fonction $a \in \mathcal{C}_1$ telle que :

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = a(x)$$

Or, après résolution de l'équation, nous obtenons que :

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{f_\lambda(x)}$$

Nous en déduisons que la fonction $x \mapsto \frac{x}{f_\lambda(x)}$ appartient à $\mathcal{C}_1$. Comme $\widehat{f_\lambda}(0) = \lambda \neq 0$, nous savons qu'il existe une série formelle $\widehat{\frac{1}{f_\lambda}}$ dans $\mathbb{R}[[x]]$. Nous en concluons que :

$$\widehat{a}(x) = x\widehat{\frac{1}{f_\lambda}}(x)$$

Puisque que $a \in \mathcal{C}_1$, la condition $(C7)$ nous permet de conclure qu'il existe une fonction, que l'on note f_λ^{-1}, appartenant à $\mathcal{C}_1$ telle que :

$$\forall x \in I, \quad a(x) = x f_\lambda^{-1}(x) \Leftrightarrow f_\lambda^{-1}(x) = \frac{1}{f_\lambda(x)}$$

Donc, $\frac{1}{f_\lambda(x)} \in \mathcal{C}_1$.
Si on considère une unité $U \in \mathcal{C}_n$, alors il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_n$ avec $g(0) = 0$ telle que $U = f_{U(0)} \circ g$. Nous avons montré, par composition, que $\frac{1}{U} \in \mathcal{C}_n$.$\diamond$

2.6 Les termes et les termes simples

2.6.1 Etude d'un exemple

Nous considérons la fonction f par :

$$\forall (x,y) \in I_1, \quad f(x,y) = y^2 - x$$

Cette fonction va nous servir d'illustration de notre méthode de travail. Dans cette section, nous réaliserons sa normalisation en effectuant des transformations élémentaires. En fin de chapitre, nous complèterons notre étude de ce cas particulier en écrivant f dans le cadre de notre théorème de préparation.
Nous notons $\widehat{f}$ la série formelle. Nous commençons par effectuer les ramifications $r_1^{+,2}$ et $r_1^{-,2}$ données par la définition 2.7. Nous obtenons alors les séries :

$$\widehat{r_1}^{+,2}\widehat{f}(x,y) = y^2 - x^2 \text{ et } \widehat{r_1}^{-,2}\widehat{f}(x,y) = y^2 + x^2$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, nous effectuons l'éclatement $b_\lambda^{x,y}$. Nous avons alors :

$$\widehat{b}_\lambda^{x,y}\widehat{r_1}^{+,2}\widehat{f}(x,y) = x^2(y^2 + 2y\lambda + \lambda^2 - 1)$$

Nous avons factoriser par x^2. Il faut regarder si le deuxième facteur est une unité :

$$\lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \text{ et } \lambda \neq -1$$

Nous effectuons ensuite des éclatements sur chacune des deux séries en distinguant les cas. Ils sont donc au nombre de quatre $\widehat{b}_1^{x,y}$, $\widehat{b}_{-1}^{x,y}$, $\widehat{b}_\infty^{x,y}$ et $\widehat{b}_0^{y,x}$. Nous avons alors les cas suivants :

- Nous effectuons l'éclatement $\widehat{b}_1^{x,y}$ ce qui donne :

$$\widehat{b}_1^{x,y}\widehat{r_1}^{+,2}\widehat{f}(x,y) = x^2y(y+2) \text{ et } \widehat{b}_1^{x,y}\widehat{r_1}^{-,2}\widehat{f}(x,y) = x^2(1+(y+1)^2)$$

- Nous effectuons l'éclatement $\widehat{b}_{-1}^{x,y}$ ce qui donne :

$$\widehat{b}_{-1}^{x,y}\widehat{r_1}^{+,2}\widehat{f}(x,y) = x^2y(y-2) \text{ et } \widehat{b}_{-1}^{x,y}\widehat{r_1}^{-,2}\widehat{f}(x,y) = x^2(1+(y-1)^2)$$

- Nous effectuons l'éclatement $\widehat{b}_0^{y,x}$ ce qui donne :

$$\widehat{b}_0^{y,x}\widehat{r_1}^{+,2}\widehat{f}(x,y) = x^2(y^2-1) \text{ et } \widehat{b}_0^{y,x}\widehat{r_1}^{-,2}\widehat{f}(x,y) = x^2(y^2+1)$$

- Nous effectuons l'éclatement $\widehat{b}_\infty^{x,y}$ ce qui donne :

$$\widehat{b}_\infty^{x,y}\widehat{r_1}^{+,2}\widehat{f}(x,y) = y^2(1-x^2) \text{ et } \widehat{b}_\infty^{x,y}\widehat{r_1}^{-,2}\widehat{f}(x,y) = y^2(x^2+1)$$

Les résultats obtenus peuvent être représentés sous la forme d'un arbre :

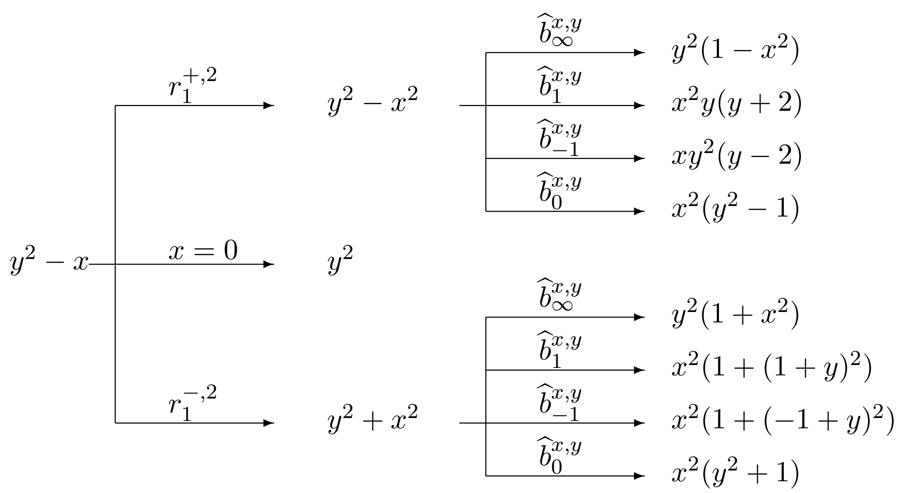

FIGURE 2.1 – Arbre de normalisation

Les séries que nous obtenons en bout de branche sont des transformées construites à partir de $\widehat{f}$. Elles s'écrivent toutes comme le produit d'un monôme avec une unité de $\mathbb{R}[[x,y]]$. Nous disons que nous avons normalisé la série formelle. Si nous appelons $(\widehat{b_i})_{1\leq i\leq 8}$ les suites de transformations élémentaires des différentes branches en numérotant du haut en bas, nous avons que pour tout $i \in \{1,...,8\}$, il existe un monôme m_i et une unité formelle $\widehat{V_i}$ tels que : $\widehat{b_i f} = m_i \widehat{V_i}$. Comme $f \in \mathcal{C}_n$, la condition de stabilité par division monomiale nous permet d'affirmer qu'il existe, pour tout $i \in \{1,...,8\}$, une fonction $U_i \in \mathcal{C}_n$ telle que $\widehat{U_i} = \widehat{V_i}$. De plus, nous avons $U_i(0) = \widehat{V_i}(0) \neq 0$. Nous avons alors que U est une unité de $\mathcal{C}_n$. En utilisant la condition de quasi-analycité, nous savons qu'il existe un polyrayon $r \in (]0;+\infty[)^2$ tel que :

$$\forall (x,y) \in I_r, \forall i \in \{1,...,8\}, \quad b_i f(x,y) = m_i U_i(x,y)$$

Nous avons transformé notre fonction en une fonction dite normalisée.

Pour revenir à la fonction d'origine nous allons introduire des transformations élémentaires inverses. Ces dernières ne seront pas définies sur un pavé, mais sur un cylindre. En effet, nous avons démontré dans la proposition 2.9 que l'image d'un pavé par une transformation élémentaire est une union finie de cylindres. De plus, grâce à la proposition 2.8, nous savons qu'en effectuant, comme dans l'exemple ci-dessus, un nombre fini de transformations élémentaires à chaque noeud de l'arbre, l'ensemble image est un voisinage de l'origine. Ce dernier est donc découpé en cylindres sur lesquels sont définies nos transformations inverses. Autrement dit, si nous considérons un point (x,y) de ce voisinage, il appartient à un cylindre C et il existe une transformation élémentaire inverse notée b_i^{-1} définie sur C. Nous avons alors : $f(x,y) = f \circ b_i \circ b_i^{-1}(x,y) = b_i f \circ b_i^{-1}(x,y)$.

2.6.2 Définition d'une transformation élémentaire inverse

Les exemples précédents nous amènent à définir les objets suivants :

Définition 2.13 *Soit I_r un pavé de $\mathbb{R}^n$ avec $r = (r_1,...,r_n)$. Nous appelons transformation élémentaire inverse une des applications suivantes :*

1. *Soit $\alpha \in \mathcal{C}_n$ avec $\alpha(0) = 0$. La translation t_α^i est une transformation élémentaire inverse.*
2. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1,...,n\}$. Nous notons :*

$$C_{i,+} = \{(x_1,...,x_n) \in I_r; x_i \leq 0\}$$
$$C_{i,-} = \{(x_1,...,x_n) \in I_r; x_i \geq 0\}$$

Nous définissons les ramifications élémentaires inverses $r_i^{+,\frac{1}{\alpha}}$ et $r_i^{-,\frac{1}{\alpha}}$ par :

$$\forall (x_1,...,x_n) \in C_{i,+}, r_i^{+,\frac{1}{\alpha}} = (x_1,...,x_i^{\frac{1}{\alpha}},...,x_n) \text{ et } r_i^{-,\frac{1}{\alpha}}(x_1,...,x_n) = (0,...,0)$$

$$\forall (x_1,...,x_n) \in C_{i,-}, r_i^{+,\frac{1}{\alpha}} = (0,...,0) \text{ et } r_i^{-,\frac{1}{\alpha}}(x_1,...,x_n) = (x_1,...,-x_i^{\frac{1}{\alpha}},...,x_n)$$

3. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,...,n\}$ et m un monôme ne dépendant pas de la variable x_j. Nous notons :*

$$C_m = \{(x_1,...,x_n) \in I_r; m(X) \neq 0\}$$

Nous définissons l'éclatement élémentaire inverse $q_\lambda^{m,j}$ par :

$$\forall (x_1,...,x_n) \in C_m, q_\lambda^{m,j}(x_1,...,x_n) = (x_1,...,\frac{x_j - \lambda m(X)}{m(X)},...,x_n)$$

2.6.3 Diviseur d'une transformation élémentaire

En nous référant à la notion de diviseur exceptionnel en géométrie algébrique, nous définissons la notion de diviseur pour les transformations élémentaires.

Définition 2.14 *Soit b une transformation élémentaire. Nous définissons le* diviseur *de b, noté* Div(b), de la manière suivante :

1. Si b est une translation, alors : $\mathrm{Div(b)} = \emptyset$.
2. Si $b = r_\alpha^{\epsilon,x_i}$ avec $\epsilon \in \{-1;1\}$ et α impair, alors : $\mathrm{Div(b)} = \emptyset$.
3. Si $b = r_\alpha^{\epsilon,x_i}$ avec $\epsilon \in \{-1;1\}$ et α pair, alors : $\mathrm{Div(b)} = \{X \in \mathbb{R}^n; x_i = 0\}$.
4. Si $b = b_\lambda^{m,x_i}$, alors : $\mathrm{Div(b)} = \{X \in \mathbb{R}; m = 0\}$.

Dans le cadre des séries formelles ou des germes, nous effectuons des suites de transformations élémentaires. Pour démontrer notre résultat, nous nous appuierons sur ces transformations, mais nous aurons besoin de revenir aux variables initiales. Cela se fait en utilisant les transformations inverses. Ces dernières n'étant pas définies partout, nous serons obligés de distinguer les cas. Autrement dit, nous effectuons un découpage cellulaire. Sur certaines cellules, les transformations seront inversibles. sur le reste d'enter elles, nous faisons en sorte que le nombre de variable de l'objet étudé diminue. En incluant ce découpage dans le cadre d 'un raisonnement par récurrence, nous pouvons achever notre raisonnement.

Cela nous amène à donner la définition suivante :

Définition 2.15 *Soit $b = b_1 \circ ... \circ b_p$ une suite de transformations élémentaires. Nous définissons* les cellules du diviseur *de b par récurrence de la manière suivante :*

1. *La première cellule est donnée par :*

$$\mathrm{Div}_1(b) = \mathrm{Div}(b_1)$$

où $\mathrm{Div}(b_1)$ est le diviseur donné par la définition 2.14.

2. *Pour $i \geq 2$, la i-ième cellule est donnée par :*

$$\mathrm{Div}_i(b) = b_1 \circ ... \circ b_{i-1}(\mathrm{Div}(b_i)) \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \mathrm{Div}_j(b) \right)$$

Le diviseur de b est alors défini par :

$$\mathrm{Div}(b) = \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{Div}_i(b)$$

Proposition 2.13 *Soient $r \in (]0;\infty[)^n$ un polyrayon et $b = b_1 \circ ... \circ b_p$ une suite de transformations élémentaires. L'application $b^{-1} = b_p^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}$ est définie sur $I_r \backslash \mathrm{Div}(b)$. Nous avons alors :*

$$\forall X \in I_r \backslash \mathrm{Div}(b), \quad b \circ b^{-1}(X) = X$$

Preuve : Soit $X \in I_r \backslash \mathrm{Div}(b)$. Par définition du diviseur, $X \in I_r \backslash \mathrm{Div}(b_1)$, donc $b_1^{-1}(X)$ existe. Nous montrons par récurrence la propriété suivante :

$$''b_k^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}(X) \text{ est définie}''$$

Initialisation : Si nous supposons que $b_1^{-1}(X) \in \mathrm{Div}(b_2)$, alors nous avons que :

$$X = b_1(b_1^{-1}(X)) \in b_1(\mathrm{Div}(b_2))$$

Or, par hypothèse, cela est exclu. Nous en concluons que $b_1^{-1}(X) \notin \text{Div}(b_2)$, et donc $b_2^{-1}(b_1^{-1}(X))$ est défini.

Hérédité : Nous supposons la propriété vraie au rang k avec $k < p$. Nous savons donc que $b_k^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}(X)$ existe.
Si $b_k^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}(X) \in \text{Div}(b_{k+1})$, alors nous avons :

$$X \in b_1 \circ ... \circ b_k(\text{Div}(b_{k+1})$$

Or, $X \in I_r \backslash \text{Div}(b)$, il y a donc une contradiction. Nous en déduisons que $b_k^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}(X) \notin \text{Div}(b_{k+1})$, et donc $b_{k+1}^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}(X)$ existe.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $b_p^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}(X)$ existe dans $\mathbb{R}^n$.$\diamond$

2.6.4 Définition d'un terme

En nous appuyant sur les définitions données dans l'article [8], nous donnons la définition suivante :

Définition 2.16 *Une fonction g est un* terme simple *si et seulement s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_n$ et une famille finie $(b_i^{-1})_{i \in \{1,...,p\}}$ de transformations élémentaires inverses tels que $g = f \circ b_1 \circ ... \circ b_p$.*
Nous appellerons terme *toute application définie sur un cylindre C dans $\mathbb{R}$ obtenue à partir des termes simples de la manière suivante :*

1. *Stabilité par la racine p-ième avec $p \in \mathbb{N}^*$: si p est un entier pair et si g est un terme défini et positif sur C alors $g^{\frac{1}{p}}$ est un terme défini sur C.*
   Si p est un entier impair et g est un terme défini sur C, $g^{\frac{1}{p}}$ est un terme défini sur C.
2. *Stabilité pour l'addition : si g_1 et g_2 sont des termes définis sur C, alors $g_1 + g_2$ est un terme défini sur C.*
3. *Stabilité par multiplication : si g_1 et g_2 sont des termes définis sur C, alors $g_1 \times g_2$ est un terme défini sur C.*
4. *Stabilité par quotient : Nous définissons l'application D sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$\begin{array}{rcl} D(x,y) & = & \frac{x}{y} \quad \textit{si } |x| \leq |y| \textit{ et } y \neq 0 \\ & = & 0 \quad \textit{sinon} \end{array}$$

   si g_1 et g_2 sont des termes définis sur C, alors $D(g_1, g_2)$ est un terme défini sur C.
5. *Stabilité par composition : si g est un terme défini sur un cylindre C' et $g_1, ..., g_n$ sont des termes définis sur C tels que, pour $X \in C$, $(g_1(X), ..., g_n(X)) \in C'$, alors $g(g_1, ..., g_n)$ est un terme défini sur C.*

En complément de la définition des unités dans $\mathcal{C}_n$, nous donnons la définition d'une unité dans les termes.

Définition 2.17 *Nous dirons que le terme g est un* terme unité *sur le cylindre C si et seulement si $g \sim 1$ sur C.*

Dans la démonstration du résultat de cette thèse, nous aurons besoin de raisonner sur le degré de complexité d'un terme.

Définition 2.18 *Soit g un terme. Nous définissons la* hauteur *de g, notée* $\text{hau}(g)$*, par récurrence :*

1. *S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g \in \mathcal{C}_n$, alors* $\text{hau}(g) = 0$ *;*
2. *S'il existe p-ième avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}_n$ tel que $g = f^{\frac{1}{p}}$, alors* $\text{hau}(g) = 1$ *;*

3. S'il existe g_1 et g_2 sont des termes définis sur C tels que $g = g_1 + g_2$, alors :

$$\text{hau}(g) = \max(\text{hau}(g_1), \text{hau}(g_2))$$

4. S'il existe g_1 et g_2 sont des termes définis sur C tels que $g = g_1 \times g_2$, alors :

$$\text{hau}(g) = \max(\text{hau}(g_1), \text{hau}(g_2))$$

5. S'il existe g_1 et g_2 sont des termes définis sur C tels que $g = \frac{g_1}{g_2}$, alors :

$$\text{hau}(g) = \max(\text{hau}(g_1), \text{hau}(g_2)) + 1$$

6. S'il existe h est un terme défini sur un cylindre C' et $g_1, ..., g_n$ sont des termes définis sur C tels que, pour $X \in C$, $(g_1(X), ..., g_n(X)) \in C'$tels que $g = h(g_1, ..., g_n)$, alors :

$$\text{hau}(g) = \text{hau}(h) + \max\Big(\text{hau}(g_i); i \in \{1, ..., n\}\Big)$$

Prenons à présent un exemple.

Soient $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f) \in \mathcal{C}_n^7$. Nous considérons le terme g défini par :

$$g = f\left(\frac{f_1}{f_2}, f_3 + \sqrt{f_4}, \frac{f_5}{\sqrt[3]{f_6}}\right)$$

Par définition, nous avons :

$$\text{hau}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = 1, \quad \text{hau}(\sqrt{f_4}) = 1 \text{ et } \text{hau}(\sqrt[3]{f_6}) = 1$$

Nous obtenons :

$$\text{hau}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = 1, \quad \text{hau}(f_3 + \sqrt{f_4}) = 1 \text{ et } \text{hau}\left(\frac{f_5}{\sqrt[3]{f_6}}\right) = 2$$

Ce qui permet de conclure que : $\text{hau}(g) = 2$.
Nous pouvons représenter le terme sous la forme d'un arbre :

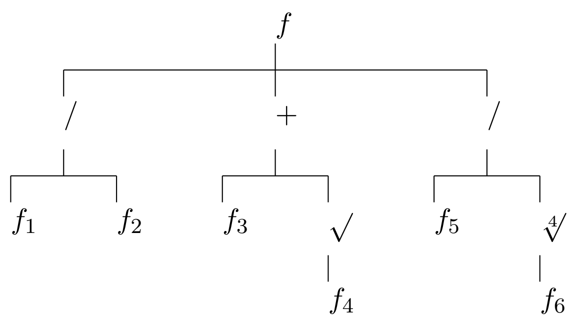

FIGURE 2.2 – Arbre représentant le terme g

D'après notre définition, les noeuds de l'arbre ont des valeurs différentes. Un noeud correspondant à une addition ou une multiplication aura une valeur nulle, tandis qu'un noeud correspondant à un quotient ou une racine aura une valeur égale à 1. En utilisant cette convention, pour déterminer la hauteur du terme, il faut calculer la somme des valeurs des noeuds correspondant aux branches les plus longues, puis prendre la plus grande de ces sommes.

2.6.5 Les $\mathcal{T}_n$-cylindres

Définition 2.19 *Nous appellerons un* $\mathcal{T}_n$-ensemble *un sous-ensemble B de $\mathbb{R}^n$ défini par un nombre fini d'égalités et d'inégalités à l'aide de fonctions de termes. Autrement dit, il existe deux entiers $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et deux familles finies $(f_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ et $(g_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ de termes avec $I = \{1, ..., p\}$ et $J = \{1, ..., q\}$ tels que :*

$$B = \cup_{i\in I}\Bigg(\cap_{j\in J} \{X \in \mathbb{R}^n; f_{i,j}(X) = 0, g_{i,j}(X) > 0\}\Bigg)$$

Nous appellerons un $\mathcal{T}_n$-cylindre *un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^{n+1}$ construit à l'aide d'un $\mathcal{T}_n$-ensemble B de $\mathbb{R}^n$ appelé base et d'un ou de deux termes ϕ et ψ de $\mathbb{R}_n$, et défini de l'une des manières suivantes :*

$$C = \{(X, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; X \in B, \phi(X) < y < \psi(X)\}\ ;$$
$$C = \{(X, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; X \in B, y < \phi(X)\}\ ;$$
$$C = \{(X, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; X \in B, \phi(X) < y\}\ ;$$
$$C = \{(X, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; X \in B, y = \phi(X)\}.$$

2.7 les arbres complets et la décomposition cylindrique

Les arbres et les transformations que nous avons définis vont nous permettre de montrer des propriétés sur les germes. Il nous faut alors les traduire géométriquement. Cela nécessite de construire des découpages cellulaires des ensembles sur lesquelles nous allons travailler.

2.7.1 Les arbres complets

Nous commençons par définir la hauteur h d'un arbre.

Définition 2.20 *Soit $\mathcal{T}$ un arbre de transformations élémentaires et $b \in \mathcal{T}$. Par définition, b est la composée de transformations élémentaires. Nous notons h_b le nombre minimum de transformations élémentaires qui composent b. Nous appelons ce nombre la* hauteur de la branche*.*
Nous appellerons hauteur de l'arbre *le nombre $h_{\mathcal{T}}$ défini par :*

$$h_{\mathcal{T}} = \sup\Bigg(\{h_b; b \in \mathcal{T}\}\Bigg) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Théorème 2.14 *Soient $\mathcal{T}$ un arbre de transformations admissibles de hauteur finie et un polyrayon $r \in (]0; +\infty[)^n$. Alors, il existe un sous-arbre fini $\mathcal{S}$ de $\mathcal{T}$ tel que $\cup_{b\in\mathcal{S}} b(I_r)$ soit une union finie de $\mathcal{C}_n$-cylindres qui forme un voisinage de l'origine.*

Preuve : Nous allons faire une récurrence sur la hauteur de l'arbre.

Initialisation : Soit $\mathcal{T}$ un arbre de hauteur 1. Par définition, il existe une transformation admissible τ telle que $\mathcal{T} = \{\tau\}$. Nous allons distinguer les cas selon la nature de τ.

- Il existe $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ tel que $\tau = \{b_\lambda^{x_i,x_j}; \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. D'après le lemme 2.8, nous savons qu'il existe un sous-ensemble fini Λ de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tel que $\cup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda^{x_i,x_j}(I_r)$ est un recouvrement de l'orgine.
- Il existe $i \in \{1, ..., n\}$ et $\alpha \in \mathcal{C}_{n-1}$ avec $\alpha(0) = 0$ tels que $\tau = \{t_\alpha^{x_i}\}$. L'application $t_\alpha^{x_i}$ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui admet une application réciproque $t_{-\alpha}^{x_i}$ continue. Donc $t_\alpha^{x_i}$ est un homéomorphisme, l'image d'un voisinage de l'origine est un voisinage de l'origine.

– Il existe $i \in \{1, ..., n\}$ et un entier α tel que $\tau = \{r_i^{+,\alpha}, r_i^{-,\alpha}\}$. nous distinguons les cas :
Si α est pair, nous avons :

$$r_i^{+,\alpha}(I_r) = \{X \in I_r; 0 \leq x_i < r_i^\alpha\} \text{ et } r_i^{-,\alpha} = \{X \in I_r; -r_i^\alpha \leq x_i \leq 0\}$$

Donc $r_i^{+,\alpha}(I_r) \cup r_i^{-,\alpha}(I_r)$ est un voisinage de l'origine.
Si α est impair, nous avons :

$$r_i^{+,\alpha}(I_r) = r_i^{-,\alpha} = \{X \in I_r; -r_i^\alpha \leq x_i \leq r_i^\alpha\}$$

Il s'agit d'un voisinage de l'origine.

La propriété est donc vraie pour les arbres de hauteur 1.

Hérédité : nous supposons la propriété vraie pour un arbre de hauteur h. Nous considérons un arbre de hauteur $h+1$. Nous considérons l'arbre $\tilde{\mathcal{T}} = \{b_1; \exists b \in \mathcal{T}, b = b_1...b_p\}$. Nous définissons la famille d'arbres $(\mathcal{T}_b)_{b \in \tilde{\mathcal{T}}}$. Pour tout $b \in \tilde{\mathcal{T}}$, l'arbre $\mathcal{T}_b$ est de hauteur au plus h. Nous appliquons notre hypothèse de récurrence à chacun de ces arbres. Il existe donc un arbre fini $\mathcal{S}_b$ extrait de $\mathcal{T}_b$ tel que $\cup_{b \in \mathcal{S}}(I_r)$ est un voisinage de l'origine. Nous pouvons alors considérer un polyrayon $r_b \in (]0; +\infty[)^n$ tel que $I_{r_b} \subset \cup_{b \in \mathcal{S}} b(I_r)$. Nous appliquons notre hypothèse de récurrence à l'arbre $\tilde{\mathcal{T}}$ de hauteur 1. Nous pouvons extraire un sous-arbre $\tilde{\mathcal{S}}$ fini tel que $\cup_{b_1 \in \tilde{\mathcal{S}}} b_1(I_{r_b})$ est un voisinage de l'origine. Nous considérons l'arbre $\mathcal{S} = \{b_1 b; b_1 \in \tilde{\mathcal{S}}\, b \in \mathcal{T}_{b_1}\}$. Il s'agit d'un arbre fini extrait de $\mathcal{T}$ et tel que : $\cup_{b \in \mathcal{S}} b(I_r)$ est un voisinage de l'origine.

Conclusion : Notre propriété est vraie pour tout arbre de hauteur finie.$\diamond$

Définition 2.21 *Un arbre de transformations élémentaires $\mathcal{T}$ sera dit* complet *si et seulement si cet arbre contient un nombre fini de branches, notées $(b_\lambda)_{\lambda \in I}$, et que, pour tout polyrayon $r \in]0; +\infty[^n$, $\cup_{\lambda \in I} b_\lambda(I_r)$ est un voisinage de l'origine.*

2.7.2 Notre méthode

La méthode que nous utiliserons dans notre travail consiste, à partir d'un élément de $\mathcal{C}_n$, à construire un arbre de sorte que pour chaque branche le germe obtenu par transformation ait la forme désirée. Ainsi nous construirons des arbres de normalisation lorsque les germes obtenus sont tous normalisés ou des arbres de préparation lorsqu'ils sont tous sous forme réduite.

Définition 2.22 *Nous dirons qu'une fonction $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ est sous une* forme réduite *sur le pavé I_r si et seulement s'il existe un recouvrement fini $\mathcal{S}$ de I_r par des C-cylindres tel que, pour tout $C \in \mathcal{S}$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}$, deux fonctions $(a, \theta) \in \mathcal{C}_n^2$ et une unité $U \in \mathcal{C}_{n+1}$ tels que :*

$$\forall (X, y) \in C, \quad f(X, y) = (y - a(X))^d \theta(X) U(X, y)$$

Cette définition reprend celle donnée dans l'article [26] de J-M Lion et de J-P Rolin.

Soit $f \in C_{n+1}$ un germe. Pour obtenir la mise sous forme préparée, nous commencerons par construire un arbre admissible formel $\widehat{\mathcal{T}}$ de sorte que les séries obtenues en bout de branche aient la propriété désirée. Nous considérons alors l'arbre $\mathcal{T}$ de transformations admissibles sur les fonctions correspondant. Nous utiliserons les hypothèses sur notre algèbre de fonctions, et notamment celle de quasi-analycité, pour justifier que les fonctions en bout de branche, à l'instar des séries formelles, vérifient la propriété voulue. Le théorème 2.14 nous permet d'extraire de cet arbre un sous-arbre $\mathcal{S}$ fini.

Soit un polyrayon $r \in (]0; +\infty[)^{n+1}$, nous notons $\mathcal{C} = \cup_{b \in \mathcal{S}} b(I_r)$. Nous faisons attention que les différentes transformations conservent la verticalité. Pourtant, nous verrons que nous aurons

recours à un éclatement de la forme $b_\infty^{x_i,y}$ en bout de certaines branches. Le lemme 2.9 nous montre que l'image du pavé I_r par une telle transformation est une union finie de cylindres. Nous aurons alors recours au lemme 2.16 pour conclure que nous obtenons une décomposition cylindrique d'un voisinage de l'origine.
Nous considérons un polyrayon r' tel que $I_{r'} \subset \cup_{b\in\mathcal{S}} b(I_r)$. Pour $(X,y) \in I_{r'}$, il existe donc $C \in \mathcal{C}$ tel que $(X,y) \in C$. Autrement dit, par définition des cylindres, il existe $b \in \mathcal{S}$ et $(\overline{X},\overline{y}) \in I_r$ tel que : $(X,y) = b(\overline{X},\overline{Y})$.

Quitte à restreindre nos cylindres en utilisant le diviseur de nos transformations, nous pouvons supposer que sur chaque cylindre $b(I_r)$ la suite de transformations b associée est inversible. Nous obtenons alors que :

$$f(X,y) = f\circ b\circ b^{-1}(X,y) = f\circ b(\overline{X},\overline{y}) = bf(\overline{X},\overline{y})$$

Nous montrons ainsi que f a la forme voulue dans le cadre des termes au voisinage de l'origine.

Soit un ensemble A compact de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $(X_0,y_0) \in A$, nous définissons la translation t_{X_0,y_0} par :

$$\forall (X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad t_{X_0,y_0}(X,y) = (X+X_0, y+y_0)$$

Si f est une fonction de $\mathcal{C}_{n+1}$, nous notons $\tilde{f} = f\circ t_{X_0,y_0}$. D'après les hypothèses émises sur l'ensemble $\mathcal{C}_{n+1}$, nous savons que $\tilde{f}$ appartient à $\mathcal{C}_{n+1}$. D'après ce qui précède, il existe un polyrayon r' et un recouvrement cylindrique fini de $I_{r'}$ tels que $\tilde{f}$ ait la forme voulue. Nous notons $V_{r'} = t_{X_0,y_0}(I_{r'})$. Il s'agit d'un voisinage de (X_0,y_0). De plus, nous avons que, pour tout $(X,y) \in V_{r'}$, il existe $(\overline{X},\overline{y}) \in I_{r'}$ tel que $(X,y) = t_{X_0,y_0}(\overline{X},\overline{y})$. Or, $(\overline{X},\overline{y}) \in b(I_r) = C$, il existe donc $(\tilde{X},\tilde{y}) \in I_r$ tel que :

$$(X,y) = t_{X_0,y_0}(\overline{X},\overline{y}) = t_{X_0,y_0} b(\tilde{X},\tilde{y})$$

D'où :

$$\begin{aligned}\forall (X,y) \in V_{r'}, \quad f(X,y) &= f(X - X_0 + X_0, y - y_0 + y_0)\\ &= f(\overline{X} + X_0, \overline{y} + y_0)\\ &= \tilde{f}(\overline{X},\overline{y}) = \tilde{f}\circ b\circ b^{-1}(\overline{X},\overline{y})\\ &= \tilde{f}\circ b(\tilde{X},\tilde{y})\end{aligned}$$

La fonction a donc la forme voulue dans le cadre d'une décomposition cylindrique d'un voisinage du point (X_0,y_0). Par compacité de A, nous montrons ainsi que nous avons un recouvrement cylindrique de A sur lequel la fonction a la forme voulue.

2.7.3 La greffe des arbres

Lors de notre démonstration du théorème de préparation, nous allons devoir procéder en plusieurs étapes. Pour chacune, nous construirons un arbre formel ou un arbre complet. Nous devons donc mettre en place un processus qui nous permettra d'enchaîner les différentes étapes. Ce sera la greffe des arbres.

Théorème 2.15 *Soient $\mathcal{T}$ un arbre complet et une famille $(\mathcal{T}_b)_{b\in\mathcal{T}}$ d'arbres complets . L'arbre $\mathcal{T}_{greffe}$ défini par :*

$$\mathcal{T}_f = \left\{ b'b ; b \in \mathcal{T} \text{ et } b' \in \mathcal{T}_b \right\}$$

est un arbre complet. Nous l'appellerons la greffe de l'arbre $\mathcal{T}$ *à l'aide de la famille d'arbres.* $(\mathcal{T}_b)_{b\in\mathcal{T}}$.

Preuve : Comme $\mathcal{T}$ est complet, il admet un nombre fini de branches. La famille $(\mathcal{T}_b)_{b\in\mathcal{T}}$ est donc une famille finie d'arbres complets. L'arbre $\mathcal{T}_f$ compte donc un nombre fini de branches. Soit $r \in (]0;+\infty[)^{n+1}$ un polyrayon. Nous avons :

$$\cup_{b_f\in\mathcal{T}_f} b_f(I_r) = \cup_{b\in\mathcal{T}} \cup_{b'\in\mathcal{T}_b} b \circ b'(I_r) = \cup_{b\in\mathcal{T}} b\Bigg(\cup_{b'\in\mathcal{T}_b} b'(I_r)\Bigg)$$

Or, nous savons que $\cup_{b'\in\mathcal{T}_b} b'(I_r)$ est un voisinage de l'origine. Il existe donc un polyrayon $r_b \in (]0;+\infty[)^{n+1}$ tel que : $I_{r_b} \subset \cup_{b'\in\mathcal{T}_b} b'(I_r)$. La famille $(I_{r_b})_{b\in\mathcal{T}b}$ est une famille finie de voisinages de l'origine, leur intersection est donc un voisinage de l'origine. Il existe donc un polyrayon $r_0 \in (]0;+\infty[)^{n+1}$ tel que : $I_{r_0} \subset \cap_{b\in\mathcal{T}} I_{r_b}$. Nous en déduisons que, pour tout $b \in \mathcal{T}$:

$$b(I_{r_0}) \subset b(\cap_{b\in\mathcal{T}} I_{r_b}) \subset b(I_{r_b}) \subset b\Bigg(\cup_{b'\in\mathcal{T}_b} b'(I_r)\Bigg)$$

Nous avons alors l'inclusion suivante :

$$\cup_{b\in\mathcal{T}} b(I_{r_0}) \subset \cup_{b\in\mathcal{T}} b\Bigg(\cup_{b'\in\mathcal{T}_b} b'(I_r)\Bigg)$$

Or, l'arbre $\mathcal{T}$ est complet, donc $\cup_{b\in\mathcal{T}} b(I_{r_0})$ est un voisinage de l'origine. Nous en concluons que $\cup_{b_f\in\mathcal{T}_f} b_f(I_r)$ l'est aussi. L'arbre $\mathcal{T}_f$ est donc un arbre complet.$\diamond$

2.7.4 Retour sur l'exemple $f(x,y) = y^2 - x$

Notre but est d'écrire cette fonction dans le cadre de notre théorème de préparation pour les fonctions de $\mathcal{C}_n$. Nous allons découper le pavé I_1 à l'aide d'un recouvrement par une famille finie $\mathcal{C}$ de cylindres telle que pour tout $C \in \mathcal{C}$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}$, deux termes a et b, une unité dans les termes U tels que :

$$\forall (x,y) \in C, \quad f(x,y) = (y - a(x))^d b(x) U(x)$$

Si nous considérons une des fonctions obtenues dans l'arbre 2.1, elle est le résultat d'une suite b de transformations élémentaires appliquée à f. Nous notons $(\overline{x},\overline{y})$ les variables finales. Nous savons que $f \circ b \in \mathcal{C}_2$. Il existe donc $r = (r_1, r_2) \in (]0;+\infty[)^2$ tel que : $f \circ b$ soit définie sur I_r. Nous allons revenir aux variables initiales et pour cela appliquer la transformation élémentaire inverse b^{-1}.

Nous remarquons tout d'abord que pour $x = 0$, la fonction est sous la forme voulue sans qu'il ne soit nécessaire d'effectuer une transformation. Nous posons alors $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$ et nous avons :

$$\forall (x,y) \in C_1, f(x,y) = y^2$$

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la première branche de l'arbre. Pour déterminer notre transformation inverse, nous allons résoudre l'équation dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$(x,y) = b(\overline{x},\overline{y}) \Leftrightarrow (x,y) = (\overline{y}^2\overline{x}^2, \overline{y}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \overline{x}^2\overline{y}^2 \\ y = \overline{y} \end{array} \right.$$

Pour que ce système admette des solutions, il faut et il suffit que $x \geq 0$ et $y \neq 0$. Nous avons alors :

$$(x,y) = b(\overline{x},\overline{y}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{x} = \frac{\sqrt{x}}{|y|} \\ \overline{y} = y \end{array} \right.$$

Il faut distinguer deux cas selon le signe de y. Si $y > 0$, comme le cas $x = 0$ est déja traité et $(\overline{x},\overline{y}) \in I_r$, nous obtenons :

$$0 < \overline{x} \leq r_1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{x}}{y} \leq r1 \Leftrightarrow \frac{1}{r_1}\sqrt{x} \leq y \leq r_2$$

Nous définissons alors le cylindre C_2 par :

$$C_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } \frac{1}{r_1}\sqrt{x} \leq y \leq r_2\right\}$$

La fonction inverse est donnée par :

$$\forall (x, y) \in C_2, b^{-1}(x, y) = (\frac{\sqrt{x}}{y}, y)$$

Nous obtenons que :

$$\forall (x, y) \in C_2, f(x, y) = f \circ b \circ b^{-1}(x, y) = f \circ b((\frac{\sqrt{x}}{y}, y) = y^2(1 - \frac{x}{y^2})$$

Dans le cas où y est négatif, nous notons $C_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } -r_2 \leq y \leq \frac{-1}{r_1}\sqrt{x}\right\}$. Nous obtenons alors :

$$\forall (x, y) \in C_2, f(x, y) = y^2(1 - \frac{x}{y^2})$$

Considérons ensuite la seconde branche de l'arbre. Nous devons résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante :

$$(x, y) = b(\overline{x}, \overline{y}) \Leftrightarrow (x, y) = (\overline{x}^2, \overline{x}(1 + \overline{y})) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \overline{x}^2 \\ y = \overline{x}(1 + \overline{y}) \end{cases}$$

Ce système admet des solutions si et seulement si $x > 0$. Dans ce cas, nous avons :

$$(x, y) = b(\overline{x}, \overline{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x} = \sqrt{x} \\ \overline{y} = \frac{y}{\sqrt{x}} - 1 \end{cases}$$

Comme $(\overline{x}, \overline{y}) \in I_r$, $\overline{x} = \sqrt{x}$ et $x > 0$, nous avons :

$$\begin{cases} 0 < \overline{x} \leq r_1 \\ -r_2 \leq \overline{y} \leq r_2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{r_1}(1 - r_2)\sqrt{x} \leq y \leq (1 + r_2)\sqrt{x}$$

Nous notons $C_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < \sqrt{r_1} \text{ et } (1 - r_2)\sqrt{x} \leq y \leq (1 + r_2)\sqrt{x}\right\}$. En conclusion, la transformation élémentaire inverse est donc donnée par :

$$\forall (x, y) \in C_4, b^{-1}(x, y) = (\sqrt{x}, \frac{y}{\sqrt{x}} - 1)$$

Nous obtenons que :

$$\forall (x, y) \in C_4, f(x, y) = f \circ b \circ b^{-1}(x, y) = f \circ b(\sqrt{x}, \frac{y}{\sqrt{x}} - 1) = \sqrt{x}(y - \sqrt{x})(\frac{y - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 2)$$

Nous choisissons ensuite r_1 et r_2 de sorte que $1 + r_2 = \frac{1}{r_1}$. Cela nous permet de recoller les cylindres C_2 et C_4 et ainsi de recouvrir notre pavé sur lequel f est définie. Nous pouvons par exemple prendre $r_2 = \frac{1}{2}$ et $r_1 = \frac{2}{3}$.

Nous effectuons ces calculs à l'aide des autres branches. Finalement, nous obtenons la décomposition cylindrique suivante :

$$\begin{array}{l}
C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\} \\
C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } \frac{3}{2}\sqrt{x} < y < \frac{1}{2}\} \\
C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } \frac{1}{2}\sqrt{x} < y < \frac{3}{2}\sqrt{x}\} \\
C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } \frac{-1}{2}\sqrt{x} < y < \frac{1}{2}\sqrt{x}\} \\
C_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } \frac{-3}{2}\sqrt{x} < y < \frac{-1}{2}\sqrt{x}\} \\
C_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \text{ et } \frac{-1}{2} < y < \frac{-3}{2}\sqrt{x}\} \\
C_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \text{ et } y > \frac{3}{2}\sqrt{-x}\} \\
C_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \text{ et } \frac{-3}{2}\sqrt{-x} < y < \frac{3}{2}\sqrt{-x}\} \\
C_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \text{ et } y < \frac{-3}{2}\sqrt{-x}\}
\end{array}$$

Et nous avons :

$$\begin{array}{ll}
\forall (x,y) \in C_1, & f(x,y) = y^2 \\
\forall (x,y) \in C_2 \cup C_6 \cup C_7 \cup C_9, & f(x,y) = y^2(1 - \frac{x}{y^2}) \\
\forall (x,y) \in C_4 \cup C_8, & f(x,y) = x(\frac{y^2}{x} - 1) \\
\forall (x,y) \in C_3, & f(x,y) = \sqrt{x}(y - \sqrt{x})(\frac{y-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 2) \\
\forall (x,y) \in C_5, & f(x,y) = -\sqrt{x}(y + \sqrt{x})(-\frac{y+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 2)
\end{array}$$

2.8 La verticalité

Nous allons démontrer dans ce travail un théorème de préparation qui nous servira à la résolution des équations. Dans ce cadre, le retour aux variables initiales revêt une importance particulière. Pour mieux le comprendre, nous nous plaçons dans une configuration particulière.

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}_2$. En conservant la convention de notation des variables adoptée plus haut, nous avons :

$$f(x,y) = bf(\overline{x}, \overline{y})$$

Pour illustrer notre propos, nous supposons l'équivalence suivante :

$$bf(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{y} = \theta(\overline{X})$$

avec θ une fonction de $\mathcal{C}_1$. Pour obtenir une équivalence similaire sur les variables initiales, il est nécessaire de contrôler leur évolution. En effet, s'il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_1$ telle que $b = t^x_\alpha$, nous avons :

$$(x,y) = t^x_\alpha(\overline{x}, \overline{y}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \overline{x} + \alpha(\overline{y}) \\ y = \overline{y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{x} = x - \alpha(y) \\ \overline{y} = y \end{array} \right.$$

Nous avons alors :

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow bf(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{y} = \theta(\overline{x}) \Leftrightarrow y = \theta(x - \alpha(y))$$

L'équation finale ne nous permet pas de résoudre l'équation. Nous voyons qu'il est nécessaire que la variable $\overline{x}$ ne dépende pas de la variable y.

Définition 2.23 *Soit $\mathcal{T}$ un arbre complet. Nous dirons que $\mathcal{T}$ conserve la verticalité de la variable y si et seulement si pour toute branche $b = b_n ... b_1$ de l'arbre nous avons la propriété suivante :*
Pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, b_i n'est pas une transformation de la forme $b^{x_j,y}_\infty$ ou de la forme $t^{x_j}_\alpha$ avec α une fonction dépendant de la variable y.

Concernant le découpage cylindrique, nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.16 *Si b est une transformation élémentaire qui conserve la verticalité de y, alors, pour tout C un $\mathcal{T}_n$-cylindre, $b(C)$ est une union finie de $\mathcal{T}_n$-cylindres.*

Preuve : Nous considérons le cas d'un cylindre $\mathcal{C}$ défini à l'aide de deux fonctions ϕ et ψ de $\mathcal{T}_n$ et d'une base B par :

$$C = \left\{ (X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; X \in B,\ \phi(X) < y < \psi(X) \right\}$$

Soit b une transformation élémentaire conservant la verticalité de y. Nous notons C_0 le cylindre obtenu à partir du diviseur de b. Selon la nature de la transformation b, nous distinguons différents cas :

- Il existe un couple d'indice $(i,j) \in \{1,...,n\}$ et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $b = b_\lambda^{x_i,x_j}$. Nous avons alors :
$$C_0 = \{(X,y) \in B; x_i = 0\}$$
Soit $(X,y) \in b(C)\backslash C_0$. nous savons qu'il existe $(\overline{X},\overline{y}) \in C$ tel que : $(X,y) = b(\overline{X},\overline{y})$. Autrement dit, nous avons :
$$y = \overline{y},\ x_j = \overline{x}_i(\lambda + \overline{x}_j) \text{ et } \forall k \in \{1,...,n\}, k \neq j, \overline{x}_k = x_k$$
ce qui nous permet d'écrire les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}(X,y) \in b(C)\backslash C_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists(\overline{X},\overline{y}) \in B\backslash C_0, \phi(\overline{X}) < \overline{y} < \psi(\overline{X}) \text{ et } (X,y) = b(\overline{X},\overline{y}) \\ &\Leftrightarrow \quad \phi(x_1,..., \frac{x_j}{x_i} - \lambda, ..., x_n) < y < \psi(x_1,..., \frac{x_j}{x_i} - \lambda, ..., x_n)\end{aligned}$$
Nous définissons les termes suivants :
$$\forall(X,y) \in b(C)\backslash C_0, \quad \overline{\phi}(x_1,...,x_n) = \phi(x_1,..., \frac{x_j}{x_i} - \lambda, ..., x_n) \text{ et } \overline{\psi}(x_1,...,x_n) = \psi(x_1,..., \frac{x_j}{x_i} - \lambda, ..., x_n)$$
Nous avons alors :
$$b(C) = \left\{(X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (X,y) \in B\backslash C_0, \overline{\phi}(x_1,...,x_n) < y < \overline{\psi}(x_1,...,x_n)\right\} \cup C_0$$
En remarquant que $b_\infty^{x_i,x_j} = b_0^{x_j,x_i}$, nous avons traité le cas de tous les éclatements selon les variables X.
- Il existe un indice $i \in \{1,...,n\}$ et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b = b_\lambda^{x_i,y}$. Nous avons alors :
$$C_0 = \{(X,y) \in B; x_i = 0\}$$
Soit $(X,y) \in b(C)\backslash C_0$. Nous savons qu'il existe $(\overline{X},\overline{y}) \in C$ tel que : $(X,y) = b(\overline{X},\overline{y})$. Autrement dit, nous avons :
$$y = \overline{x}_i(\lambda + \overline{y}) \text{ et } \forall k \in \{1,...,n\}, \overline{x}_k = x_k$$
Ce qui nous permet d'écrire les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}(X,y) \in b(C)\backslash C_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists(\overline{X},\overline{y}) \in B\backslash C_0, \phi(\overline{X}) < \overline{y} < \psi(\overline{X}) \text{ et } (X,y) = b(\overline{X},\overline{y}) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\phi(X)}{x_i} - \lambda < y < \frac{\psi(X)}{x_i} - \lambda\end{aligned}$$
Nous définissons les termes suivants :
$$\forall(X,y) \in b(C)\backslash C_0, \quad \overline{\phi}(X) = \frac{\phi(X)}{x_i} - \lambda \text{ et } \overline{\psi}(X) = \frac{\psi(X)}{x_i} - \lambda$$
Nous avons alors :
$$b(C) = \left\{(X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (X,y) \in B\backslash C_0, \overline{\phi}(X) < y < \overline{\psi}(X)\right\} \cup C_0$$
- Il existe $\alpha \in \mathcal{C}_{n-1}$ ne dépendant pas de la variable y et un entier $i \in \{1,...,n\}$ tel que $b = t_\alpha^{x_i}$. Soit $(X,y) \in b(C)$. Nous savons qu'il existe $(\overline{X},\overline{y}) \in C$ tel que : $(X,y) = b(\overline{X},\overline{y})$. Autrement dit, nous avons :
$$\overline{y} = y,\ x_i = \overline{x}_i + \alpha(\overline{X}') \text{ et } \forall k \in \{1,...,n\}, k \neq j, \overline{x}_k = x_k$$

Ce qui nous permet d'écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl}(X,y) \in b(C)\backslash C_0 & \Leftrightarrow & \exists(\overline{X},\overline{y}) \in B, \phi(\overline{X}) < \overline{y} < \psi(\overline{X}) \text{ et } (X,y) = b(\overline{X},\overline{y}) \\ & \Leftrightarrow & \phi(x_1,...,x_i - \alpha(X'),...,x_n) < y < \psi(x_1,...,x_i - \alpha(X'),...,x_n)\end{array}$$

Nous définissons les termes suivants :

$$\forall (X,y) \in b(C), \quad \overline{\phi}(X) = \phi(x_1,...,x_i - \alpha(X'),...,x_n) \text{et } \overline{\psi}(X) = \psi(x_1,...,x_i - \alpha(X'),...,x_n)$$

Nous avons alors :

$$b(C) = \left\{(X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (X,y) \in B, \overline{\phi}(X) < y < \overline{\psi}(X)\right\}$$

- Il existe un indice $i \in \{1,...,n\}$, $\epsilon \in \{-1;+1\}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ tels que $b = t_i^{\epsilon,\alpha}$. Nous considérons dans cette démonstration que $\epsilon = 1$. L'autre cas offre un raisonnement identique. Nous définissons les bases suivantes :

$$B^+ = \left\{(X,y) \in B, x_i \leq 0\right\} \text{ et } B^- = \left\{(X,y) \in B, x_i < 0\right\}$$

Soit $(X,y) \in b(C)$. Nous savons qu'il existe $(\overline{X},\overline{y}) \in C$ tel que : $(X,y) = b(\overline{X},\overline{y})$. Autrement dit, nous avons :

$$\overline{y} = y, \ x_i = \overline{x_i}^{\alpha} \text{ et } \forall k \in \{1,...,n\}, k \neq j, \overline{x}_k = x_k$$

Nous distinguons les cas selon la parité de α.

– Premier cas : α est impair. Nous avons alors :

$$x_i = \overline{x_i}^{\alpha} \Leftrightarrow \overline{x}_i = x_i^{\frac{1}{\alpha}}$$

Cela nous permet d'ecrire :

$$\begin{array}{rcl}(X,y) \in b(C) & \Leftrightarrow & \exists(\overline{X},\overline{y}) \in B, \phi(\overline{X}) < \overline{y} < \psi(\overline{X}) \text{ et } (X,y) = b(\overline{X},\overline{y}) \\ & \Leftrightarrow & \phi(x_1,...,x_i^{\frac{1}{\alpha}},...,x_n) < y < \psi(x_1,...,x_i^{\frac{1}{\alpha}},...,x_n)\end{array}$$

Nous définissons les termes suivants :

$$\forall (X,y) \in b(C), \quad \overline{\phi}(X) = \phi(x_1,...,x_i^{\frac{1}{\alpha}},...,x_n) \text{ et } \overline{\psi}(X) = \psi(x_1,...,x_i^{\frac{1}{\alpha}},...,x_n)$$

Nous avons alors :

$$b(C) = \left\{(X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (X,y) \in B, \overline{\phi}(X) < y < \overline{\psi}(X)\right\}$$

– Deuxième cas : α est pair. La fonction $t \mapsto t^{\alpha}$ n'est plus inversible sur $\mathbb{R}$. Il nous faut alors séparer les cas selon que $(\overline{X},\overline{Y})$ appartient à B^+ ou B^-. Nous obtenons alors les termes suivants :

$$\begin{array}{rl}\forall (X,y) \in B^+, \quad & \overline{\phi}_1(X) = \phi(x_1,...,x_i^{\frac{1}{\alpha}},...,x_n) \\ & \overline{\psi}_1(X) = \psi(x_1,...,x_i^{\frac{1}{\alpha}},...,x_n) \\ & \overline{\phi}_2(X) = \phi(x_1,...,-x_i^{\frac{1}{\alpha}},...,x_n) \\ & \overline{\psi}_2(X) = \psi(x_1,...,-x_i^{\frac{1}{\alpha}},...,x_n)\end{array}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{array}{rcl}b(C) & = & \left\{(X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (X,y) \in B^+, \overline{\phi}_1(X) < y < \overline{\psi}_1(X)\right\} \\ & \cup & \left\{(X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (X,y) \in B^+, \overline{\phi}_2(X) < y < \overline{\psi}_2(X)\right\}\end{array}$$

- Il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_n$ telle que $b = t_\alpha^y$. Soit $(X, y) \in b(C)$. Nous savons qu'il existe $(\overline{X}, \overline{y}) \in C$ tel que : $(X, y) = b(\overline{X}, \overline{y})$. Autrement dit, nous avons :

  $$y = \overline{y} + \alpha(\overline{X}) \text{ et } \forall k \in \{1, ..., n\}, \overline{x}_k = x_k$$

  Ce qui nous permet d'écrire les équivalences suivantes :

  $$\begin{aligned} (X, y) \in b(C) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (\overline{X}, \overline{y}) \in B, \phi(\overline{X}) < \overline{y} < \psi(\overline{X}) \text{ et } (X, y) = b(\overline{X}, \overline{y}) \\ &\Leftrightarrow \quad \phi(X) + \alpha(X) < y < \psi(X) + \alpha(X) \end{aligned}$$

  Nous définissons les termes suivants :

  $$\forall (X, y) \in b(C), \quad \overline{\phi}(X) = \phi(X) + \alpha(X) \text{ et } \overline{\psi}(X) = \psi(X) + \alpha(X)$$

  Nous avons alors :

  $$b(C) = \left\{ (X, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (X, y) \in B, \overline{\phi}(X) < y < \overline{\psi}(X) \right\}$$

Dans tous les cas, l'image d'un cylindre est une union finie de cylindre.$\diamond$

Par ailleurs, nous aurons besoin d'enchaîner les suites de transformations élémentaires. Or, si deux suites b_1 et b_2 de transformations élémentaires conservent la verticalité, la composée ne la conserve en général pas. Nous devons donner une définition plus restrictive pour pouvoir composer nos transformations.

Définition 2.24 *Soit $b = b_1 \circ ... \circ b_p$ une suite de transformations élémentaires. Nous disons que cette suite conserve strictement la verticalité de la variable y si :*
Pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, b_i n'est pas une transformation de la forme $b_\infty^{x_j, y}$ ou de la forme $t_\alpha^{x_j}$ avec α une fonction dépendant de la variable y.

Chapitre 3

Normalisation

Nous avons vu qu'à chaque fonction $f \in \mathcal{C}_n$, nous associons une série formelle $\widehat{f} \in \mathbb{R}[[X]]$, son développement de Taylor à l'origine. Dans ce chapitre, nous allons travailler sur ces séries formelles associées aux fonctions et reprendre le processus de normalisation des séries démontré dans l'article de J.P. Rolin, P. Speisseger et A.J. Wilkie [32]. Nous sélectionnons l'une des variables qui jouera alors le rôle de variable dite verticale. A partir de là, nous transformons à l'aide de transformations élémentaires formelles la série pour la normaliser. Nous utiliserons l'hypothèse de quasi-analycité pour montrer que la fonction associée est elle aussi normalisée. Nous commencerons ce chapitre en justifiant le théorème de préparation dans le cas des fonctions d'une et de deux variables.

3.1 Cas de deux variables

Nous détaillons dans cette section l'intégralité de la démonstration du théorème de préparation pour les fonctions de l'algèbre dans le cas de deux variables.

Nous considérons une fonction non identiquement nulle $f \in \mathcal{C}_2$ de notre algèbre définie sur un pavé $B = I \times J$. Nous écrivons son développement en série de Taylor en 0 :

$$\widehat{f}(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} y^i \widehat{a}_i(x)$$

avec pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\widehat{a}_i(x)$ une série formelle d'une seule indéterminée x.Nous avons démontré dans le chapitre précédent que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série formelle $\widehat{a}_i$ correspondait à un germe de l'algèbre $\mathcal{C}_n$, noté a_i. Plus précisément, il s'agit d'une dérivée partielle de f.

3.1.1 Cas d'une variable

Nous commençons par étudier la normalisation dans le cas de fonctions d'une seule variable, car nous utiliserons cette normalisation dans la suite de cette section.
Nous considérons une fonction f de $\mathcal{C}_1$. En utilisant le développement de Taylor à l'origine, nous savons qu'il existe une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels telle que :$\widehat{f}(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$. Nous distinguons deux cas :

- Nous supposons que $a_0 \neq 0$. Il apparaît que $f(0) \neq 0$. La fonction est une unité dans $\mathcal{C}_1$.
- Nous nous plaçons dans le cas où $a_0 = 0$. Nous définissons l'ensemble $E = \{i \in \mathbb{N}; a_i \neq 0\}$. Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus petit élément i_0. Nous avons alors :

$$\widehat{f}(x) = \sum_{i=i_0}^{+\infty} a_i x^i = x^{i_0} \sum_{i=i_0}^{+\infty} a_i x^{i-i_0}$$

Nous notons $\widehat{U}(x) = \sum_{i=i_0}^{+\infty} a_i x^{i-i_0}$. Nous avons alors : $\widehat{f}(x) = x^{i_0}\widehat{U}(x)$. La condition de stabilité par division monomiale nous permet d'affirmer qu'il existe une fonction $U \in \mathcal{C}_1$ telle que : $\widehat{(U)} = \widehat{U}$. De plus, nous avons : $U(0) = \widehat{U}(0) = a_{i_0} \neq 0$. La fonction U est donc une unité de $\mathcal{C}_1$. Par ailleurs, comme $\widehat{f} = \widehat{(x^{i_0}U)}$, d'après la quasi-analycité, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I_r, \quad f(x) = x^{i_0}U(x)$$

Nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Si $f \in \mathcal{C}_1$, alors il existe un réel $r \in]0;+\infty[$, un entier $p \in \mathbb{N}$ et une unité U dans $\mathcal{C}_1$ tels que :*

$$\forall x \in]-r;r[, \quad f(x) = x^p U(x)$$

3.1.2 Etape 1 : mise à l'ordre d

Le but est de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Soit une fonction $f \in \mathcal{C}_2$. Il existe alors un entier $d \in \mathbb{N}$, un pavé I_r de $\mathbb{R}^2$, des fonctions $a_0, ..., a_{d-1}$ de $\mathcal{C}_1$, un entier n et une unité $U \in \mathcal{C}_2$ tels que :*

$$\forall (x,y) \in I_r, \quad f(x,y) = x^n(y^d U(x,y) + \sum_{i=0}^{d-1} y^i a_{d-i}(x))$$

Nous dirons alors que la fonction f est d'ordre fini selon la variable y.

Preuve : Nous allons distinguer deux cas :

- **Cas 1 :** il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{i_0}(0) \neq 0$, on peut alors écrire :

$$\widehat{f}(x,y) = \sum_{i=0}^{i_0-1} y^i \widehat{a}_i(x) + y^{i_0} \sum_{i=i_0}^{\infty} \widehat{a}_i(x) y^{i-i_0}$$

Nous définissons les séries formelles suivantes :

$$\widehat{U}(x,y) = \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i(x) y^{i-i_0} \text{ et } \widehat{g}(x,y) = y^{i_0} \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i(x) y^{i-i_0}$$

D'après ce qui précède, nous avons l'égalité suivante :

$$\widehat{g}(x,y) = \widehat{f}(x,y) - \sum_{i=0}^{i_0-1} y^i \widehat{a}_i(x)$$

La fonction définie sur B par $(x,y) \mapsto f(x,y) - \sum_{i=0}^{i_0-1} y^i a_i(x)$ est une somme finie d'éléments de l'algèbre $\mathcal{C}_2$, elle appartient à cette algèbre. L'hypothèse de quasi-analycité nous permet alors de conclure qu'il existe une fonction g élément de l'algèbre $\mathcal{C}_2$ telle que $\widehat{(g)} = \widehat{g}$.

En outre, nous avons l'égalité $\widehat{g}(x,y) = y^{i_0}\widehat{U}(x,y)$ et $g \in \mathcal{C}_2$. D'après l'hypothèse de quasi-analycité, nous en déduisons qu'il existe U élément de $\mathcal{C}_2$ telle que $\widehat{(U)} = \widehat{U}$. De plus, nous savons que $U(0) = a_{i_0}(0) \neq 0$, la fonction U est donc une unité dans $\mathcal{C}_2$.

Nous avons donc obtenu qu'il existe une unité U dans $\mathcal{C}_2$ telle que :

$$\widehat{f}(x,y) = \sum_{i=0}^{i_0-1} y^i \widehat{a}_i(x) + y^{i_0}\widehat{U}(x,y) = \widehat{\left(\sum_{i=0}^{i_0-1} y^i a_i(x) + y^{i_0}U(x,y)\right)}$$

D'après l'hypothèse de quasi-analycité, nous savons qu'il existe un pavé I_r tel que :

$$\forall (x,y) \in I_r, f(x,y) = \sum_{i=0}^{i_0-1} y^i a_i(x) + y^{i_0} U(x,y)$$

La fonction f est d'ordre fini en y.

- **Cas 2 :** pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i(0) = 0$. Nous écrivons le développement de Taylor de la fonction a_i. Autrement dit, il existe une suite de réels $(a_{i,j})_{j \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\widehat{a}_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} x^j$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $E_i = \{j \in \mathbb{N}^*; a_{i,j} \neq 0\}$. Cet ensemble est soit vide, mais alors, d'après l'hypothèse de quasi-analycité, la fonction a_i est identiquement nulle, soit non vide et admet donc un plus petit élément que l'on note α_i. En outre, l'ensemble $F = \{\alpha_i; i \in \mathbb{N}\}$ n'est pas vide, car f n'est pas identiquement nulle, et il est inclus dans $\mathbb{N}^*$. Il admet donc un plus petit élément α_{i_0}. Il en résulte :

$$\widehat{f}(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} y^i \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} x^j = x^{\alpha_{i_0}} \sum_{i=0}^{\infty} y^i \sum_{j=\alpha_i}^{\infty} a_{i,j} x^{j-\alpha_{i_0}}$$

D'après la définition de α_{i_0}, nous savons que, pour tout entier naturel $i \in \mathbb{N}$, $\alpha_{i_0} \leq \alpha_i$. En conséquence, nous avons, pour tout entier $j \geq \alpha_i$, $j - \alpha_{i_0} \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous définissons la série formelle suivante :

$$\widehat{b}_i(x) = \sum_{j=\alpha_i}^{\infty} a_{i,j} x^{j-\alpha_{i_0}}$$

Comme, pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons l'égalité $\widehat{a}_i = x^{\alpha_{i_0}} \widehat{b}_i$ et que $a_i \in \mathcal{C}_1$, d'après la condition $(C7)$ de stabilité par division monomiale, nous pouvons conclure que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une fonction b_i dans notre algèbre $\mathcal{C}_1$ avec $\widehat{(b_i)} = \widehat{b}_i$. Par ailleurs, nous avons $b_{i_0}(0) = a_{i_0,\alpha_{i_0}} \neq 0$, nous en concluons que b_{i_0} est une unité dans $\mathcal{C}_1$.
Nous avons alors :

$$\widehat{f}(x,y) = x^{\alpha_{i_0}} \left(\sum_{i=0}^{i_0-1} y^i \widehat{b}_i(x) + y^{i_0} \sum_{i=i_0}^{\infty} y^{i-i_0} \widehat{b}_i(x) \right)$$

Nous définissons les séries formelles suivantes :

$$\widehat{U}(x,y) = \sum_{i=i_0}^{\infty} \widehat{b}_i(x) y^{i-i_0} \text{ et } \widehat{g}(x,y) = x^{\alpha_{i_0}} y^{i_0} \widehat{U}(x,y)$$

Nous avons alors :

$$\widehat{g}(x,y) = \widehat{f}(x,y) - x^{\alpha_{i_0}} \sum_{i=0}^{i_0-1} y^i \widehat{b}_i(x)$$

La fonction $x \mapsto f(x,y) - x^{\alpha_{i_0}} \sum_{i=0}^{i_0-1} y^i b_i(x)$ est une somme finie de produits de fonctions de $\mathcal{C}_2$, elle appartient donc à $\mathcal{C}_2$. Autrement dit, il existe g un élément de $\mathcal{C}_2$ tel que : $\widehat{(g)} = \widehat{g}$. Comme $\widehat{g} = x^{\alpha_{i_0}} y^{i_0} \widehat{U}$, l'hypothèse de stabilité par division monomiale nous permet de conclure qu'il existe une fonction U appartenant à $\mathcal{C}_2$ telle que : $\widehat{(U)} = \widehat{U}$. Or

$U(0) = b_{i_0}(0) = a_{i_0,\alpha_{i_0}} \neq 0$, donc U est une unité dans $\mathcal{C}_2$.
Nous avons obtenu l'égalité suivante :

$$\widehat{f}(x,y) = x^{\alpha_{i_0}} \left(\sum_{i=0}^{i_0-1} y^i \widehat{b}_i(x) + y^{i_0} \widehat{U}(x,y) \right)$$

D'après la quasi-analycité, nous savons qu'il existe un pavé I_r tel que :

$$\forall (x,y) \in I_r, \quad f(x,y) = x^{\alpha_{i_0}} \left(\sum_{i=0}^{i_0-1} y^i b_i(x) + y^{i_0} U(x,y) \right)$$

Dans tous les cas, nous avons montré qu'il existe un entier $d \in \mathbb{N}$, un pavé B', des fonctions $a_0, ..., a_{d-1} \in \mathcal{C}_1$, $n \in \mathbb{N}$ et une unité $U \in \mathcal{C}_2$ tels que

$$\forall (x,y) \in B', \quad f(x,y) = x^n \left(y^d U(x,y) + \sum_{i=0}^{d-1} y^i a_{d-i}(x) \right) . \diamond$$

Nous dirons que la fonction f a été mise à l'ordre d.

3.1.3 Etape 2 : chute de l'ordre

Dans cette étape, nous commençons par supposer que la fonction a_1 n'est pas identiquement nulle et que f est d'ordre d, alors $\frac{\partial^{d-1} f}{\partial y^{d-1}}$ est d'ordre 1. Nous appliquons à cette dérivée partielle le théorème des fonctions implicites selon lequel il existe une fonction de l'algèbre α et un voisinage V' de 0 tels que :

$$\forall x \in V', \quad \frac{\partial^{d-1} f}{\partial y^{d-1}}(x, \alpha(x)) = 0$$

Nous effectuons alors la transformation de Tchirnhausen : t_α^y. f se transforme en une fonction $t_\alpha^y f$ qui reste d'ordre d, mais qui n'a plus de terme de degré $d-1$. Nous avons obtenu qu'il existe un pavé I_{r_1} :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in I_{r_1}, \quad t_\alpha^y f(x,y) &= y^d U(x,y) + \sum_{i=2}^{d} y^{d-i} a_i(x) \\ &= y^d U(x,y) + \sum_{i=2}^{d} y^{d-i} x^{n_i} U_i(x) \end{aligned}$$

La deuxième égalité provient du fait que le théorème de normalisation 3.1 en une variable s'obtient sans effectuer de transformation élémentaire. Nous effectuons alors la ramification $x \to x^{d!}$ de manière à rendre les puissances de x divisibles par tous les entiers compris entre 2 et d.

Nous considérons l'ensemble $E = \{\frac{n_i}{i}; i = 2, ..., d\}$. Remarquons tout d'abord que grâce à la ramification précédemment effectuée, nous savons que $E \subset \mathbb{N}$. Il admet un plus petit élément. Il correspond à un indice que nous notons i_0. Dans le cas où il y aurait plusieurs choix possibles, nous choisissons l'indice le plus petit possible. Par ailleurs, pour tout $i \in \{2, ..., d\}$, nous avons :

$$\frac{n_i}{i} \geq 1 \Leftrightarrow n_i \geq i \Leftrightarrow n_i - i \geq 0$$

Nous allons procéder à des éclatements pour faire diminuer l'ordre. Il nous faut considérer trois cas :

- Nous effectuons le changement qui correspond à $b_\lambda^{x,y}$ sur la série formelle avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_\lambda^{x,y}(\widehat{t_\alpha^y f})(x,y) &= x^d(\lambda+y)^d\widehat{U}(x,x(\lambda+y)) + \sum_{i=2}^{d}(\lambda+y)^{d-i}x^{n_i+(d-i)}\widehat{U}_i(x) \\
&= x^d\Bigg(\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}\lambda^i y^{d-i}\widehat{U}(x,x(\lambda+y)) + \sum_{i=2}^{d}(\lambda+y)^{d-i}x^{n_i-i}\widehat{U}_i(x)\Bigg) \\
&= x^d\Bigg[y^{d-1}(y+d)\widehat{U}(x,x(\lambda+y)) + \sum_{i=2}^{d}\Bigg(\binom{d}{i}\lambda^i y^{d-i}\widehat{U}(x,x(\lambda+y)) \\
&+ (\lambda+y)^{d-i}x^{n_i-i}\widehat{U}_i(x)\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}$$

Nous notons $\widehat{g}$ la série formelle située entre les crochets. Par l'hypothèse de stabilité par division monomiale, nous savons qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_2$ telle que $\widehat{(g)} = \widehat{g}$. Il existe donc un pavé I_{r_2} tel que :

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in I_{r_2}, g(x,y) &= y^{d-1}(y+d)U(x,x^{\frac{n_{i_0}}{i_0}}(\lambda+y)) + \sum_{i=2}^{d}\Bigg(\binom{d}{i}\lambda^i y^{d-i}U(x,x^{\frac{n_{i_0}}{i_0}}(\lambda+y)) \\
&+ (\lambda+y)^{d-i}x^{n_i-i\frac{n_{i_0}}{i_0}}U_i(x)\Bigg)
\end{aligned}$$

En remarquant que : $\Bigg((y+d)U(x,x^{\frac{n_{i_0}}{i_0}}(\lambda+y))\Bigg)(0) = dU(0) \neq 0$, nous pouvons conclure que g est d'ordre $d-1$.

- Nous effectuons l'éclatement $\widehat{b}_\infty^{x,y}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_\infty^{x,y}(\widehat{t_\alpha^y f})(x,y) &= y^d\widehat{U}(xy,y) + \sum_{i=2}^{d}y^{d-i+n_i}x^{n_i}\widehat{U}_i(xy) \\
&= y^d\Bigg(\widehat{U}(xy,y) + \sum_{i=2}^{d}y^{n_i-i}x^{n_i}\widehat{U}_i(xy)\Bigg)
\end{aligned}$$

Nous notons $\widehat{V}$ la série formelle donnée par :

$$\widehat{V}(x,y) = \widehat{U}(xy,y) + \sum_{i=2}^{d}y^{n_i-i}x^{n_i}\widehat{U}_i(yx)$$

Si b est la suite de transformations élémentaires déjà effectuées, nous avons $f \circ b \in \mathcal{C}_2$ et $\widehat{f\circ b} = y^{d\frac{n_{i_0}}{i_0}}\widehat{V}(x,y)$. L'hypothèse de stabilité par division monomiale nous permet de conclure qu'il existe $V \in \mathcal{C}_2$ telle que $\widehat{(V)} = \widehat{V}$. Comme, de plus $V(0) = \widehat{V}(0) = \widehat{U}(0) \neq 0$, V est une unité de $\mathcal{C}_2$. Nous utilisons l'hypothèse de quasi-analycité pour justifier qu'il existe un pavé I_{r_2} de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall (x,y) \in I_{r_2}, \quad bf(x,y) = y^{d\frac{n_{i_0}}{i_0}}U(x,y)$$

Dans ce dernier cas, l'ordre n'a pas chuté, mais nous avons obtenu immédiatement la normalisation de notre fonction. Le processus s'arrête donc à cette étape.

- Nous effectuons l'éclatement $\widehat{b_0^{x,y}}$ sur la série formelle. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\widehat{b_0^{x,y}}(\widehat{t_\alpha^y f})(x,y) &= y^d x^d \widehat{U}(x,xy) + \sum_{i=2}^{d} y^{d-i} x^{n_i+(d-i)} \widehat{U}_i(x) \\
&= x^d \left(y^d \widehat{U}(x,xy) + \sum_{i=2}^{d} y^{d-i} x^{n_i-i} \widehat{U}_i(x) \right) \\
&= x^d \widehat{g}(x,y)
\end{aligned}$$

Comme $b_0^{x,y} t_\alpha^y f$ est un élément de $\mathcal{C}_2$, l'hypothèse de stabilité par division monomiale nous permet de conclure qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_2$ telle que : $\widehat{(g)} = \widehat{g}$. De plus, nous avons :

$$\widehat{g}(x,y) = y^d \widehat{U}(x,xy) + \sum_{i=2}^{d} y^{d-i} x^{n_i-i} \widehat{U}_i(x)$$

En utilisant la quasi-analycité, nous savons qu'il existe un pavé I_{r_2} tel que :

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in I_{r_2}, g(x,y) &= y^d U(x,xy) + \sum_{i=2}^{d} y^{d-i} x^{n_i-i} U_i(x) \\
&= y^{d-i_0} \left(y^{i_0} U(x,xy) + \sum_{i=2}^{i_0} y^{i_0-i} x^{n_i-i} U_i(x) \right) \\
&+ \sum_{i=i_0+1}^{d} y^{d-i} x^{n_i-i} U_i(x)
\end{aligned}$$

Il faut distinguer deux possibilités.

Premier cas : $n_{i_0} = i_0$. Comme $\left(y^{i_0} U(x, x^{\frac{n_{i_0}}{i_0}} y) + \sum_{i=2}^{i_0} y^{i_0-i} x^{i(\frac{n_i}{i} - \frac{n_{i_0}}{i_0})} U_i(x) \right)(0) = U_{i_0}(0) \neq 0$, la fonction obtenue est d'ordre $d - i_0$.

Deuxième cas : $n_{i_0} > i_0$. Nous définissons l'entier $\alpha(\widehat{t_\alpha^y f}) = \min\left\{ n_i ; i \in \{2, ..., d\} \right\}$. Nous voyons que $\alpha(\widehat{g}) = \min\left\{ n_i - i ; i \in \{2, ..., d\} \right\} < \alpha(f)$. Nous effectuons à nouveau la transformation élémentaire : $\tau = \left\{ \widehat{b_\lambda^{x,y}} ; \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \right\}$. Nous remarquons tout d'abord que, pour tout $i \in \{2, ..., d\}$, nous avons :

$$\frac{n_i}{i} > 1 \Leftrightarrow \frac{n_i}{i} \geq 2 \Leftrightarrow n_i \geq 2i$$

En reprenant les calculs ci-dessus, nous voyons que soit la série est normalisée, soit l'ordre a chuté, soit nous obtenons une série :

$$\widehat{g}_1(x,y) = y^d \widehat{U}(x, x^2 y) + \sum_{i=2}^{d} y^{d-i} x^{n_i-2i} \widehat{U}_i(x)$$

Nous avons alors : $\alpha(\widehat{g}_1) < \alpha(\widehat{g})$. Si nous continuons notre processus, nous construisons une suite d'entiers $\alpha(\widehat{g}_j)$ strictement décroissante. Nous savons alors qu'à partir d'un certain moment nous aboutirons à 0. Dans ce cas, l'ordre a chuté.

En conclusion, nous voyons qu'à l'aide de transformations élémentaires, il est possible soit de normaliser notre fonction, soit de se trouver en présence d'une fonction d'ordre inférieur.

Remarque 1: L'exemple qui suit sert à comprendre l'intérêt de la transformation de Tchnirhausen. On considère la fonction $f \in \mathcal{C}_2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in B, f(x,y) = y^2 - 2yx - x^2(1+x)$$

Comme elle est polynomiale, il s'agit d'une fonction de $\mathcal{C}_2$ d'ordre 2. Supposons que l'on effectue la transformation $y = x(1+\overline{y})$, on obtiendrait le résultat :

$$f(x,y) = (x(1+\overline{y}))^2 - 2x^2(1+\overline{y}) - x^2(1+x) = x^2(\overline{y}^2 - x)$$

On constate que l'ordre n'a pas chuté, ce qui tient au fait que les monômes de degré 1 en y s'annulent. Si, en revanche, on effectue la transformation de Tchirnhausen $y = \overline{y} + x$ avant l'éclatement, on obtient :

$$f(x,y) = (\overline{y}+x)^2 - 2x(\overline{y}+x) - x^2(1+x) = \overline{y}^2 - x^2(2+x)$$

Puis,

$$f(x,y) = (x(1+\overline{\overline{y}}))^2 - x^2(2+x) = x^2(-1 + (\overline{\overline{y}})^2 + 2\overline{\overline{y}} + x)$$

On constate que cette fois, l'ordre a bien chuté. Dans l'exemple étudié ici, si nous n'effectuons pas de transformation de Tchirnhausen, il suffit de recommencer un éclatement pour faire chuter l'ordre. Mais si on considère la série formelle :

$$\widehat{f}(x,y) = y^2 - 2\sum_{i=1}^{\infty} x^i y + (\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^2$$

il est possible de réaliser une infinité de fois l'éclatement $y = x\overline{y}$ sans jamais faire chuter l'ordre. On montrera par la suite que ce cas de figure se produit du fait que la fonction f est déjà sous la forme voulue. En effet, dans cet exemple, on a :

$$\forall (x,y) \in B, f(x,y) = (y - \sum_{i=1}^{\infty} x^i)^2$$

3.1.4 Etape 3 : récurrence sur l'ordre

Soit $f \in \mathcal{C}_2$. Nous avons démontré en conclusion de l'étape 1 qu'il existe un polyrayon $r \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, des fonctions $a, a_0, ..., a_{d-1} \in \mathcal{C}_1$ et une unité $U \in \mathcal{C}_2$ tels que

$$\forall (x,y) \in I_r, \quad f(x,y) = a(x)(y^d U(x,y) + \sum_{i=0}^{d-1} y^i a_{d-i}(x))$$

Nous effectuons un raisonnement par récurrence sur l'ordre pour montrer que pour tout germe $f \in \mathcal{C}_2$, il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que pour tout changement de variable élémentaire $b \in \mathcal{T}$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$, une germe $\alpha \in \mathcal{C}_1$, m un monôme de la variable x et $U \in \mathcal{C}_2$ une unité tels que :

$$bf(x,y) = (y - \alpha(x))^p m(X) U(x,y)$$

Initialisation : si $d = 0$, alors la fonction f s'écrit : $f(x,y) = a(x)U(x,y)$. D'après le théorème 3.1, nous savons qu'il existe un réel $r \in]0; +\infty[$, monôme m de la variable x et une unité $V \in \mathcal{C}_1$ tels que :

$$\forall x \in I_r, \quad a(x) = m(X)V(x)$$

La fonction f est donc écrite comme le produit d'un monôme de la variable x et d'une unité. Elle est sous une forme réduite.

Hérédité : nous supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre d. Nous considérons un germe $f \in \mathcal{C}_2$ tel qu'il existe des fonctions $a, a_0, ..., a_d \in \mathcal{C}_1$ et une unité $U \in \mathcal{C}_2$ vérifiant :

$$f(x,y) = a(x)(y^{d+1}U(x,y) + \sum_{i=0}^{d} y^i a_{d-i}(x))$$

Nous définissons la fonction $g \in \mathcal{C}_2$ par :

$$g(x,y) = y^{d+1}U(x,y) + \sum_{i=0}^{d} y^i a_{d-i}(x)$$

Nous appliquons l'étape 2 de chute de l'ordre, il existe donc un arbre formel de transformations admissibles $\widehat{\mathcal{T}_1}$ tel que l'ordre de $\widehat{g}$ a chuté. Soit $b_1 \in \mathcal{T}_1$, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction $b_1 g$, nous savons qu'il existe un arbre complet $\mathcal{T}_{b_1}$ de transformations élémentaires tel que, pour tout b_2, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$, une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_1$, m un monôme de la variable $\overline{x}$ et $U \in \mathcal{C}_2$ une unité tels que :

$$b_2 b_1 g(x,y) = (y - \alpha(x))^p m(X) U(x,y)$$

Nous définissons l'arbre admissible : $\mathcal{T} = \left\{ b_2 b_1 ; b_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ et } b_2 \in \mathcal{T}_{b_1} \right\}$. Alors pour tout $b = b_2 b_1 \in \mathcal{T}$, nous avons :

$$\begin{aligned} b_2 b_1 f(x,y) &= b_2 b_1 \Big(a(x) g(x,y) \Big) \\ &= b_2 b_1 (a(x)) \times b_2 b_1 (g(x,y)) \\ &= b_2 b_1 a(x) (y - \alpha(x))^p m(X) U(x,y) \end{aligned}$$

Or $b_2 b_1 a$ étant une fonction d'une seule variable, nous avons vu d'après la proposition 3.1 qu'elle se normalise sans effectuer de transformation. Nous obtenons donc :

$$b_2 b_1 f(x,y) = (y - \alpha(x))^p m'(X) V(x,y)$$

Comme les arbres construits sont tous de hauteur finie, d'après le théorème 2.14, il existe un sous arbre complet $\mathcal{S}$ fini tel que pour tout $b \in \mathcal{S}$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$, une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_1$, m un monôme de la variable x et $U \in \mathcal{C}_2$ une unité tels que :

$$bf(x,y) = (y - \alpha(x))^p m(X) U(x,y)$$

Conclusion : Nous avons démontré la proposition suivante :

Proposition 3.3 *Soit $f \in \mathcal{C}_2$, alors il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ fini tel que pour tout $b \in \mathcal{T}$,il existe un entier $p \in \mathbb{N}$, une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_1$, m un monôme de la variable x et $U \in \mathcal{C}_2$ une unité tels que :*

$$bf(x,y) = (y - \alpha(x))^p m(X) U(x,y)$$

3.2 Normalisation

3.2.1 Définition

Définition 3.1 *Une série $\widehat{f} \in \mathbb{R}[[X]]$ est dite normale s'il existe $r \in \mathbb{N}^n$ et $\widehat{U}$ une unité de $R[[X]]$ tels que $\widehat{f}(X) = X^r \widehat{U}(X)$.*

Remarque 2: si $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, on note $|r| = \sum_{i=1}^{n} r_i$.

Lemme 3.4 *Soient $\widehat{f_1}$ et $\widehat{f_2}$ deux séries formelles de $\mathbb{R}[[X]]$ et $i_0 \in \{1, ..., n\}$. Si le monôme x_{i_0} divise le produit $\widehat{f_1}\widehat{f_2}$, alors il divise l'une des deux séries.*

Preuve : Comme x_{i_0} est fixé, nous noterons $\mathbb{R}_{i_0}[[X']]$ l'ensemble des séries formelles de $\mathbb{R}[[X]]$ dans lesquelles aucun monôme ne contient x_{i_0} et $\mathbb{R}_{i_0}[[X]]$ l'ensemble des séries de $\mathbb{R}[[X]]$ dont tous les monômes contiennent la variable x_{i_0}. Nous scindons nos séries$\widehat{f_1}$ et $\widehat{f_2}$ en deux parties : l'une étant constituée par des monômes contenant l'indéterminée x_{i_0} et l'autre par tous les autres monômes. Nous écrivons alors qu'il existe des séries $(\widehat{g_1}, \widehat{g_2}) \in (\mathbb{R}_{i_0}[[X]])^2$ et $(\widehat{h_1}, \widehat{h_2}) \in \mathbb{R}_{i_0}[[X']]$ telles que :

$$\widehat{f_1} = \widehat{h_1} + \widehat{g_1} \text{ et } \widehat{f_2} = \widehat{h_2} + \widehat{g_2}$$

Par définition de $\mathbb{R}_{i_0}[[X]]$, il existe deux séries formelles $\widehat{g'_1}$ et $\widehat{g'_2}$ de $\mathbb{R}[[X]]$ telles que :

$$\widehat{g_1} = x_{i_0}\widehat{g'_1} \text{ et } \widehat{g_2} = x_{i_0}\widehat{g'_2}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \widehat{f_1}\widehat{f_2} &= (\widehat{h_1} + x_{i_0}\widehat{g'_1})(\widehat{h_2} + x_{i_0}\widehat{g'_2}) \\ &= \widehat{h_1}\widehat{h_2} + x_{i_0}(\widehat{h_1}\widehat{g'_2} + \widehat{h_2}\widehat{g'_1} + x_{i_0}\widehat{g'_1}\widehat{g'_2}) \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse, x_{i_0} divise le produit $\widehat{f_1}\widehat{f_2}$, on sait qu'il existe une série $\widehat{f} \in \mathbb{R}[[X]]$ telle que : $\widehat{f_1}\widehat{f_2} = x_{i_0}\widehat{f}$. Nous obtenons alors :

$$\widehat{h_1}\widehat{h_2} = x_{i_0}(\widehat{f} - (\widehat{h_1}\widehat{g'_2} + \widehat{h_2}\widehat{g'_1} + x_{i_0}\widehat{g'_1}\widehat{g'_2}))$$

Or, par définition de $\mathbb{R}_{i_0}[[X']]$, ni $\widehat{h_1}$ ni $\widehat{h_2}$ ne contient l'indéterminée x_{i_0}, le produit des deux est divisible par le monôme x_{i_0} si et seulement s'il est nul. En utilisant l'intégrité de $\mathbb{R}[[X]]$, on en déduit que $\widehat{h_1} = 0$ ou $\widehat{h_2} = 0$. Cela signifie qu'au moins une des deux séries $\widehat{f_1}$ ou $\widehat{f_2}$ appartient à $\mathbb{R}_{i_0}[[X]]$. Cela nous permet donc de conclure que $\widehat{f_1}$ ou $\widehat{f_2}$ est divisible par le monôme x_{i_0}.$\diamond$

Lemme 3.5 *Soient $\widehat{f_1}$,...,$\widehat{f_p} \in \mathbb{R}[[X]]$, alors le produit $\widehat{f_1}...\widehat{f_p}$ est normal si et seulement si chaque f_k est normale.*

Preuve : Le cas $p = 1$ étant immédiat, nous supposons dans la suite de la démonstration que p est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit $(\widehat{f_i})_{i\in\{1,...,p\}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}[[X]]$. Nous supposons que chaque élément de cette famille est normal.
Pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, il existe donc un multi-indice $r_i \in \mathbb{N}^n$ et une unité $\widehat{U_i} \in \mathbb{R}[[X]]$ tels que :$\widehat{f_i} = X^{r_i}U_i$. Nous pouvons alors écrire :

$$\prod_{i=1}^{p} \widehat{f_i} = \prod_{i=1}^{p} X^{r_i}U_i = X^{\sum_{i=1}^{p} r_i} \prod_{i=1}^{p} U_i = X^r U$$

avec un multi-indice $r = (r_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{N}^n$ et $U = \prod_{i=1}^{p} U_i$ une unité de $\mathbb{R}[[X]]$. Le produit est donc normal.
Réciproque : Nous effectuons un raisonnement par récurrence sur le cardinal $p \geq 2$ de la famille de séries formelles.

Initialisation : Nous considérons $(\widehat{f_1}, \widehat{f_2}) \in (\mathbb{R}[[X]])^2$ deux séries formelles telles qu'il existe $r \in \mathbb{N}^n$ et $\widehat{U} \in \mathbb{R}[[X]]$ une unité avec $\widehat{f_1}\widehat{f_2} = X^r\widehat{U}$. Comme $r \in \mathbb{N}^n$, on note $r = (r_1, ..., r_n)$ avec pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $r_i \in \mathbb{N}$ et $|r| = \sum_{i=1}^{n} r_i$.
Nous allons démontrer par récurrence la proposition suivante :
P_n :*" si $\widehat{f_1}$ et $\widehat{f_2}$ sont deux séries formelles de $\mathbb{R}[[X]]$ telles qu'il existe $r \in \mathbb{N}^n$ et $\widehat{U} \in \mathbb{R}[[X]]$ une unité avec $\widehat{f_1}\widehat{f_2} = X^r\widehat{U}$ et $|r| = p$, alors ces deux séries sont normales. "*

Initialisation : Nous considérons deux séries formelles $\widehat{f_1}$ et $\widehat{f_2}$ de $\mathbb{R}[[X]]$ telles qu'il existe $r \in \mathbb{N}^n$ et $\widehat{U} \in \mathbb{R}[[X]]$ une unité avec $\widehat{f_1}\widehat{f_2} = X^r\widehat{U}$ et $|r| = 0$. Cette hypothèse signifie que le produit $\widehat{f_1}\widehat{f_2}$ est une unité. Nous pouvons en conclure que $\widehat{f_1}$ et $\widehat{f_2}$ sont des unités et donc que ces deux séries sont normales.

Hérédité : Nous supposons que P_p est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Soient $\widehat{f_1}$ et $\widehat{f_2}$ sont deux séries formelles de $\mathbb{R}[[X]]$ telles qu'il existe $r \in \mathbb{N}^n$ et $\widehat{U} \in \mathbb{R}[[X]]$ une unitée avec $\widehat{f_1}\widehat{f_2} = X^r\widehat{U}$ et $|r| = p+1$. Comme $|r| \neq 0$, il existe donc $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $r_{i_0} \neq 0$. Le monôme x_{i_0} divise le produit $\widehat{f_1}\widehat{f_2}$. D'après le lemme précédent 3.4, nous savons qu'il divise l'une des deux séries. Sans nuire à la généralisation de la démonstration, nous pouvons supposer que x_{i_0} divise $\widehat{f_1}$. Il existe une série $\widehat{g}_1 \in \mathbb{R}[[X]]$ telle que nous avons $\widehat{f_1} = x_{i_0}\widehat{g}_1$. Nous obtenons alors :$\widehat{g}_1\widehat{f_2} = X^{r'}U$ avec $|r'| = |r| - 1 = p$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous pouvons en conclure que $\widehat{g}_1$ et $\widehat{f_2}$ sont normales. Or, nous savons que $\widehat{f_1} = x_{i_0}\widehat{g}_1$, nous avons donc démontré que $\widehat{f_1}$ et $\widehat{f_2}$ sont normales.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, nous pouvons conclure que P_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit, si $\widehat{f_1}$ et $\widehat{f_2}$ sont deux séries telles que leur produit est normal, alors elles sont toutes les deux normales. Nous avons démontré l'initialisation pour la preuve du lemme.

Hérédité : Nous supposons la propriété vraie au rang $p \in \mathbb{N}$. Nous considérons une famille $(\widehat{f_i})_{i\in\{1,...,p+1\}}$ telle que le produit $\prod_{i=1}^{p+1}\widehat{f_i} = \prod_{i=1}^{p}\widehat{f_i} \times f_{p+1}$ est normal. D'après l'initialisation, nous savons que $\prod_{i=1}^{p}\widehat{f_i}$ et f_{p+1} sont normales. En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons que, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, la série $\widehat{f_i}$ est normale.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, nous avons montré que si $(\widehat{f_i})_{i\in\{1,...,p+1\}}$ est une famille de séries formelles telle que le produit $\prod_{i=1}^{p+1}\widehat{f_i} = \prod_{i=1}^{p}\widehat{f_i} \times f_{p+1}$ est normal, alors toutes les séries qui composent cette famille sont normales. Ce résultat achève la démonstration du lemme.$\diamond$

3.2.2 Processus de normalisation d'une série formelle

Nous réécrivons à l'aide de nos notations le théorème de normalisation, démontré dans l'article [32], concernant les séries formelles :

Théorème 3.6 *Soit $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{C}_n}$. Il existe un arbre formel $\widehat{\mathcal{T}}$ de transformations élémentaires admissibles tel que, pour toute branche $\widehat{b} \in \widehat{\mathcal{T}}$, la série $b\widehat{f}$ soit normalisée.*

Ce théorème est démontré en utilisant uniquement des transformations élémentaires. Nous en déduisons le résultat suivant :

Proposition 3.7 *Soit $\widehat{f_1}, ..., \widehat{f_p} \in \mathbb{R}[[X]]$. Il existe un arbre formel $\widehat{\mathcal{T}}$ de transformations élémentaires admissibles tel que, pour tout $\widehat{b} \in \widehat{\mathcal{T}}$ et pour tout $i = 1, ..., p$, $b\widehat{f_i}$ est normalisée.*

Preuve : Nous considérons la série formelle produit : $\widehat{g} = \prod_{i=1}^{p}\widehat{f_i}$, à laquelle nous appliquons le théorème de normalisation. Il existe un arbre formel $\widehat{\mathcal{T}}$ de transformations élémentaires admissibles tel que, pour tout $\widehat{b} \in \widehat{\mathcal{T}}$, la série $\widehat{b}\widehat{g}$ soit normalisée. Or, nous savons que, par définition, $\widehat{b}$ est un homomorphisme d'algèbre. Nous avons donc $\widehat{b}\widehat{g} = \prod_{i=1}^{p}\widehat{b}\widehat{h}_i$. Le lemme 3.5 peut alors permettre de conclure que, pour tout $i = 1, ..., p$, $\widehat{b}\widehat{f_i}$ est normalisée.$\diamond$

3.2.3 Normalisation des fonctions au voisinage de l'origine

Proposition 3.8 *Soit $f \in \mathcal{C}_n$. Il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ de transformations élémentaires tel que, pour tout $b \in \mathcal{T}$, il existe un monôme $m \in \mathbb{R}[[X]]$ et une unité U dans $\mathcal{C}_n$ avec :*

$$bf(X) = m(X)U(X)$$

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}_n$, nous notons $\widehat{f}$ sa série de Taylor à l'origine. D'après le théorème 3.6, nous savons qu'il existe un arbre formel $\widehat{\mathcal{T}}$ de transformations élémentaires admissibles tel que, pour tout $\widehat{b} \in \widehat{\mathcal{T}}$, la série $\widehat{b}\widehat{f}$ soit normalisée. Il existe donc un monôme m et une unité formelle $\widehat{V}$ tels que $\widehat{b}\widehat{f} = m\widehat{V}$. Or, nous avons $\widehat{b}\widehat{f} = \widehat{f \circ b}$. Nous utilisons la condition $(C7)$ de stabilité par division monomiale pour conclure qu'il existe un germe $U \in \mathcal{C}_n$ telle que $f \circ b = mU$ et $\widehat{U} = \widehat{V}$. Comme $\widehat{V}$ est une unité dans les séries formelles, nous en déduisons que U est une unité dans $\mathcal{C}_n$. Comme $\widehat{f \circ b} = \widehat{mU}$, l'hypothèse de quasi-analycité nous permet de conclure que :

$$bf(X) = m(X)U(X)$$

Le théorème 2.14 nous permet d'extraire un arbre complet de cet arbre.$\diamond$ Nous montrons de la même manière un théorème de normalisation simultanée pour une famille de germes :

Proposition 3.9 *Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de germes de $\mathcal{C}_n$. Il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que, pour tout $b \in \mathcal{T}$, il existe une famille de monômes $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$ et une famille d'unités $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ telles que :*

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, \quad bf_i(X) = m_i(X)U_i(X)$$

Preuve : Nous appliquons la proposition 3.7 à la famille de série formelle $(\widehat{f_i})_{1 \leq i \leq p}$. Il existe donc un arbre formel $\widehat{\mathcal{T}}$ de transformations admissibles tel que pour tout $\widehat{b} \in \widehat{\mathcal{T}}$ et pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, la série formelle $\widehat{b}\widehat{f_i}$ soit normalisée. Un raisonnement identique à celui de la proposition précédente, nous permet de conclure que, pour tout $b \in \mathcal{T}$, il existe une famille de monômes $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$ et une famille d'unités $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ telles que :

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, \quad f_i(X) = m_i(X)U_i(X)$$

Pour conclure, nous utilisons le théorème 2.14 pour extraire un arbre complet fini.$\diamond$

3.2.4 Théorème de normalisation simultanée selon Bierstone et Milman

Nous allons démontrer un théorème de normalisation simultanée pour les fonctions de $\mathcal{C}_{n+1}$. La particularité de ce résultat porte sur deux points. Tout d'abord, les transformations effectuées conservent la verticalité de y et, ensuite, les monômes obtenus seront ordonnés pour la division monomiale.

Définition 3.2 *soit $(\widehat{f_i})_{i \in \{1,...,p\}}$ une famille de séries formelles de $\mathbb{R}[[X]]$. Nous disons que cette famille est normale au sens de Bierstone-Milman si et seulement s'il existe une famille de multi-indices $(r_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ dans $\mathbb{N}^n$, une famille de monômes $(X^{r_i})_{i \in \{1,...,p\}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ et une famille $(\widehat{U_i})_{i \in \{1,...,p\}}$ d'unités dans $\mathbb{R}[[X]]$ telles que, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, nous avons $\widehat{f_i} = X^{r_i}\widehat{U_i}$ et la famille de monômes est ordonnée pour la division.*

Nous pouvons définir de même une normalisation au sens de Bierstone-Milman pour une famille de germes :

Définition 3.3 *soit $(f_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ une famille de germes de $\mathcal{C}_n$. Nous disons que cette famille est normale au sens de Bierstone-Milman si et seulement s'il existe une famille de monômes $(m_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ et une famille $(U_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ d'unités dans $\mathcal{C}_n$ telles que, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, nous avons $f_i = m_i\widehat{U_i}$ et la famille de monômes est ordonnée pour la division.*

Nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.10 *Soit $(\widehat{f_i})_{i \in \{1,...,p\}}$ une famille de séries formelles de $\mathbb{R}[[X]]$. Si, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, la série $\widehat{f_i}$ est normale et si pour tout $(i, j) \in \{1, ..., p\}^2$ avec $i < j$, la série $\widehat{f_i} - \widehat{f_j}$ est normale, alors la famille $(\widehat{f_i})_{i \in \{1,...,p\}}$ est normale au sens de Bierstone-Milman.*

Preuve : Ce résultat correspond au lemme 4-7 de l'article [1] co-écrit par E. Bierstone et P. Milman.$\diamond$
En nous appuyant sur ce lemme, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.11 *Soit $(f_i)_{i\in\{1,...,p\}}$ une famille finie de germes de $\mathcal{C}_{n+1}$. Il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que, pour toute branche b de cet arbre, la famille $(bf_i)_{i\in\{1,...,p\}}$ est normalisée au sens de Bierstone-Milman.*

Preuve : Nous considérons la famille $(f_i)_{i\in\{1,...,p\}}$ de germes de $\mathcal{C}_{n+1}$. Nous définissons la famille de germes suivantes :

$$\forall (i,j)\in\{1,...,p\}^2, i<j, \quad g_{i,j}=f_i-f_j$$

Nous appliquons la proposition 3.9 à la famille $(f_i)_{i\in\{1,...,p\}}\cup(g_{i,j})_{(i,j)\in\{1,...,p\}^2,i<j}$. Il existe donc un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que, pour tout branche $b\in\mathcal{T}$, il existe une famille de monômes $(m_i)_{i\in\{1,...,p\}}\cup(m_{i,j})_{(i,j)\in\{1,...,p\}^2,i<j}$ de $\mathbb{R}[X]$, une famille d'unités $(U_i)_{i\in\{1,...,p\}}\cup(U_{i,j})_{(i,j)\in\{1,...,p\}^2,i<j}$ de $\mathcal{C}_{n+1}$ avec :

$$\begin{array}{ll} \forall i\in\{1,...p\}, & bf_i(X)=m_i(X)U_i(X) \\ \forall (i,j)\in\{1,...p\}^2, i<j, & bg_{i,j}(X)=m_{i,j}(X)U_{i,j}(X) \end{array}$$

Les fonctions sont alors toutes normalisées et par conséquent, les séries formelles associées le sont aussi. Le Lemme précédent nous permet de conclure que la famille $(\widehat{f_i})_{i\in\{1,...,p\}}$ de séries formelles est normalisée au sens de Bierstone-Milman. Nous en déduisons qu'il existe un pavé I_r de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que, sur ce pavé, la famille de germe $(f_i)_{i\in\{1,...,p\}}$ est normalisée au sens de Bierstone-Milman. $\diamond$

Remarque 3: L'intérêt de ce résultat par rapport à la proposition 3.9 est le fait que la famille de monômes soit ordonnée pour la division monomiale.

3.2.5 Conservation de la normalisation

Dans le cadre de notre démonstration du théorème de préparation, la normalisation des fonctions est une étape. Il convient de s'interroger sur la conservation de cette normalisation si nous effectuons par la suite des éclatements et des ramifications. Autrement dit, nous allons démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.12 *Soit un germe $f\in\mathcal{C}_n$ tel qu'il existe un monôme $m\in\mathbb{R}[X]$ et une unité $U\in\mathcal{C}_n$ avec :*

$$f(X)=m(X)U(X)$$

Pour toute transformation élémentaire b de type éclatement ou ramification, il existe existe un monôme $n\in\mathbb{R}[X]$ et une unité $V\in\mathcal{C}_n$ avec :

$$bf(X)=n(X)V(X)$$

Preuve : Nous notons $m=\prod_{k=1}^n x_k^{a_k}$. Nous allons distinguer les cas selon la nature de la transformation :

- Il existe deux indices $(i,j)\in\{1,...,n\}^2$ avec $i\neq j$ et un réel $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tels que : $b=b_\lambda^{x_i,x_j}$. Nous avons alors :

$$bf(X)=x_i^{a_i+a_j}\prod_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{n} x_k^{a_k}(\lambda+x_j)bU(X)$$

  Nous posons $n=x_i^{a_i+a_j}\prod_{k=1,k\neq j,k\neq j}^n x_k^{a_k}$ et $V=(\lambda+x_j)bU$. Comme $V(0)=\lambda U\circ b(0)=\lambda U(0)\neq 0$, V est une unité de $\mathcal{C}_n$.

- Il existe deux indices $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ avec $i \neq j$ tels que : $b = b_0^{x_i, x_j}$. Nous avons alors :

$$bf(X) = x_i^{a_i + a_j} \prod_{k=1, k \neq i, k \neq j}^{n} x_k^{a_k} bU(X)$$

Nous posons $n = x_i^{a_i+a_j} \prod_{k=1,k\neq j,k\neq j}^{n} x_k^{a_k}$ et $V = bU$. Comme $V(0) = U \circ b(0) = U(0) \neq 0$, V est une unité de $\mathcal{C}_n$.
- Il existe un indice $j \in \{1, ..., n\}$, $\epsilon \in \{-1; +1\}$ et un entier $\alpha \in \mathbb{N}$ tels que : $b = r_i^{\epsilon,\alpha}$. Nous avons alors :

$$bf(X) = \epsilon x_j^{\alpha a_j} \prod_{k=1, k \neq j}^{n} x_k^{a_k} bU(X)$$

Nous posons $n = x_j^{\alpha a_j} \prod_{k=1,k\neq j,k\neq j}^{n} x_k^{a_k}$ et $V = \epsilon bU$. Comme $V(0) = \epsilon U \circ b(0) = \epsilon U(0) \neq 0$, V est une unité de $\mathcal{C}_n$.

Dans tous les cas, nous voyons que le caractère normalisé se conserve.$\diamond$

3.3 Version géométrique des théorèmes de normalisation

Jusqu'à présent, nous avons travaillé avec les germes et écrit nos théorèmes en donnant les transformés de nos germes. Nous aborderons ici les fonctions pour revenir aux variables initiales.

3.3.1 Normalisation au voisinage de l'origine

Proposition 3.13 *Soit $f \in \mathcal{C}_n$ un germe. Il existe $r \in]0; +\infty[^n$ un polyrayon et un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de I_r tels que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite b de transformations élémentaires, un monôme m et une unité $U \in \mathcal{C}_n$ tels que :*

$$\forall X \in C, \quad f(X) = m \circ b^{-1}(X) U \circ b^{-1}(X)$$

Preuve : Nous allons effectuer un raisonnement par récurrence sur n le nombre de variables.

Initialisation : La proposition 3.1 nous permet de conclure que la propriété est vraie au rang 1.

Hérérdité : Nous supposons la proposition vraie pour les fonctions ayant au plus $n-1$ variables. Nous considérons un germe $f \in \mathcal{C}_n$.
D'après la proposition 3.8, il existe $\mathcal{T}$ un arbre complet tel que, pour tout $b \in \mathcal{T}$, il existe un monôme m et une unité $U \in \mathcal{C}_n$ tels que :

$$bf(X) = m(X)U(X)$$

Comme l'arbre est complet, nous savons qu'il existe un polyrayon $r \in]0; +\infty[^n$ tel que $\bigcup_{b \in \mathcal{T}} b(I_r)$ est un voisinage de l'origine. Il existe donc un polyrayon $r' \in]0; +\infty[^n$ tel que $I_{r'} \subset \bigcup_{b \in \mathcal{T}} b(I_r)$. Nous avons alors :

$$I_{r'} = \bigcup_{b \in \mathcal{T}} (b(I_r) \cap I_{r'})$$

Nous notons $C_b = b(I_r) \cap I_{r'}$. Nous allons raffiner notre recouvrement en utilisant le diviseur de b. Autrement dit, nous avons :

$$C_b = \Big(C_b \backslash \mathrm{Div}(b)\Big) \bigcup \Big(C_b \cap \mathrm{Div}(b)\Big)$$

Nous avons deux possibilités :

- Nous nous plaçons sur $C_1 = C_b \backslash \mathrm{Div}(b)$. D'après la proposition 2.13, b admet une application réciproque sur C_1. Autrement dit, nous avons :

$$\forall X \in C_1, \quad f(X) = f \circ b(b^{-1}(X)) = m \circ b^{-1}(X) U \circ b^{-1}(X)$$

- Nous nous plaçons sur $C_b \cap \mathrm{Div}(b)$. Nous notons $b = b_1 \circ ... \circ b_p$. Par définition du diviseur, nous avons :

$$C_b \cap \mathrm{Div}(b) = \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{Div}_i(b) \cap C_b$$

avec $\mathrm{Div}_i(b) = b_1 \circ ... \circ b_{i-1}(\mathrm{Div}(b_i)) \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \mathrm{Div}_j(b) \right)$.
Soient $i \in \{1, ..., b\}$. Nous notons $\overline{b}_i = b_1 \circ ... \circ b_{i-1}$. Nous remarquons que $\mathrm{Div}(\overline{b}_i) = \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathrm{Div}_j(b)$. En utilisant la proposition 2.13, nous en déduisons que, pour tout $X \in \mathrm{Div}_i(b) \cap C_b$, $b_{i-1}^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}(X)$ existe. Nous avons alors :

$$f(X) = f \circ \overline{b}_i(\overline{b}_i^{-1}(X))$$

Nous définissons la fonction f_1 par :

$$\forall X \in \overline{b}_i^{-1}(\mathrm{Div}_i(b) \cap C_b), \quad f_1(X) = f \circ \overline{b}_i(X)$$

Par ailleurs, nous remarquons que $\overline{b}_i^{-1}(\mathrm{Div}_i(b) \cap C_b) \subset \mathrm{Div}(b_i)$. La définition 2.14 nous amène à distinguer deux cas :
Soit $\mathrm{Div}(b_i)$ est vide. Dans ce cas, il n'y a rien à prouver puisque la cellule est vide.
Soit il existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $\mathrm{Div}(b_i) \subset \{X \in I_{r'}; x_{i_0} = 0\}$. Nous pouvons donc considérer la fonction f_1 comme ayant au plus $n-1$ variables. Nous pouvons lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}_1$ de $\overline{b}_i^{-1}(\mathrm{Div}_i(b) \cap C_b)$ tel que, pour toute cellule $\overline{C} \in \mathcal{R}_1$, il existe une suite de transformations élémentaires b', un monôme m et une unité U tels que :

$$\forall X \in \overline{C}, \quad f_1(X) = m \circ (b')^{-1}(X) U \circ (b')^{-1}(X)$$

Nous avons alors :

$$\forall X \in \mathrm{Div}_i(b) \cap C_b, \quad f(X) = m \circ (b')^{-1}(\overline{b}_i^{-1}(X)) U \circ (b')^{-1}(\overline{b}_i^{-1}(X))$$

En considérant la suite de transformations élémentaires $\overline{b}_i \circ b'$, la fonction est de la forme voulue.

Sur toutes les cellules, nous avons écrit la fonction sous la forme énoncée dans la proposition. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie quel que soit le nombre de variables.$\diamond$

3.3.2 Normalisation sur un compact

Théorème 3.14 *Soit $f \in \mathcal{C}_n$ définie sur un ensemble compact B. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de B tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b, un monôme m et une unité U tels que :*

$$\forall X \in C, \quad f(X) = m \circ b^{-1}(X) U \circ b^{-1}(X)$$

Preuve : Soit $X_0 \in B$. Nous définissons le germe f_{X_0} par :

$$f_{X_0}(X) = f(X + X_0)$$

D'après les conditions de stabilité de $\mathcal{C}_n$, nous savons que $f_{X_0} \in \mathcal{C}_n$. Nous lui appliquons la proposition 3.13. Il existe donc un polyrayon $r \in]0; +\infty[^n$ et un recouvrement fini $\mathcal{R}_{X_0}$ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}_{X_0}$, il existe une suite de transformations élémentaires b, un monôme m et une unité U tels que :

$$\forall X \in C, \quad f_{X_0}(X) = m \circ b^{-1}(X) U \circ b^{-1}(X)$$

Nous notons $C_{X_0} = X_0 + I_r$. Il s'agit d'un voisinage de X_0. De plus, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \forall X \in C_{X_0}, \quad f(X) & = & f_{X_0}(X - X_0) \\ & = & m \circ b^{-1}(X - X_0) U \circ b^{-1}(X - X_0) \\ & = & m \circ b^{-1} \circ t_{-X_0}(X) U \circ b^{-1} \circ t_{-X_0}(X) \end{array}$$

où t_{-X_0} est la composée des transformations de Tchirnhausen $(t^{x_i}_{-x_{0,i}})_{i \in \{1,\dots,n\}}$. Nous définissons la suite de transformations élémentaires $b' = t_{X_0} \circ b$. Nous avons alors :

$$\forall X \in C_{X_0}, \quad f(X) = m \circ (b')^{-1}(X) U \circ (b')^{-1}(X)$$

Par ailleurs, nous avons $B \subset \bigcup_{X_0 \in B} C_{X_0}$. Par compacité de B, nous pouvons en extraire un recouvrement fini. Il existe donc une famille $(X_i)_{i \in J}$ finie de points de B telle que : $B \subset \bigcup_{i \in J} C_{X_i}$. Nous avons alors :

$$B \subset \bigcup_{i \in J} C_{X_i} \subset \bigcup_{i \in J} \bigcup_{C \in \mathcal{R}_{X_i}} C$$

Nous avons donc construit un recouvrement fini de B tel que, sur chaque cellule, la fonction est de la forme annoncée.$\diamond$

D'une manière similaire, nous pouvons démontrer une version géométrique du théorème de normalisation simultanée selon Bierstone et Milman :

Théorème 3.15 *Soit $(f_i)_{i \in \{1,\dots,p\}}$ une famille finie de germes de $\mathcal{C}_{n+1}$ définis sur un compact B. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de B tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{C}$, il existe une suite de transformations élémentaires B, une famille de monôme $(m_i)_{i \in \{1,\dots,p\}}$ ordonnée pour la division et une famille d'unité $(U_i)_{i \in \{1,\dots,p\}}$ telles que :*

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall X \in C, \quad f_i(X) = m_i \circ b^{-1}(X) U_i \circ b^{-1}(X)$$

Chapitre 4

Théorème de préparation pour les éléments de l'algèbre

Dans ce chapitre, nous allons démontrer un théorème de préparation selon une variable pour les fonctions de $\mathcal{C}_{n+1}$. Notre démonstration s'effectue par récurrence en s'appuyant sur un indice, l'ordre de la série formelle associée à la fonction. Nous définirons donc dans un premier temps cet ordre. Puis, dans un second temps, nous procéderons à une réduction du problème pour pouvoir effectuer notre récurrence. Comme dans le chapitre précédent, notre méthode consiste à utiliser les transformations élémentaires pour faire chuter l'ordre. Cela entraîne un découpage cellulaire et la réécriture à l'aide des termes.

4.1 Ordre d'une fonction

Dans cette partie, nous allons définir deux notions d'ordre. Le premier, s'appuyant sur la définition donnée dans l'article [32], consiste à construire, à partir de la définition usuelle donnée dans l'appendice du livre II de Bourbaki [4] de l'ordre d'une série, l'ordre selon l'indéterminée y d'un élément de $\widehat{\mathcal{C}}_{n+1}$. Puis, nous définirons la notion d'ordre pour un germe de $\mathcal{C}_{n+1}$. Cette seconde définition s'appuiera sur celle que donne D.J. Miller dans sa thèse [28]. Nous conclurons cette partie en établissant un lien entre ces deux notions.

4.1.1 Ordre d'une série formelle

Définition 4.1 *Etant donné une série formelle d'une seule indéterminée, non nulle,* $\widehat{f} = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ *à coefficients réels, nous appellerons* valuation *de cette série le plus petit entier* $p \geq 0$ *tel que le coefficient de degré* p *soit non nul. Nous noterons cet entier* $\mathrm{val}(\widehat{f})$.
Si la série est nulle, nous poserons $\mathrm{val}(\widehat{0}) = +\infty$.

Définition 4.2 *Soit* $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{C}}_{n+1}$. *Nous notons :*

$$\mathcal{F}_{\widehat{f}} = \left\{(\widehat{h}, \widehat{g}); \widehat{h} \in \widehat{\mathcal{C}}_n,\ \widehat{g} \in \widehat{\mathcal{C}}_{n+1} \ et \ \widehat{f}(X,y) = \widehat{h}(X)\widehat{g}(X,y)\right\}$$

Nous définissons l'ordre de la série $\widehat{f}$ *selon l'indéterminée* x_n *comme étant le nombre entier donné par :*

$$\mathrm{ord}_y(\widehat{f}) = \min\left\{\mathrm{val}(\widehat{g}(0,y)); \exists \widehat{h} \in \widehat{\mathcal{C}}_n, (\widehat{h}, \widehat{g}) \in \mathcal{F}_{\widehat{f}}\right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Remarque 1: Si $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{C}}_{n+1}$ est un série formelle telle que $\mathrm{ord}_y(\widehat{f}) = 0$, alors il existe une série formelle $\widehat{h} \in \widehat{\mathcal{C}}_n$ et une unité formelle $\widehat{U} \in \widehat{\mathcal{C}}_{n+1}$ telles que : $\widehat{f}(X,y) = \widehat{h}(X)\widehat{U}(X,y)$.

4.1.2 Ordre d'un germe

Comme pour l'ordre d'une série, nous allons définir l'ordre d'un germe en deux temps.

Définition 4.3 *Soit $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ un germe. Nous appelons* ordre *de ce germe selon la variable y le nombre défini par :*

$$\mathrm{Ord}_y(f) = \mathrm{Inf}\left\{ i \in \mathbb{N}; \frac{\partial^i f}{\partial y^i}(0,0) \neq 0 \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Proposition 4.1 *Si $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ est un germe tel que $\mathrm{Ord}_y(f) = d \in \mathbb{N}$, alors il existe une famille $(a_i)_{i \in \{0,\dots,d-1\}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_n$, une unité $U \in \mathcal{C}_{n+1}$ et un polyrayon $r \in (]0;+\infty[)^{n+1}$ tels que :*

$$f(X,y) = y^d U(X,y) + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(X) y^i$$

Preuve : En utilisant la formule de Taylor de f à l'origine, nous avons :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(X,y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{y^i}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{y^i}{i!} + y^d \left(\sum_{i=d}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{y^{i-d}}{i!} \right) \end{aligned}$$

Nous considérons le germe h défini par :

$$h(X,y) = f(X,y) - \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\partial^i f}{\partial y^i}(X,0)\frac{y^i}{i!}$$

Nous voyons que $h \in \mathcal{C}_{n+1}$. Donc, d'après la condition de stabilité par division polynomiale, il existe une fonction $U \in \mathcal{C}_{n+1}$ telle que :

$$\widehat{U}(X,y) = \sum_{i=d}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i f}{\partial y^i}}(X,0)\frac{y^{i-d}}{i!}$$

Or, comme $\mathrm{Ord}_y(f) = d$, nous avons :

$$U(0,0) = \frac{\partial^d f}{\partial y^d}(0,0) \neq 0$$

La fonction U est une unité, et nous avons :

$$f(X,y) = y^d U(X,y) + \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\partial^i f}{\partial y^i}(X,0)\frac{y^i}{i!}. \diamond$$

Définition 4.4 *Nous considérons une fonction $f \in \mathcal{C}_{n+1}$. Nous définissons l'ensemble $\mathcal{F}_f$ par :*

$$\mathcal{F}_f = \left\{ (h,g); h \in \mathcal{C}_n, g \in \mathcal{C}_{n+1} \text{ et } \exists r \in (]0;+\infty[)^{n+1}, \forall (X,y) \in I_r, f(X,y) = g(X,y)h(X) \right\}$$

Nous appelerons petit ordre *de cette fonction selon la variable y le nombre donné par :*

$$\mathrm{ord}_y(f) = \mathrm{Inf}\left\{ \mathrm{Ord}_y(g); (h,g) \in \mathcal{F}_f \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Remarque 2: Si nous considérons $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ telle que $\text{ord}_y(f) = 0$, alors il existe un couple $(h, g) \in \mathcal{F}_f$ tel que nous ayons :

$$g(0,0) \neq 0$$

Autrement dit, f est le produit d'une fonction des seules variables $x_1, ..., x_n$ et d'une unité de $\mathcal{C}_{n+1}$.

Remarque 3: D'après la proposition 3.2, nous savons que les seules fonctions de $\mathcal{C}_2$ d'ordre infini selon la variable y sont les fonctions ne dépendant que de la variable x. Pour un nombre de variables supérieur, il est facile de trouver des exemples de fonctions d'ordre infini selon la variable y. Par exemple, nous pouvons considérer la fonction f de trois variables definie par :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in]-1; 1[^3, \quad f(x_1, x_2, y) = x_1 y + x_2$$

Il est nécessaire d'effectuer une transformation élémentaire pour la rendre d'ordre fini selon la variable y. Cela justifie la nécessité d'un première étape pour rendre l'ordre de la fonction fini.

Proposition 4.2 *Soit $f \in \mathcal{C}_{n+1}$. Nous avons l'égalité suivante :*

$$ord_y(\widehat{f}) = ord_y(f)$$

Preuve : Nous supposons que $\text{ord}_y(\widehat{f}) = d$. D'après la définition, il existe deux séries formelles $\widehat{h} \in \widehat{\mathcal{C}_n}$ et $\widehat{g} \in \mathcal{C}_{n+1}$ telles que $\widehat{f} = \widehat{h}\widehat{g}$ et $\text{ord}_y(\widehat{g}(0, y)) = d$. Comme nous avons $\widehat{f} = \widehat{hg}$, d'après l'hypothèse de quasi-analycité, il existe $r \in (]0; +\infty[)^{n+1}$ tel que :

$$\forall (X, y) \in I_r, \quad f(X, y) = h(X)g(X, y)$$

En appliquant la formule de Taylor à la fonction g, nous avons :

$$\widehat{g}(0, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i g}{\partial y^i}(0, 0)\frac{y^i}{i!}$$

Il est immédiat que $\text{ord}_y(\widehat{g}) = \text{ord}_y(g) = d$. Nous en déduisons que $\text{ord}_f(f) \leq d$.
Par montrer l'égalité, nous allons effectuer un raisonnement par l'absurde en supposant que $d' = \text{ord}_y(f) < d$. Il existe donc deux fonctions $h \in \mathcal{C}_n$ et $g \in \mathcal{C}_{n+1}$ et un polyrayon $r \in (]0; +\infty[)^{n+1}$ tels que :

$$\forall (X, y) \in I_r, \quad f(X, y) = h(X)g(X, y) \text{ et } \text{ord}_y(g) = d'$$

Or, nous savons que $\widehat{f} = \widehat{hg} = \widehat{h}\widehat{g}$, donc $(\widehat{h}, \widehat{g}) \in \mathcal{F}_{\widehat{f}}$. En utilisant la formule de Taylor à l'origine de la fonction g, nous pouvons conclure comme précédemment que : $\text{ord}_y(g) = \text{ord}_y(\widehat{g}(0, y))$. Cela nous permet de conclure que $\text{ord}_y(\widehat{f}) \leq d'$. Comme d' est strictement plus petit que $\text{ord}_y(\widehat{f})$ nous aboutissons à une contradiction. Nous en concluons que : $\text{ord}_y(\widehat{f}) = \text{ord}_y(f)$.$\diamond$

4.1.3 Ordre fini

Proposition 4.3 *Soit un germe $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ tel qu'il existe un polyrayon $r \in (]0; +\infty[)^{n+1}$, un entier $d \in \mathbb{N}$, une fonction $h \in \mathcal{C}_n$, une famille de fonctions $(a_i)_{i \in \{0,...,n-1\}}$ de $\mathcal{C}_n$ avec, pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, $a_i(0) = 0$ et une unité $U \in \mathcal{C}_{n+1}$ tels que :*

$$\forall (X, y) \in I_r, \quad f(X, y) = h(X)\left(y^d U(X, y) + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(X) y^i\right)$$

Nous avons l'égalité suivante : $ord_y(f) = d$.

Preuve : Nous définissons la fonction g par :

$$\forall (X,y) \in I_r, \quad g(X,y) = y^d U(X,y) + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(X) y^i$$

Par définition, nous voyons que $g \in \mathcal{C}_{n+1}$. En utilisant la formule de Leibniz pour la dérivation d'un produit de fonctions, nous obtenons, pour tout $j \in \{0, ..., d-1\}$:

$$\forall (X,y) \in I_r, \quad \frac{\partial^j g}{\partial y^j}(X,y) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{d!}{(d-i)!} y^{d-i} \frac{\partial^{j-i} U}{\partial y^{j-i}}(X,y) + \sum_{i=j}^{d-1} a_i(X) \frac{i!}{(i-j)!} y^i$$

Cela nous permet de conclure que, pour tout $j \in \{0, ..., d-1\}$, nous avons : $\frac{\partial^j g}{\partial y^j}(0,0) = 0$. Par ailleurs, nous avons :

$$\forall (X,y) \in I_r, \quad \frac{\partial^d g}{\partial y^d}(X,y) = \sum_{i=0}^{d} \binom{j}{i} \frac{d!}{(d-i)!} y^{d-i} \frac{\partial^{d-i} U}{\partial y^{d-i}}(X,y)$$

Nous avons donc : $\frac{\partial^d g}{\partial y^d}(0,0) = d! U(0,0) \neq 0$. nous obtenons que : $\mathrm{ord}_y(f) \leq d$.
Nous allons maintenant justifier l'égalité en effectuant un raisonnement par l'aburde en supposant que $d' = \mathrm{ord}_y(f) < d$. Par définition, il existe un couple $(h_1, g_1) \in \mathcal{F}_f$ tel que $f = h_1 g_1$ et que $\mathrm{Ord}_y(d) = d'$. D'après la proposition 4.1, il existe une famille $(b_i)_{i \in \{0,...,d'-1\}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_n$, une unité $V \in \mathcal{C}_{n+1}$ tels que :

$$f(X,y) = h_1(X) \left(y^{d'} V(X,y) + \sum_{i=0}^{d'-1} b_i(X) y^i \right)$$

Comme $hg = h_1 g_1$, en utilisant les formules de dérivation, nous avons :

$$h_1(X) \frac{\partial^{d'} g_1}{\partial y^{d'}}(X,0) = h(X) \frac{\partial^{d'} g}{\partial y^{d'}}(X,0)$$

Or, nous remarquons que :

$$\frac{\partial^{d'} g_1}{\partial y^{d'}}(X,0) = (d')! V(X,0)$$

Comme V est une unité, nous en déduisons que :

$$h_1(X) = \frac{h(X)}{(d')! V(X,0)} \frac{\partial^{d'} g}{\partial y^{d'}}(X,0)$$

Autrement dit, il existe un germe $p \in \mathcal{C}_n$ tel que : $h_1 = ph$. Nous avons alors :

$$p(X) h(X) g_1(X,y) = h(X) g(X,y)$$

Par passage aux séries formelles associées, nous obtenons : $\widehat{p}\widehat{h}\widehat{g_1} = \widehat{h}\widehat{g}$. Par intégrité de l'anneau des séries formelles, nous avons alors : $\widehat{g} = \widehat{p}\widehat{g_1} = \widehat{pg_1}$. L'hypothèse de quasi-analycité, nous permet de conclure qu'il existe un polyrayon $r_0 \in]0; +\infty[^{n+1}$ tel que :

$$\forall (X,y) \in I_{r_0}, \quad g(X,y) = p(X) g_1(X,y)$$

En utilisant les formules de dérivations, nous obtenons :

$$\forall (X,y) \in I_{r_0}, \quad \frac{\partial^d g}{\partial y^d}(X,y) = p(X) \frac{\partial^d g_1}{\partial y^d}(X,y)$$

Or, par hypothèse, nous avons : $\mathrm{Ord}_y(g) = d$, donc $\frac{\partial^d g}{\partial y^d}(0,0) \neq 0$. Cela nous permet de conclure que $p(0) \neq 0$, et donc p est une unité. Nous pouvons alors écrire $g_1 = \frac{g}{p}$. En dérivant cette expression suivant la variable y, nous obtenons :

$$\forall (X,y) \in I_{r_0}, \quad \frac{\partial^{d'} g_1}{\partial y^{d'}}(X,y) = \frac{1}{p(X)} \frac{\partial^{d'} g}{\partial y^{d'}}(X,y)$$

Comme $\mathrm{Ord}_y(g_1) = d'$, nous avons : $\frac{\partial^{d'} g_1}{\partial y^{d'}}(0,0) \neq 0$. L'égalité précédente nous permet de conclure que : $\frac{\partial^{d'} g}{\partial y^{d'}}(0,0) \neq 0$ et donc $d \leq d'$. Nous aboutissons à une contradiction, donc le petit ordre de f selon la variable y vaut d.$\diamond$

De ce résultat découlent les corollaires suivants :

Corollaire 4.4 *Si $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ est un germe tel que $Ord_y(f) \in \mathbb{N}$, alors nous avons l'égalité suivant :*

$$Ord_y(f) = ord_y(f)$$

Corollaire 4.5 *Soit un germe $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ tel que : $ord_y(f) = d \in \mathbb{N}$. Si (h,g) est un couple élément de $\mathcal{F}_f$, alors nous avons soit $Ord_y(g) = d$, soit $Ord_y(g) = \infty$.*

Nous allons montrer dans la suite qu'il est possible de mettre toute fonction à l'ordre fini.

4.2 Mise à l'ordre fini d'un germe

Soit $f \in \mathcal{C}_{n+1}$. Nous écrivons son développement de Taylor infini de f à l'origine :

$$\widehat{f}(X,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{a}_i(X) y^i \tag{4.1}$$

avec une famille $(\widehat{a}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de séries formelles.

4.2.1 Mise à l'ordre fini de la série formelle $\widehat{f}$

En reprenant les notations ci-dessus, nous notons I_p l'idéal de $\mathbb{R}[[X]]$ engendré par la famille $(\widehat{a}_i)_{0 \leq i \leq p}$. La famille $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une famille croissante d'idéaux de $\mathbb{R}[[X]]$. Par noethérianité de l'anneau $\mathbb{R}[[X]]$, nous savons qu'il existe un entier $D \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geq D, I_p = I_D$$

Soit $p \geq D$. Nous savons que $\widehat{a}_p \in I_p = I_D$, donc, par définition d'un idéal engendré par une famille, il existe une famille $(\widehat{b}_{i,p})_{0 \leq i \leq D}$ d'éléments de $\mathbb{R}[[X]]$ telle que :

$$\widehat{a}_p(X) = \sum_{i=0}^{D} \widehat{b}_{i,p}(X) \widehat{a}_i(X)$$

En reportant dans l'équation 4.1, nous obtenons :

$$\widehat{f}(X,y) = \sum_{i=0}^{D} \widehat{a}_i(X) y^i + \sum_{i=D+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{D} \widehat{b}_{j,i}(X) \widehat{a}_j(X) \right) y^i$$

Le théorème 2-5 de l'article [32] nous permet d'affirmer que les séries formelles $\widehat{a}_i$ peuvent être normalisées par une suite finie de transformations élémentaires. Pour tout $i \in \{0, ..., D\}$, il existe donc un monôme m_i des variables $x_1, ..., x_n$ et $\widehat{V}_i \in \mathbb{R}[[X]]$ une unité tels que $\widehat{a}_i = m_i \widehat{V}_i$. De plus, nous pouvons supposer que la famille finie $(m_i)_{0\leq i\leq D}$ est ordonnée pour la division. Or, nous avons vu que lors d'une transformation élémentaire un monôme se transformait en un produit d'un monôme et d'une unité. Pour tout $i \in \{0,...,D\}$, il existe un monôme n_i et une unité $\widehat{V_i}$ tels que : $m_i = n_i\widehat{W_i}$. Nous notons $b\widehat{f}$ la série formelle obtenue après avoir effectué toutes les transformations élémentaires, nous avons alors :

$$b\widehat{f}(X,y) = \sum_{i=0}^{D} n_i(X)\widehat{W_i}(X)\widehat{V_i}(X)y^i + \sum_{i=D+1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{D}\widehat{b}_{j,i}(X)n_j(X)\widehat{W_j}(X)\widehat{V_j}(X)\right)y^i \qquad (4.2)$$

Maintenant, la famille de monômes $(n_i)_{0\leq i\leq D}$ est ordonnée pour la division. Il existe donc un entier $d \in \{0,...,D\}$ tel que, pour tout $i \in \{0,...,D\}$, n_d divise n_i. Ce qui revient à dire que, pour tout $i \in \{0,...,D\}$, il existe un monôme p_i tel que : $n_i = p_i n_d$. Nous remplaçons dans l'équation 4.2 pour obtenir :

$$\begin{aligned} b\widehat{f}(X,y) &= \sum_{i=0}^{D} p_i(X)n_d(X)\widehat{W_i}(X)\widehat{V_i}(X)y^i + \sum_{i=D+1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{D}\widehat{b}_{j,i}(X)p_j(X)n_d(X)\widehat{W_j}\widehat{V_j}(X)\right)y^i \\ &= n_d(X)\left(\sum_{i=0}^{d-1} p_i(X)\widehat{W_i}(X)\widehat{V_i}(X)y^i + y^d\widehat{U}(X,y)\right) \end{aligned}$$

en ayant posé :

$$\widehat{U}(X,y) = p_d(X)\widehat{W_d}(X)\widehat{V_d}(X) + \sum_{i=d+1}^{D} p_i(X)\widehat{W_i}(X)\widehat{V_i}(X)y^{i-d} + \sum_{i=D+1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{D}\widehat{b}_{j,i}(X)p_j(X)\widehat{W_j}\widehat{V_j}(X)\right)y^{i-d}$$

$\widehat{W_d}$ et $\widehat{V_d}$ sont des unités dans $\mathbb{R}[[X]]$. De plus, $p_d = 1$, nous en déduisons que $\widehat{U}$ est une unité dans $\mathbb{R}[[X,y]]$. Nous avons démontré le résultat :

Proposition 4.6 *Soit $\widehat{f}$ est une série formelle des variables X et y, alors, il existe un arbre formel $\widehat{\mathcal{T}}$ de transformations admissibles portant sur les indéterminées $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ tel que, pour tout $\widehat{b} \in \widehat{\mathcal{T}}$, il existe m un monôme de $\mathbb{R}[[X]]$, $(m_i)_{0\leq i\leq d-1}$ une famille de monômes de $\mathbb{R}[[X]]$, $\widehat{U}$ une unité de $\mathbb{R}[[X,y]]$ et $(\widehat{U}_i)_{0\leq i\leq d-1}$ une famille d'unité de $\mathbb{R}[[X]]$ tels que :*

$$\widehat{b}\widehat{f}(X,y) = m(X)\left(y^d\widehat{U}(X,y) + \sum_{i=0}^{d-1} m_i(X)y^i\widehat{U}_i(X)\right)$$

4.2.2 Processus de mise à l'ordre fini pour un germe f au voisinage de 0

Nous considérons f un germe de $\mathcal{C}_{n+1}$. D'après la proposition 4.6, nous savons qu'il existe un arbre formel $\widehat{\mathcal{T}}$ de transformations admissibles portant sur les indéterminées $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ tel que, pour tout $\widehat{b} \in \widehat{\mathcal{T}}$, il existe m un monôme de $\mathbb{R}[[X]]$, $(m_i)_{0\leq i\leq d-1}$ une famille de monômes de $\mathbb{R}[[X]]$, $\widehat{U}$ une unité de $\mathbb{R}[[X,y]]$ et $(\widehat{U}_i)_{0\leq i\leq d-1}$ une famille d'unités de $\mathbb{R}[[X]]$ tels que :

$$\widehat{b}\widehat{f}(X,y) = m(X)\left(y^d\widehat{U}(X,y) + \sum_{i=0}^{d-1} m_i(X)y^i\widehat{U}_i(X)\right)$$

Nous définissons la fonction $g = f \circ b$. Nous avons vu dans le premier chapitre que $g \in \mathcal{C}_{n+1}$ et que $\widehat{g} = \widehat{b}\widehat{f}$. Nous avons alors :

$$\widehat{g}(X,y) = m(X)\left(y^d\widehat{U}(X,y) + \sum_{i=0}^{d-1} m_i(X)y^i\widehat{U}_i(X)\right)$$

Nous notons h le germe défini par :

$$h(X,y) = g(X,y) - m(X)\sum_{i=0}^{d-1}\frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X,0)y^i$$

La condition (C_4) de stabilité pour la dérivation partielle implique que, pour tout $i \in \{0,...,d-1\}$, la fonction $X \mapsto \frac{\partial^i bf}{\partial y^i}(X,0)$ est un élément de $\mathcal{C}_n$. h est une somme de produits de fonctions de $\mathcal{C}_n$, h appartient donc à $\mathcal{C}_n$. De plus, nous avons :

$$\widehat{h}(X,y) = \widehat{g}(X,y) - m\sum_{i=0}^{d-1} m_i y^i \widehat{U}_i(X) = my^d\widehat{U}(X,y)$$

D'après l'hypothèse $(C7)$ de stabilité par division monomiale, nous en déduisons qu'il existe un germe $U \in \mathcal{C}_{n+1}$ tel que $h = my^dU$ et $\widehat{(U)} = \widehat{U}$. D'après l'hypothèse de quasi-analycité, nous en concluons qu'il existe un polyrayon $r \in (]0;+\infty[)^{n+1}$ tel que, pour tout $(X,y) \in I_r$, nous ayons :

$$g(X,y) - m\sum_{i=0}^{d-1}\frac{\partial^i f}{\partial y^i}(X,0)y^i = my^dU(X,y) \Leftrightarrow bf(X,y) = m(y^dU(X,y) + \sum_{i=0}^{d-1}\frac{\partial^i bf}{\partial y^i}(X,0)y^i)$$

Nous considérons l'arbre de transformations admissibles $\mathcal{T}$ associé à l'arbre formel $\widehat{\mathcal{T}}$. D'après le théorème 2.14, nous savons que nous pouvons extraire un sous-arbre $\mathcal{S}$ complet tel que, pour chaque branche b, la fonction bf vérifie la propriété. Nous avons démontré la proposition suivante :

Proposition 4.7 *Si f est un germe appartenant à $\mathcal{C}_{n+1}$, alors il existe un arbre complet $\mathcal{S}$ tel que, pour tout $b \in \mathcal{S}$, il existe $d \in \mathbb{N}$, $r \in (]0;+\infty[)^{n+1}$, m un monôme de $\mathbb{R}[[X]]$, U une unité de $\mathcal{C}_{n+1}$ tels que :*

$$\forall (X,y) \in I_r, bf(X,y) = m(y^dU(X,y) + \sum_{i=0}^{d-1}\frac{\partial^i bf}{\partial y^i}(X,0)y^i)$$

4.3 Théorème de préparation pour les fonctions d'ordre fini

Nous considérons dans cette partie des fonctions f d'ordre fini selon la variable y. D'après la définition de l'ordre, nous savons que pour une fonction f d'ordre d selon la variable y, il existe un polyrayon $r \in (]0;+\infty[)^{n+1}$, un entier $d \in \mathbb{N}$, une fonction $h \in \mathcal{C}_{n,r}$, une famille de fonctions $(a_i)_{i\in\{0,\dots,n-1\}}$ de $\mathcal{C}_{n,r}$ avec, pour tout $i \in \{0,...,n-1\}$, $a_i(0) = 0$ et une unité $U \in \mathcal{C}_{n+1,r}$ tels que :

$$\forall (X,y) \in I_r, \quad f(X,y) = h(X)\left(y^dU(X,y) + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(X)y^i\right)$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.8 *Soient $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ un germe d'ordre d selon la variable y. Il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que que pour tout $b \in \mathcal{T}$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}$, des fonctions a et θ de $\mathcal{C}_n$ et une unité U de $\mathcal{C}_{n+1}$ tels que :*

$$bf(X,y) = (y - a(X))^d\theta(X)U(X,y)$$

Nous allons démontrer ce résultat en effectuant une récurrence sur l'ordre de la fonction.

4.3.1 Initialisation : Cas des fonctions d'ordre 0 et 1

Nous supposons dans un premier temps que la fonction f est d'ordre nul. Par définition de l'ordre, il existe un couple $(h, g) \in \mathcal{F}_f$ tel que $f = hg$ et $\mathrm{Ord}_y(g) = 0$. Nous en déduisons que $g(0,0) \neq 0$. Par conséquent, que f est le produit d'une fonction h de $\mathcal{C}_n$ et d'une unité, notée U, de $\mathcal{C}_{n+1}$. D'après la proposition 3.8, il existe un arbre complet tel que pour chaque branche b, il existe un monôme $m \in \mathbb{R}[[X]]$, un polyrayon $r \in (]0; +\infty[)^{n+1}$ et une unité V dans $\mathcal{C}_n$ avec :

$$\forall (X, y) \in I_r, \quad bf(X, y) = m(X)V(X)bU(X, y)$$

Cette fonction est de la forme voulue. Le théorème est donc vrai dans ce cas.
Nous supposons que l'ordre de f est égal à 1. Par définition, il existe un couple $(h, g) \in \mathcal{F}_f$ tel que $f = gh$ et $\mathrm{Ord}_y(g) = 1$. Nous avons donc les égalités suivantes :

$$g(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \neq 0$$

D'après la condition $(C6)$ de stabilité de $\mathcal{C}_{n+1}$ par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $a \in \mathcal{C}_n$ telle que :

$$g(X, a(X)) = 0$$

Nous définissons le germe k dans $\mathcal{C}_n$ par :

$$k(X, y) = g(X, y + a(X))$$

Nous remarquons que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^i k}{\partial y^i}(X, y) = \frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X, y + a(X))$$

Ce qui nous permet d'écrire en passant à la série de Taylor :

$$\widehat{k}(X, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X, a(X))} \frac{y^i}{i!} = y \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X, a(X))} \frac{y^{i-1}}{i!}$$

D'après la condition $(C7)$ de stabilité par division monomiale, nous savons qu'il existe un germe $U \in \mathcal{C}_{n+1}$ tel que :

$$\widehat{U}(X, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{\frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X, a(X))} \frac{y^{i-1}}{i!}$$

De plus, comme g est d'ordre 1 selon la variable y, nous avons :

$$U(0,0) = \widehat{U}(0,0) = \widehat{\frac{\partial g}{\partial y}}(0,0) \neq 0$$

Nous en concluons que U est une unité de $\mathcal{C}_{n+1}$. La condition $(C5)$ nous permet alors d'affirmer qu'il existe un polyrayon $r' \in (]0; +\infty[)^{n+1}$ tel que :

$$\forall (X, y) \in I_{r'}, \quad k(X, y) = g(X, y + a(X)) = yU(X, y)$$

Nous choisissons un polyrayon $r_0 \in (]0; +\infty[)^{n+1}$ tel que :

$$\forall (X, y) \in I_{r_0}, \quad (X, y - a(X)) \in I_{r'}$$

Ce choix est possible car l'application $(X, y) \mapsto (X, y - a(X))$ est un homéomorphisme. Nous avons alors, pour tout $(X, y) \in I_{r_0}$:

$$\begin{aligned} f(X, y) &= h(X)g(X, y) \\ &= h(X)g(X, y - a(X) + a(X)) \\ &= h(X)k(X, y - a(X)) \\ &= h(X)(y - a(X))U(X, y - a(X)) \end{aligned}$$

Nous normalisons la fonction h en utilisant la proposition 3.8. Autrement dit, il existe une suite de transformations élémentaires b portant uniquement sur les variables X, un monôme $m \in \mathbb{R}[[X]]$, un polyrayon $r \in (]0;+\infty[)^{n+1}$ et une unité V dans $\mathcal{C}_n$ tels que :

$$\forall (X,y) \in I_r, \quad bf(X,y) = (y - ba(X))mV(X)bU(X, y - a(X))$$

Cette fonction est de la forme voulue.

La fait d'avoir justifié le théorème pour les fonction d'ordre 0 ou 1 nous permet d'initialiser notre récurrence.

Soit un entier $d \geq 2$. Nous supposons à présent que le théorème est vrai pour toute fonction de petit ordre selon la variable y strictement inférieure à d. Nous considérons une fonction f d'ordre d. Il existe donc un couple $(h,g) \in \mathcal{F}_f$ tel que $f = gh$ et $\mathrm{Ord}_y(d) = d$.

4.3.2 Etape 1 : transformation de Tchirnhausen

Nous savons que :

$$\forall (X,y) \in I_r, \quad g(X,y) = y^d U(X,y) + \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X,0)\frac{y^i}{i!}$$

D'après les propositions 4.2 et 4.3, nous savons que : $\mathrm{Ord}_y(g) = \mathrm{ord}_y(\widehat{g}) = \mathrm{ord}_y(g) = d$.
Le but de cette étape est de faire disparaître le terme d'ordre $d-1$. Il s'agit en effet d'éviter le phénomène que nous avons déjà signalé dans le cas de deux variables vu dans le chapitre précédent.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\frac{\partial^k \frac{\partial^{d-1} g}{\partial y^{d-1}}}{\partial y^k} = \frac{\partial^{d-1+k} g}{\partial y^{d-1+k}}$$

Nous en déduisons que la fonction $\frac{\partial^{d-1} g}{\partial y^{d-1}}$ est d'ordre 1. Autrement dit, nous avons $\frac{\partial^{d-1} g}{\partial y^{d-1}}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial \frac{\partial^{d-1} g}{\partial y^{d-1}}}{\partial y}(0,0) \neq 0$, la condition $(C6)$ de stabilité par l théorème des fonctions implicites permet de justifier l'existence d'une fonction $a \in \mathcal{C}_n$ telle que $a(0) = 0$ et :

$$\frac{\partial^{d-1} g}{\partial y^{d-1}}(X, a(X)) = 0$$

Nous appliquons au germe g la transformation de Tchirnhausen t_a^y. Nous remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k t_a^y g}{\partial y^k}(X,y) = \frac{\partial^k g}{\partial y^k}(X, y + a(X))$$

La fonction t_a^y est d'ordre d selon la variable y. Donc d'après la proposition 4.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
t_a^y g(X,y) &= y^d U(X, y + a(X)) + \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\partial^i t_a^y g}{\partial y^i}(X,0)\frac{y^i}{i!} \\
&= y^d U(X, y + a(X)) + \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X,a(X))\frac{y^i}{i!} \\
&= y^d U(X, y + a(X)) + \sum_{i=0}^{d-2} \frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X,a(X))\frac{y^i}{i!}
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{0, ..., d-1\}$, nous définissons le germe a_i par :

$$a_i(X) = \frac{1}{i!}\frac{\partial^i g}{\partial y^i}(X, a(X))$$

4.3.3 Etape 2 : monomialisation des coefficients

Nous obtenons :

$$t_a^y f(X,y) = h(X)\left(y^d U(X, y + a(X)) + \sum_{i=0}^{d-2} a_i(X) y^i\right)$$

Comme, pour tout $i \in \{0, ..., d-1\}$, les fonctions $\frac{\partial^i g}{\partial y^i}$ et a sont des éléments de $\mathcal{C}_n$, la famille $(a_i)_{i\in\{0,...,d-1\}}$ est une famille finie de $\mathcal{C}_n$. D'après la proposition 3.9, il existe un arbre complet $\mathcal{T}_1$ tel que, pour toute suite de transformations élémentaires $b \in \mathcal{T}_1$, il existe une famille $(m_i)_{i\in\{0,...,d-1\}}$ de monômes et une famille $(U_i)_{i\in\{0,...,d-1\}}$ d'unités de $\mathcal{C}_n$ tels que :

$$\forall i \in \{0, ..., d-1\}, \quad ba_i(X) = m_i U_i(X)$$

Soit $b \in \mathcal{T}_1$. Nous avons alors :

$$bt_a^y f(X,y) = bh(X)\left(y^d bt_a^y U(X, y + a(X)) + \sum_{i=0}^{d-1} m_i y^i U_i(X)\right)$$

Nous effectuons le changement d'indice $j = d - i$ dans la sommation pour obtenir :

$$bt_a^y f(X,y) = bh(X)\left(y^d bt_a^y U(X, y + a(X)) + \sum_{j=2}^{d} m_{d-j} y^{d-j} U_{d-j}(X)\right)$$

Pour tout $j \in \{2, ..., d\}$, nous notons $m_{d-j} = X^{a_j}$ avec $a_j = (a_j^1, ..., a_j^n)$ un multi-indice. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, nous effectuons les ramifications $r_i^{\epsilon_i, d!}$ avec $\epsilon_i \in \{+1; -1\}$. Nous savons alors que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, l'entier $a_i^j \times d!$ est divisible par i. Nous considérons la série formelle associée à la fonction $\prod_{i=1}^n r_i^{\epsilon_i,d!} bt_a^y g$:

$$\prod_{i=1}^{n} \widehat{r_i^{\epsilon_i,d!} bt_a^y g}(X,y) = y^d \prod_{i=1}^{n} \widehat{r_i^{\epsilon_i,d!} bt_a^y U}(X, y + a(X)) + \sum_{j=2}^{d} X^{a_j d!} y^{d-j} \prod_{i=1}^{n} \epsilon_i \prod_{i=1}^{n} \widehat{r_i^{\epsilon_i,d!} U_{d_j}}(X)$$

Pour simplifier nos écritures, nous notons $\tilde{U} = \prod_{i=1}^n \widehat{r_i^{\epsilon_i,d!} bt_a^y U}$, $\tilde{g} = \prod_{i=1}^n \widehat{r_i^{\epsilon_i,d!} bt_a^y g}$ et, pour tout $j \in \{2, ..., d\}$, $\tilde{U_j} = \prod_{i=1}^n \epsilon_i \prod_{i=1}^n \widehat{r_i^{\epsilon_i,d!} U_{d_j}}$ et, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $b_j^k = a_j^k d!$. Nous avons alors l'égalité suivante :

$$\tilde{g}(X,y) = y^d \tilde{U}(X,y) + \sum_{j=2}^{d} X^{b_j} y^{d-j} \tilde{U}_j(X)$$

Grâce aux ramifications, nous savons que, pour tout $j \in \{2, ..., d\}$, $m_j^{\frac{1}{j}} = (X^{b_j})^{\frac{1}{j}}$ est un mônome. Comme il s'agit d'une famille finie de monômes, il est possible d'ordonner cette famille pour l'ordre de la division à l'aide de ramifications et déclatements sur les variables $x_1, ..., x_n$. Autrement dit, il existe un arbre formel $\widehat{\mathcal{T}_2}$ de transformations admissibles tel que, pour tout $\widehat{b_0} \in \widehat{\mathcal{T}_2}$, la famille de monômes $(\widehat{b_0} m_j^{\frac{1}{j}})_{j\in\{2,...,d\}} = (\tilde{m}_j^{\frac{1}{j}})_{j\in\{2,...,d\}}$ est ordonnée pour la division. Nous dirons alors que nous avons réalisé la monomialisation des coefficients de la série. Nous notons i_0 un indice correspondant au plus petit de ces monômes.

Le fait que $n = \tilde{m}_{i_0}^{\frac{1}{i_0}}$ soit le plus petit pour l'ordre de la division implique que, pour tout $j \in \{2, ..., d\}$, il existe un monôme $n_j \in \mathbb{R}[[X]]$ tel que : $\tilde{m}_j^{\frac{1}{j}} = \tilde{m}_{i_0}^{\frac{1}{i_0}} n_j$.

Cette égalité peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$\forall j \in \{2, ..., d\}, \quad \tilde{m}_j = \tilde{m}_{i_0}^{\frac{j}{i_0}} n_j^j = n^j p_j$$

Pour tout $j \in \{2, ..., d\}$, nous notons : $\tilde{m}_j = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_{j,i}}$. Comme $\tilde{m}_{i_0}$ est le plus petit monôme pour l'ordre de la division, nous savons que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \frac{\alpha_{i_0,i}}{i_0} = \min\left(\left\{\frac{\alpha_{j,i}}{j}; j = 2, ..., d\right\}\right)$$

Nous définissons la somme de puissance d'un monôme par : $\alpha(\tilde{m}) = \alpha(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

4.3.4 Etape 3 : chute de l'ordre

Dans la suite, nous allons effectuer des éclatements sur la variable y en utilisant le monôme n pour faire baisser l'ordre de notre série. Nous notons :$i_1 = \min\left(\left\{\alpha_{i_0,i} \neq 0; i = 1, ..., n\right\}\right)$ et :

$$\forall j \in \{2, ..., d\}, \quad \tilde{m}_j = x_{i_1}^{\alpha_{j,i_1}} \tilde{p}_j$$

Nous remarquons que :

$$\forall j \in \{2, ..., d\}, \quad \frac{\alpha_{j,i_1}}{j} \geq \frac{\alpha_{i_0,i_1}}{i_0} \geq 1 \Rightarrow \alpha_{j,i_1} - j \geq 0$$

Nous effectuons la transformation admissible : $\tau = \left\{\widehat{b}_\lambda^{x_{i_1},y}; \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\right\}$.
Nous distinguons les cas selon la valeur de λ.

Eclatement 1 : $\widehat{b}_\lambda^{x_{i_1},y}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$

La série se transforme alors en :

$$\widehat{b}_\lambda^{x_{i_1},y}\widehat{b}_0\tilde{g}(X, y) = x_{i_1}^d(\lambda + y)^d\widehat{b}_0\tilde{U}(X, x_{i_1}(\lambda + y)) + \sum_{i=2}^{d} x_{i_1}^{d-i}(\lambda + y)^{d-i}\tilde{m}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)$$

Nous notons $\widehat{V}(X, y) = \widehat{b}_0\tilde{U}(X, x_{i_1}(\lambda + y))$. Comme $\tilde{U}$ est une unité formelle, $\widehat{V}$ est aussi une unité formelle. En utilisant la formule du binôme de Newton, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_\lambda^{x_{i_1},y}\widehat{b}_0\tilde{g}(X, y) &= x_{i_1}^d\left(\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}\lambda^{d-i}y^i\widehat{V}(X, y)\right) + \sum_{i=2}^{d} x_{i_1}^{d-i}\sum_{j=0}^{d-i}\binom{d-i}{j}\lambda^{d-i-j}y^j\tilde{m}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X) \\
&= x_{i_1}^d\left(\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}\lambda^{d-i}y^i\widehat{V}(X, y)\right) + \sum_{j=0}^{d-2}\sum_{i=2}^{d-j} x_{i_1}^{d-i}\binom{d-i}{j}\lambda^{d-i-j}y^j\tilde{m}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X) \\
&= x_{i_1}^d y^d\widehat{V}(X, y) + dx_{i_1}^d\lambda y^{d-1}\widehat{V}(X, y) \\
&+ \sum_{j=0}^{d-2}\left(\sum_{i=2}^{d-j} x_{i_1}^{d-i}\binom{d-i}{j}\lambda^{d-i-j}x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}}\tilde{p}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X) + \binom{d}{j}\lambda^{d-j}x_{i_1}^d\widehat{V}(X, y)\right)y^j \\
&= x_{i_1}^d\Bigg[y^d\widehat{V}(X, y) + d\lambda y^{d-1}\widehat{V}(X, y) \\
&+ \sum_{j=0}^{d-2}\left(\sum_{i=2}^{d-j}\binom{d-i}{j}\lambda^{d-i-j}x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}-i}\tilde{p}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X) + \binom{d}{j}\lambda^{d-j}\widehat{V}(X, y)\right)y^j\Bigg] \\
&= x_{i_1}^d\widehat{f}_1(X, y)
\end{aligned}$$

Nous remarquons que le couple $(x_{i_1}^d, \widehat{f}_1)$ appartient à $\mathcal{F}_{\widehat{b}_\lambda^{x_{i_1},y}\widehat{b}_0\tilde{g}}$. Nous posons :

$$\widehat{g}_1(X, y) = \sum_{j=0}^{d-2}\left(\sum_{i=2}^{d-j}\binom{d-i}{j}\lambda^{d-i-j}p_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X) + \binom{d}{j}\lambda^{d-j}\widehat{V}(X, y)\right)y^j$$

Nous avons alors :

$$\widehat{f}_1(0,y) = y^d\widehat{V}(0,y) + d\lambda y^{d-1}\widehat{V}(0,y) + \widehat{g}_1(0,y)$$

Comme $\lambda\widehat{V}(0,0) \neq 0$, nous sommes sûr que $\mathrm{val}(\widehat{f}_1(0,y)) \leq d-1$. Par définition de l'ordre d'une série, nous en déduisons que : $\mathrm{ord}_y(\widehat{b_\lambda^{n,y}}\widehat{b}_0\tilde{g}) \leq d-1$. Comme $(x_{i_1}^d \widehat{b_\lambda^{x_{i_1},y}}\widehat{b}_0 \prod_{i=1}^n \widehat{r_i^{\epsilon_i,d!}}\widehat{bt_a^y}\widehat{h}, \widehat{f}_1) \in \mathcal{F}_{\widehat{b_\infty^{x_{i_1},y}}\widehat{b}_0\prod_{i=1}^n \widehat{r_i^{\epsilon_i,d!}}\widehat{bt_a^y}\widehat{f}}$, nous obtenons que : $\mathrm{ord}_y(\widehat{b_\infty^{x_{i_1},y}}\widehat{b}_0 \prod_{i=1}^n \widehat{r_i^{\epsilon_i,d!}}\widehat{bt_a^y}\widehat{f}) \leq d-1$. D'après la proposition 4.2, nous en déduisons que l'ordre de la fonction obtenue est inférieur à $d-1$.

Eclatement 2 : $\widehat{b_\infty^{x_{i_1},y}}$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{b_\infty^{x_{i_1},y}}\widehat{b}_0\tilde{g}(X,y) &= y^d\widehat{b_\infty^{x_{i_1},y}}\widehat{b}_0\tilde{U}(X,y) + \sum_{i=2}^{d} x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}} y^{d-i+\alpha_{i,i_1}}\tilde{m}_i\widehat{b_\infty^{x_{i_1},y}}\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X) \\
&= y^d\left(\widehat{b_\infty^{x_{i_1},y}}\widehat{b}_0\tilde{U}(X,y) + \sum_{i=2}^{d} x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}} y^{\alpha_{i,i_1}-i}\tilde{m}_i\widehat{b_\infty^{x_{i_1},y}}\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\right) \\
&= y^d\widehat{U}_1(X,y)
\end{aligned}$$

Comme nous avons $b_\infty^{x_{i_1},y}b_0\prod_{i=1}^n r_i^{\epsilon_i,d!}bt_a^y g \in \mathcal{C}_{n+1}$, la condition $(C7)$ de stabilité par division monomiale nous permet de conclure qu'il existe une fonction $U_1 \in \mathcal{C}_{n+1}$ telle que $\widehat{(U_1)} = \widehat{U}_1$. Par la condition de quasi-analycité, nous en déduisons qu'il existe un polyrayon $r_1 \in (]0;+\infty[)^{n+1}$ tel que :

$$\forall (X,y) \in I_{r_1}, \quad b_\infty^{x_{i_1},y}b_0\prod_{i=1}^n r_i^{\epsilon_i,d!}bt_a^y f(X,y) = y^d b_\infty^{x_{i_1},y}b_0\prod_{i=1}^n r_i^{\epsilon_i,d!}bt_a^y h(X)U_1(X,y)$$

La fonction obtenue est sous une forme réduite.

Eclatement 3 : $\widehat{b_0^{x_{i_1},y}}$

La série se transforme alors en :

$$\widehat{b_0^{n,y}}\widehat{b}_0\tilde{g}(X,y) = x_{i_1}^d y^d\widehat{b}_0\tilde{U}(X,x_{i_1}y) + \sum_{i=2}^{d} x_{i_1}^{d-i}y^{d-i}\tilde{m}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\widehat{b_0^{x_{i_1},y}}\widehat{b}_0\tilde{g}(X,y) &= x_{i_1}^d\left(y^d\widehat{b}_0\tilde{U}(X,x_{i_1}y) + \sum_{i=2}^{d} y^{d-i}x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}-i}\tilde{p}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\right) \\
&= x_{i_1}^d\left(y^d\widehat{b}_0\tilde{U}(X,x_{i_1}y) + y^{d-i_0}x_{i_1}^{\alpha_{i_0,i_1}-i_0}\tilde{p}_{i_0}\widehat{b}_0\tilde{U}_{i_0}(X) + \sum_{i=2,i\neq i_0}^{d} y^{d-i}x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}-i}\tilde{p}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\right) \\
&= x_{i_1}^d\Bigg[y^{d-i_0}\left(x_{i_1}^{\alpha_{i_0,i_1}-i_0}\tilde{p}_{i_0}\widehat{b}_0\tilde{U}_{i_0}(X) + y^{i_0}\widehat{b}_0\tilde{U}(X,x_{i_1}y) + \sum_{i=2}^{i_0-1} y^{i_0-i}x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}-i}\tilde{p}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\right) \\
&+ \sum_{i=i_0+1}^{d} y^{d-i}x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}-i}\tilde{p}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\Bigg]
\end{aligned}$$

Nous distinguons deux cas :

- $\alpha(x_{i_1}^{\alpha_{i_0,i_1}-i_0}\tilde{p}_{i_0}) = 0$.
Nous définissons les séries formelles :

$$\begin{aligned}\widehat{g}_1(X,y) &= \widehat{b}_0\tilde{U}_{i_0}(X) + y^{i_0}\widehat{b}_0\tilde{U}(X,ny) + \sum_{i=2}^{i_0-1} y^{i_0-i}p_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\\ \widehat{f}_1(X,y) &= y^{d-i_0}\widehat{g}_1(X,y) + \sum_{i=i_0+1}^{d} y^{d-i}p_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\end{aligned}$$

Nous remarquons que le couple $(x_{i_1}^d, \widehat{f}_1)$ appartient à $\mathcal{F}_{\widehat{b}_0^{n,y}\widehat{b}_0\tilde{f}}$. De plus, comme $\widehat{g}_1(0,0) = \tilde{U}_{i_0}(0,0) \neq 0$, la valuation de $\widehat{f}_1$ est égale à $d - i_0$. Par définition de l'ordre d'une série selon la variable y, nous en concluons que $\mathrm{ord}_y(\widehat{b}_0^{n,y}\widehat{b}_0\tilde{f}) = d - i_0$.
- $\alpha(x_{i_1}^{\alpha_{i_0,i_1}-i_0}\tilde{p}_{i_0}) \neq 0$. L'ordre de la série n'a pas baissé. En revanche, nous remarquons que $\alpha(x_{i_1}^{\alpha_{i_0,i_1}-i_0}\tilde{p}_{i_0}) < \alpha(\tilde{m}_{i_0})$. Il faut distinguer de nouveau différents cas :
Premier cas : $\alpha_{i_0,i_1} - i_0 \neq 0$, nous effectuons à nouveau la transformation admissible τ. Comme aucun terme de puissance $d-1$ selon y n'est apparu, la transformation de Tchirnhausen n'est pas nécessaire et les monômes sont restés ordonnés pour l'ordre de la division. Nous nous retrouvons alors avec trois possibilités :
  - L'ordre a chuté ;
  - La fonction est sous une forme réduite ;
  - Sinon, comme nous avons $\frac{\alpha_{i_0,i_1}}{i_0} \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_{i_0,i_1} - i_0 \neq 0$, nous savons que :

  $$\frac{\alpha_{i_0,i_1}}{i_0} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha_{i_0,i_1} \geq 2i_0$$

  Les mêmes calculs que ci-dessus nous permettent d'écrire que :

  $$\begin{aligned}\widehat{b}_0^{x_{i_1},y}\widehat{b}_0^{x_{i_1},y}\widehat{b}_0\tilde{g}(X,y) &= x_{i_1}^{2d}\Bigg[y^{d-i_0}\Bigg(x_{i_1}^{\alpha_{i_0,i_1}-2i_0}\tilde{p}_{i_0}\widehat{b}_0\tilde{U}_{i_0}(X) + y^{i_0}\widehat{b}_0\tilde{U}(X,x_{i_1}^2y)\\ &+ \sum_{i=2}^{i_0-1} y^{i_0-i}x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}-2i}\tilde{p}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\Bigg) + \sum_{i=i_0+1}^{d} y^{d-i}x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}-2i}\tilde{p}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\Bigg]\end{aligned}$$

  Il faudra distinguer les cas selon que $\alpha(x_{i_1}^{\alpha_{i_0,i_1}-i_0}\tilde{p}_{i_0})$ est nul ou non. Dans le premier cas, nous avons terminé, l'ordre a chuté. Dans le second, nous recommençons. En procédant ainsi nous construisons une famille $(\alpha_{i_0,i_1} - pi_0)_{p\in I}$ d'entiers strictement décroissante. Nous savons qu'au bout d'un nombre fini q d'éclatement nous atteindrons 0. Autrement dit nous aurons :

  $$\begin{aligned}(\widehat{b}_0^{x_{i_1},y})^q\widehat{b}_0\tilde{g}(X,y) &= x_{i_1}^{qd}\Bigg[y^{d-i_0}\Bigg(\tilde{p}_{i_0}\widehat{b}_0\tilde{U}_{i_0}(X) + y^{i_0}\widehat{b}_0\tilde{U}(X,x_{i_1}^q y)\\ &+ \sum_{i=2}^{i_0-1} y^{i_0-i}x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}-qi}\tilde{p}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\Bigg) + \sum_{i=i_0+1}^{d} y^{d-i}x_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}-2i}\tilde{p}_i\widehat{b}_0\tilde{U}_i(X)\Bigg]\end{aligned}$$

  Cela signifie que nous aurons retiré x_{i_1} du monôme le plus petit pour l'ordre de la division. Nous définirons alors l'entier $i_2 = \min(\{\alpha_{i_0,i} \neq 0; i = i_1+1,...,n\})$. Nous poursuivrons le processus d'éclatement jusqu'à l'élimination de x_{i_2} dans le monôme $\tilde{m}_{i_0}$. Le nombre de variable étant fini, nous sommes certains qu'au bout d'un nombre fini de transformations admissibles de type éclatement l'ordre a chuté.

Nous montrons ainsi qu'il existe un arbre complet $\mathcal{T}_{chute}$ tel que, pour tout $b_1 \in \mathcal{T}_{chute}$, nous avons les cas suivants :
- $\mathrm{ord}_y(b_1b_0\prod_{i=1}^n r_i^{\epsilon_i,d!}bt_a^y f) < \mathrm{ord}_y(b_0\prod_{i=1}^n r_i^{\epsilon_i,d!}bt_a^y f)$;
- $b_1b_0\prod_{i=1}^n r_i^{\epsilon_i,d!}bt_a^y f$ est sous une forme réduite.

4.3.5 Récurrence sur l'ordre

Nous considérons une fonction f de petit ordre d selon la variable y. Par définition, il existe un couple $(h, g) \in \mathcal{F}_f$ tel que $f = gh$ et $\mathrm{Ord}_y(g) = d$. Nous commençons par appliquer la transformation de Tchirnhausen. Il existe donc une fonction $a \in \mathcal{C}_n$ telle que le terme d'ordre $d-1$ dans $t_a^y g$ a disparu. Nous appliquons alors l'étape de monomialisation des coefficients. Il existe donc un arbre $\mathcal{T}_{\mathrm{mono}}$ tel que, pour toute suite de transformations élémentaires $b_{\mathrm{mono}} \in \mathcal{T}_{\mathrm{mono}}$, les coefficients de la série $\widehat{b_{\mathrm{mono}} t_a^y g}$ sont des produits d'un monôme et d'une unité.
Nous passons alors à l'étape de chute de l'ordre. Il existe donc un arbre complet $\mathcal{T}_{\mathrm{chute}}$ tel que, pour toute suite de transformations élémentaires $b_{\mathrm{chute}} \in \mathcal{T}_{\mathrm{chute}}$, nous avons les cas suivants :

1. La fonction $b_{\mathrm{chute}} b_{\mathrm{mono}} t_a^y f$ est sous une forme réduite, nous avons l'hérédité de la propriété ;
2. Le petit ordre de la fonction $b_{\mathrm{chute}} b_{\mathrm{mono}} t_a^y f$ est strictement inférieur à d. Nous lui appliquons l'hypothése de récurrence. Il existe donc un arbre complet $\mathcal{T}_{\mathrm{recu}}$ tel que, pour toute suite de transformations élémentaires $b_{\mathrm{recu}} \in \mathcal{T}_{\mathrm{recu}}$, la fonction $b_{\mathrm{recu}} b_{\mathrm{chute}} b_{\mathrm{mono}} t_a^y f$ est sous une forme réduite.

Nous appliquons le théorème 2.15 de la greffe des arbres pour conclure qu'il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que, pour toute suite de transformations élémentaires $b \in \mathcal{T}$, bf est sous une forme réduite.$\diamond$

Corollaire 4.9 *Soit $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ de petit ordre fini selon la variable y. Il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que, pour tout $b \in \mathcal{T}$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}$, des fonctions a et un monôme m dans $\mathbb{R}[[X]]$ et une unité U de $\mathcal{C}_{n+1}$ tels que :*

$$bf(X, y) = (y - a(X))^d m U(X, y)$$

Preuve : D'après le théorème précédent, il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que, pour tout $b \in \mathcal{T}$, il existe un entier $d_b \in \mathbb{N}$, des fonctions a_b et θ_b de $\mathcal{C}^n$ et une unité U_b de $\mathcal{C}_{n+1}$ tels que :

$$bf(X, y) = (y - a_b(X))^d \theta_b(X) U_b(X, y)$$

Pour tout $b \in \mathcal{T}$, nous appliquons le théorème 3.8 de normalisation à la fonction θ_b. Il existe un arbre complet $\mathcal{T}_b$ tel que, pour toute branche $b' \in \mathcal{T}_b$, la fonction $b'\theta_b$ soit normalisée au voisinage de l'origine. En utilisant le théorème 2.15, nous greffons l'arbre $\mathcal{T}$ à l'aide de la famille $(\mathcal{T}_b)_{b \in \mathcal{T}}$. Nous notons $\mathcal{T}_{\mathrm{final}}$ l'arbre obtenu. Nous savons que, pour toute branche $b \in \mathcal{T}_{\mathrm{final}}$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}$, un monôme m de $\mathbb{R}[X]$, une fonction $a \in \mathcal{C}_n$ et une unité $U \in \mathcal{C}_{n+1}$ tels que :

$$bf(X, y) = (y - a(X))^d m(X) U(X, y).\diamond$$

4.3.6 Théorème de préparation simultanée pour l'ordre fini

Théorème 4.10 *Soit $(f_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{C}_{n+1}$ de petit ordre fini selon la variable y. Nous pouvons construire un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que, pour tout branche $b \in \mathcal{T}$, il existe un germe $a \in \mathcal{C}_n$, une famille d'entiers $(d_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$, une famille de fonctions $(\theta_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$ de $\mathcal{C}_n$, une famille d'unités $(U_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$ de $\mathcal{C}_{n+1}$ avec :*

$$\forall i \in \{1, \ldots p\}, \quad bf_i(X, y) = (y - a(X))^{d_i} \theta_i(X) U_i(X, y)$$

Preuve : Nous considérons une famille de germes $(f_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$. Nous définissons la fonction $g = \prod_{j=1}^p f_j$. D'après le corollaire 4.9, nous savons qu'il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que, pour toute branche $b \in \mathcal{T}$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}$, une fonction a de $\mathcal{C}^n$, un monôme $m \in \mathbb{R}[X]$ et une unité U de $\mathcal{C}_{n+1}$ tels que :

$$bg(X, y) = \prod_{j=1}^p bf_j(X, y) = (y - a(X))^d m(X) U(X)$$

Nous effectuons alors la transformation de Tchirnhausen, t_a^y. Ce qui donne :

$$t_a^y bg(X,y) = \prod_{j=1}^{p} t_a^y bf_j(X,y) = y^d m(X) U(X, y + a(X))$$

Nous posons $V(X,y) = U(X, y+a(X))$. En considérant le développement de Taylor à l'origine, nous obtenons alors :

$$\prod_{i=1}^{p} \widehat{t_a^y bf_i}(X,y) = y^d m(X) \widehat{V}(X,y)$$

Nous notons $m = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$. En utilisant le lemme 3.4, nous savons qu'il existe des familles d'entiers $(\alpha_{j,i})_{(j,i)\in\{1,\dots,p\}\times\{1,\dots,n\}}$ et $(\beta_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$ avec :

$$\sum_{j=1}^{p} \beta_j = d \text{ et } \forall i \in \{1,\dots,n\},\ \sum_{j=1}^{p} \alpha_{j,i} = a_i$$

et une famille de séries formelles $(\widehat{U}_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$ tels que, pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, nous ayons :

$$\widehat{t_a^y bf_j}(X,y) = y^{\beta_j} \prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_{j,i}} \widehat{U}_j(X,y) \tag{4.3}$$

En utilisant l'intégrité de l'anneau $\mathbb{R}[[X,y]]$, nous avons alors : $\prod_{j=1}^{p} \widehat{U}_j(X,y) = \widehat{V}(X,y)$. Nous en déduisons que : $\prod_{j=1}^{p} \widehat{U}_j(0,0) = \widehat{V}(0,0)$. Comme $\widehat{V}$ est une unité, nous avons $\widehat{V}(0,0) \neq 0$, donc, pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, $\widehat{U}_j(0,0) \neq 0$. Les séries $\widehat{U}_j$ sont des unités formelles. De plus, en appliquant la condition de stabilité par division monomiale aux équations 4.3, nous savons qu'il existe une famille de fonctions $(U_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$ dans $\mathcal{C}_{n+1}$ telles que, pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, $\widehat{(U_j)} = \widehat{U}_j$. D'après l'hypothèse de quasi-analycité, nous savons qu'il existe un polyrayon $r \in (]0;+\infty[)^{n+1}$ tel que, pour tout $(X,y) \in I_r$ et pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, :

$$\begin{aligned} t_a^y bf_j(X,y) = y^{\beta_j} \prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_{j,i}} U_j(X,y) \quad &\Leftrightarrow \quad bf_j(X,y) = (y-a(X))^{\beta_j} \prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_{j,i}} U_j(X,y) \\ &\Leftrightarrow \quad bf_j(X,y) = (y-a(X))^{\beta_j} \theta_j(X) U_j(X,y) \end{aligned}$$

Cela achève notre démonstration.$\diamond$

4.4 Théorème de préparation dans $\mathcal{C}_{n+1}$

Nous allons dans la suite de ce chapitre généraliser notre théorème de préparation aux germes d'ordre infini et réécrire notre résultat à l'aide des termes.

Théorème 4.11 *Soit $f \in \mathcal{C}_{n+1}$. Il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que que pour tout $b \in \mathcal{T}$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}$, des fonctions a et θ de $\mathcal{C}^n$ et une unité U de $\mathcal{C}_{n+1}$ tels que :*

$$bf(X,y) = (y-a(X))^d \theta(X) U(X,y)$$

Cet arbre sera appelé arbre de préparation de la fonction.

Preuve : Nous considérons un germe f de $\mathcal{C}_{n+1}$. Nous distinguons deux cas :
Premier cas : le petit ordre de f selon la variable y est fini. Nous appliquons alors le théorème 4.8 pour justifier l'existence de l'arbre ;
Deuxième cas : le petit ordre de f selon la variable y est infini. D'après la proposition 4.7,

il existe un arbre complet $\mathcal{T}_{\text{fini}}$ tel que, pour tout branche $b \in \mathcal{T}_{\text{fini}}$, la fonction bf est de petit ordre fini selon la variable y. Comme l'arbre est complet, la famille $(bf)_{b \in \mathcal{T}_{\text{fini}}}$ est une famille finie. Nous lui appliquons le théorème 4.10. Il existe donc un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que pour toute branche $b' \in \mathcal{T}$, la fonction $b'bf$ est sous une forme réduite. Le théorème 2.15 de greffe nous permet de construire un arbre $\mathcal{T}_{\text{prepa}}$ tel que, pour tout branche b de cet arbre, la fonction bf est sous forme réduite sur un voisinage de l'origine.
Dans tous les cas, nous sommes capable de construire un arbre de préparation.$\diamond$
Nous avons alors le corollaire suivant :

Corollaire 4.12 *Soit $f \in \mathcal{C}_{n+1}$. Il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que que pour tout $b \in \mathcal{T}$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}$, des fonctions a et un monôme m dans $\mathbb{R}[[X]]$ et une unité U de $\mathcal{C}_{n+1}$ tels que :*

$$bf(X,y) = (y - a(X))^d m(X)U(X,y)$$

Nous pouvons alors démontrer un premier théorème de préparation simultanée :

Théorème 4.13 *Soit $(f_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{C}_{n+1}$ de petit ordre fini selon la variable y. Nous pouvons construire un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que, pour tout branche $b \in \mathcal{T}$, il existe une fonction $a \in \mathcal{C}_n$, une famille d'entiers $(d_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$, une famille de fonctions $(\theta_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ de $\mathcal{C}_n$, une famille d'unités $(U_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ de $\mathcal{C}_{n+1}$ avec :*

$$\forall i \in \{1,...p\}, \quad bf_i(X,y) = (y - a(X))^{d_i}\theta_i(X)U_i(X,y)$$

La démonstration est identique à celle du théorème 4.10.
Remarque 4: Il convient de noter que la fonction a qui intervient dans notre préparation simultanée est la même pour toutes les fonctions de la famille. Ce point aura son importance dans le chapitre suivant.

Comme précédement, en utilisant le théorème 3.9, nous pouvons démontrer le corollaire suivant :

Corollaire 4.14 *Soit $(f_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{C}_{n+1}$. Nous pouvons construire un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que, pour toute branche $b \in \mathcal{T}$, il existe une fonction $a \in \mathcal{C}_n$, une famille d'entiers $(d_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$, une famille de monômes $(m_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ de $\mathbb{R}[X]$, une famille d'unités $(U_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ de $\mathcal{C}_{n+1}$ avec :*

$$\forall i \in \{1,...p\}, \quad bf_i(X,y) = (y - a(X))^{d_i}m_i(X)U_i(X,y)$$

4.5 Version géométrique des théorèmes de préparation

Les théorèmes que nous venons de démontrer portaient sur les germes. Le fait de ne pas travailler sur les fonctions nous a permis d'esquiver la question des pavés sur lesquels elles sont définies. Nous allons maintenant développer l'aspect géométrique de nos résultats en nous plaçant sur un compact. Nous allons alors réécrire les théorèmes de préparation en réalisant un découpage cylindriques de ce compact.

Comme dans l'exemple développé dans le premier chapitre, ce travail se fera à l'aide des transformations inverses sur les variables initiales. Cela aura pour conséquence de faire apparaître des racines et des quotients. Les objets ainsi obtenus ne seront donc plus des fonctions de $\mathcal{C}_n$, mais des termes. Un des points importants pour la suite de notre travail est de préciser la forme de ces termes et de montrer qu'ils sont simples au sens de la définition 2.16. Par ailleurs, la question de leurs ensembles de définitions entraînera des découpages supplémentaires.

4.5.1 Version géométrique au voisinage de l'origine

Théorème 4.15 *Soit $f \in \mathcal{C}_{n+1}$. Il existe un polyrayon $r \in]0;+\infty[^{n+1}$ et un recouvrement fini $\mathcal{C}$ de I_r tel que, pour tout $C \in \mathcal{C}$, il existe une suite de transformations élémentaires b conservant strictement la verticalité de y, un entier $d \in \mathbb{N}$, quatre fonctions a, g, h et θ de $\mathcal{C}_n$ et une unité U de $\mathcal{C}_{n+1}$ tels que :*

- *Soit nous avons :*

$$\forall (X,y) \in C, \quad f(X,y) = (y - a \circ b^{-1}(X))^d \theta \circ b^{-1}(X) U\left(b^{-1}(X), \frac{y - a \circ b^{-1}(X)}{h \circ b^{-1}(X)}\right)$$

- *Soit nous avons, pour tout $(X,y) \in C$:*

$$f(X,y) = (y - a \circ b^{-1}(X))^d \theta \circ b^{-1}(X) U\left(b^{-1}(X), \frac{y - a \circ b^{-1}(X)}{h \circ b^{-1}(X)}, \frac{g(X)}{y - a \circ b^{-1}(X)}\right)$$

  Et dans ce cas, le graphe de a est disjoint de C.

Remarque 5: Dans la suite, nous regroupons les deux cas en utilisant la formulation du deuxième cas. En effet, si nous sommes dans le premier cas, nous supposons que la fonction g est identiquement nulle.
Preuve : Nous allons procéder par récurrence sur n le nombre de variables X.

Initialisation : si $n = 0$, la fonction f ne dépend que de la variable y. Or nous avons vu dans la proposition 3.1 qu'une fonction de C_1 est normale au voisinage de l'origine.

Hérédité : Nous supposons que toutes les fonctions de $\mathcal{C}_n$ vérifient le théorème. Nous considérons f une fonction de $\mathcal{C}_{n+1}$.

D'après le théorème de préparation 4.11, nous savons qu'il existe un arbre complet $\mathcal{T}$ tel que pour toute branche b, il existe un entier $d \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathcal{C}_n$, $a \in \mathcal{C}_n$ et $U \in \mathcal{C}_{n+1}$ tel que :

$$bf(X,y) = (y - a(X))^d \theta(X) U(X,y)$$

Il existe donc un polyrayon $r \in]0;+\infty[^{n+1}$ tel que :

$$\forall X \in I_r, \quad bf(X,y) = (y - a(X))^d \theta(X) U(X,y)$$

L'arbre est complet, donc $\cup_{b \in \mathcal{T}} b(I_r)$ est une union finie de cylindres qui forme un voisinage de l'origine I_r. Nous effectuons le recouvrement fini suivant :

$$I_r = \bigcup_{b \in \mathcal{T}} \left((b(I_r) \backslash \mathrm{Div}(b)) \cup (\mathrm{Div}(b) \cap I_r) \right)$$

Soit $b \in \mathcal{T}$. Nous distinguons les cas :

- Nous nous plaçons dans la cellule $\mathrm{Div}(b) \cap I_r$. D'après la définition 2.15, le diviseur est une union finie de cellules $\mathrm{Div}_i(b) = b_1 \circ ... \circ b_{i-1}(\mathrm{Div}(b_i)) \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \mathrm{Div}_j(b) \right)$ pour $i \in \{2,...,p\}$. Pour le cas $i = 1$, nous avons $\mathrm{Div}_1(b) = \mathrm{Div}(b_1)$. Nous choisissons d'intégrer ce cas dans le cas général. Nous nous plaçons dans une de ces cellules.
  Soit $i \in \{1,...,p\}$. Selon la définition 2.14, nous avons deux possibilités :
  Soit $\mathrm{Div}(b_i) = \varnothing$. Dans ce cas, la cellule est vide, il n'y a donc rien à justifier.
  Soit il existe $i_0 \in \{1,...,n\}$ tel que : $\mathrm{Div}(b_i) = \{X \in I_r ; x_{i_0} = 0\}$. Pour $i \in \{2,...,p\}$, nous notons $\overline{b}_i = b_1 \circ ... \circ b_{i-1}$. Comme l'arbre conserve la verticalité, la suite de transformations élémentaires $\overline{b}_i$ conserve la verticalité. Nous définissons la fonction f_1 par :

$$\forall X \in \mathrm{Div}(b_i), \quad f_1(X) = f \circ \overline{b}_i(X)$$

Comme la variable x_{i_0} est identiquement nulle sur la cellule, nous pouvons considérer f_1 comme une fonction de $n-1$ variables. L'hypothèse de récurrence nous permet de conclure qu'il existe un polyrayon $r_1 \in]0;+\infty[^n$ et un recouvrement fini $\mathcal{R}_1$ de I_{r_1} tels que, pour tout cellule $C_1 \in \mathcal{R}_1$, il existe une transformation élémentaire b', un entier $d \in \mathbb{N}$, quatre fonctions g, h, θ et a de $\mathcal{C}_{n-1}$ et une unité U de $\mathcal{C}_n$ tels que, pour tout $(X,y) \in C_1$, nous avons :

$$f_1(X,y) = (y - a \circ (b')^{-1}(X))^d \theta \circ (b')^{-1}(X) U\left((b')^{-1}(X), \frac{y - a \circ (b')^{-1}(X)}{h \circ (b')^{-1}(X)}, \frac{g \circ (b')^{-1}(X)}{y - a \circ (b')^{-1}(X)}\right)$$

Nous remarquons que, quitte à choisir le plus petit des deux, nous pouvons supposer que $r_1 = r$. Cela ne pose pas de difficultés, car le nombre de cellules $\mathrm{Div}_i(b)$ est fini.
Soit $(X,y) \in \mathrm{Div}_i(b)$. Il existe $(\overline{X},\overline{y}) \in \mathrm{Div}(b_i)$ tel que :

$$(X,y) = \overline{b}_i(\overline{X},\overline{y})$$

Par ailleurs, $(X,y) \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathrm{Div}_j(b)$. Or, nous remarquons que $\mathrm{Div}(\overline{b}_i) = \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathrm{Div}_j(b)$. Donc, d'après la proposition 2.13, nous savons que la suite de transformations élémentaires $\overline{b}_i$ admet une application réciproque sur la cellule. Nous avons donc :

$$(X,y) = \overline{b}_i(\overline{X},\overline{y}) \Leftrightarrow \overline{b}_i^{-1}(X,y) = (\overline{X},\overline{y})$$

Nous en déduisons :

$$\begin{array}{rcl} \forall (X,y) \in \mathrm{Div}_i(b), \quad f(X,y) & = & f \circ \overline{b}_i \circ \overline{b}_i^{-1}(X,y) \\ & = & f_1(\overline{X},\overline{y}) \\ & = & (\overline{y} - a \circ (b')^{-1}(\overline{X}))^d \theta \circ (b')^{-1}(\overline{X}) \\ & \times & U\left((b')^{-1}(\overline{X}), \dfrac{\overline{y} - a \circ (b')^{-1}(\overline{X})}{h \circ (b')^{-1}(\overline{X})}, \dfrac{g \circ (b')^{-1}(\overline{X})}{\overline{y} - a \circ (b')^{-1}(\overline{X})}\right) \end{array}$$

Nous allons revenir sur les différentes étapes du processus de préparation. Nous commençons par mettre la fonction à l'ordre fini. Durant cette étape, nous n'effectuons que des transformations sur les variables X. Ces dernières conservent la verticalité de y. Ensuite, nous passons à la chute de l'ordre. Pour cela, nous effectuons uniquement des éclatements du type $b_\lambda^{x_i,y}$ ou des transformations de type Tschirnhausen t_a^y. Nous en concluons que la suite de transformations élémentaires $\overline{b}_i$ conserve la verticalité de la variable y. Nous pouvons donc dire qu'il existe deux suites de transformations élémentaires c_1 et c_2 telles que :

$$\overline{b}_i(X,y) = (c_1(X), c_2(X,y))$$

Par ailleurs, nous remarquons qu'il existe une famille $(m_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ de $\mathcal{C}_n$, une famille de réels $(\lambda_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ et une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_n$ tels que :

$$c_2(X,y) = m_1(X)\left(\lambda_1 + m_2(X)\left(\lambda_2 + \ldots. + m_k(X)(\lambda_k + y)\ldots\right)\right) + \alpha(X)$$

Comme $\overline{b}_i$ admet une réciproque sur $\mathrm{Div}_i(b)$, il en est de même pour c_1 et c_2. Nous avons alors :

$$\overline{X} = c_1^{-1}(X) \text{ et } \overline{y} = c_2^{-1}(X,y)$$

Après calculs, nous obtenons :

$$c_2^{-1}(X,y) = \frac{y - \alpha(\overline{X}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \prod_{j=1}^i m_i(\overline{X})}{\prod_{i=1}^k m_i(\overline{X})}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
f(X,y) &= \left(\frac{y-\alpha(c_1^{-1}(X))-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\prod_{j=1}^{i}m_i(c_1^{-1}(X))}{\prod_{i=1}^{k}m_i(c_1^{-1}(X))}-a\circ(b')^{-1}(c_1^{-1}(X))\right)^d\theta\circ(b')^{-1}(c_1^{-1}(X))\\
&\times\ U\Bigg((b')^{-1}(c_1^{-1}(X)),\frac{\frac{y-\alpha(c_1^{-1}(X))-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\prod_{j=1}^{i}m_i(c_1^{-1}(X))}{\prod_{i=1}^{k}m_i(c_1^{-1}(X))}-a\circ(b')^{-1}(c_1^{-1}(X))}{h\circ(b')^{-1}(c_1^{-1}(X))},\\
&\qquad\frac{g\circ(b')^{-1}(c_1^{-1}(X))}{\frac{y-\alpha(c_1^{-1}(X))-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\prod_{j=1}^{i}m_i(c_1^{-1}(X))}{\prod_{i=1}^{k}m_i(c_1^{-1}(X))}-a\circ(b')^{-1}(c_1^{-1}(X))}\Bigg)
\end{aligned}$$

Si nous reprenons l'étape 3 de chute de l'ordre, chaque fois que nous avons effectué un éclatement du type $b_\lambda^{x_{i_1},y}$, nous avons factorisé par la variable x_{i_1} à une puissance supérieure ou égale à d l'ordre final. Il existe θ' tel que :

$$\theta(X)=\theta'(X)\times\left(\prod_{i=1}^{k}m_i(b'(X))\right)^d$$

Nous définissons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
a'(X) &= \alpha(b'(X))+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\prod_{j=1}^{i}m_i(b'(X))+a(X)\prod_{j=1}^{i}m_i(b'(X))\\
g'(X) &= g(X)\prod_{i=1}^{k}m_i(b'(X))\\
h'(X) &= h(X)\prod_{j=1}^{i}m_i(b'(X))
\end{aligned}$$

Nous définissons la suite de transformations élémentaires $\tilde{b}=c_1\circ b'$.
Nous avons alors :

$$f(X,y)=\left(y-a'\circ\tilde{b}^{-1}(X)\right)^d\theta'\circ\tilde{b}^{-1}(X)U\left(\tilde{b}^{-1}(X),\frac{y-a'\circ\tilde{b}^{-1}(X)}{h'\circ\tilde{b}^{-1}(X)},\frac{g'\circ\tilde{b}^{-1}(X)}{y-a'\circ\tilde{b}^{-1}(X)}\right)$$

La fonction est de la forme annoncée.

- Nous nous plaçons dans la cellule $b(I_r)\backslash\mathrm{Div}(b)$. D'après la proposition 2.13, nous savons que b est inversible sur cette cellule. Nous avons donc :

$$(X,y)=b(\overline{X},\overline{y})\Leftrightarrow(\overline{X},\overline{y})=b^{-1}(X,y)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$f(X,y)=f\circ b\circ b^{-1}(X,y)=bf(\overline{X},\overline{y})=(\overline{y}-a(\overline{X}))^d\theta(\overline{X})U(\overline{X},\overline{y})$$

Nous définissons l'unité V par :

$$V(X,y)=U(X,y+a(X))$$

Nous avons alors :

$$f(X,y)=(\overline{y}-a(\overline{X}))^d\theta(\overline{X})V(\overline{X},\overline{y}-a(\overline{X}))$$

La différence avec le cas précédent est que nous avons recours en bout de certaines branches à un éclatement du type $b_\infty^{x_i,y}$. Une telle transformation ne conserve pas la verticalité. De ce fait, nous allons considérer les différentes possibilités. Nous notons une branche $b=b_1\circ b_2...\circ b_p$. D'après ce que nous venons de rappeler, seule la transformation b_p peut ne pas conserver la verticalité.

– Nous supposons que b_p conserve la verticalité. Nous pouvons alors écrire :

$$b^{-1}(X,y) = (c_1^{-1}(X), c_2^{-1}(X,y))$$

Nous retrouvons le cas précédent. Dans notre processus, nous n'effectuons sur la variable y que des transformations de type Tchirnhausen suivie par des éclatements $b_\lambda^{x_i,y}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1,...,n\}$. Il existe donc un entier $k \in \mathbb{N}$, une famille $(m_i)_{i\in\{1,\dots,k\}}$ de $\mathcal{C}_n$, une famille de rééls $(\lambda_i)_{i\in\{1,\dots,k\}}$ et une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_n$ tels que :

$$\begin{array}{rl} & y = m_1(\lambda_1 + m_2(\lambda_2 + ... + m_k(\lambda_k + \overline{y})...) + b(\overline{X}) \\ \Leftrightarrow & \overline{y} = \dfrac{y - \alpha(\overline{X}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \prod_{j=1}^i m_i}{\prod_{i=1}^k m_i} \end{array}$$

Nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} f(X,y) & = & \left(\dfrac{y - \alpha(\overline{X}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \prod_{j=1}^i m_i(\overline{X})}{\prod_{i=1}^k m_i(\overline{X})} - a(\overline{X})\right)^d \theta(\overline{X}) \\ & \times & V\left(\overline{X}, \dfrac{y - \alpha(\overline{X}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \prod_{j=1}^i m_i(\overline{X})}{\prod_{i=1}^k m_i(\overline{X})} - a(\overline{X})\right) \end{array}$$

Il faut se rappeler que chaque fois que nous avons effectué un éclatement du type $b_\lambda^{m_i,y}$, nous avons factorisé par m_i^d. Ce rappel nous permet d'obtenir qu'il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}_n$ telle que : $\theta(\overline{X}) = \left(\prod_{i=1}^k m_i\right)^d \phi(\overline{X})$. Nous avons donc :

$$\begin{array}{rcl} f(X,y) & = & \left(y - \alpha(\overline{X}) - \displaystyle\sum_{i=1}^k \lambda_i \prod_{j=1}^i m_i - a(\overline{X}) \prod_{i=1}^k m_i(\overline{X})\right)^d \phi(\overline{X}) \\ & \times & V\left(\overline{X}, \dfrac{y - \alpha(\overline{X}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \prod_{j=1}^i m_i(\overline{X})}{\prod_{i=1}^k m_i(\overline{X})} - a(\overline{X})\right) \end{array}$$

Nous définissons les fonctions a' et h par :

$$\begin{array}{rcl} a'(X) & = & \alpha(X) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \prod_{j=1}^i m_i(X) - a(X) \\ h(X) & = & \prod_{i=1}^k m_i(X) \end{array}$$

Nous obtenons :

$$f(X,y) = (y - a' \circ c_1^{-1}(X))^d \phi \circ c_1^{-1}(X) V\left(c_1^{-1}(X), \frac{y - a' \circ c_1^{-1}(X)}{h \circ c_1^{-1}(X)}\right)$$

Nous avons écrit notre fonction sous la forme désirée.

– Nous supposons que b_p est du type $b_\infty^{x_i,y}$. En reprenant nos notations adoptées lors de l'étude de la chute de l'ordre, nous avons effectué la transformation $b_p = b_\infty^{x_{i_1},y}$. Nous notons $\tilde{b} = b_1 \circ ... \circ b_{p-1}$. Comme $\tilde{b}$ conserve la verticalité de y, nous avons : $\tilde{b}(X,y) = (c_1(X), c_2(X,y))$ avec c_1 et c_2 deux suites de transformations élémentaires . D'après nos calculs, nous avons :

$$\tilde{b}f(\overline{X},\overline{y}) = \tilde{b}h(\overline{X})\left(\overline{y}^d U(\overline{X},\overline{y}) + \sum_{i=2}^d \overline{y}^{d-i} \overline{x}_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}} \prod_{j=1,j\neq i_1}^n \overline{x}_j^{\alpha_{i,j}} U_i(\overline{X},\overline{y})\right)$$

Nous définissons la fonction V par :

$$\forall (\overline{X},\overline{y},t) \in I_r \times I_\alpha, \quad V(\overline{X},\overline{y},t) = U(\overline{X},\overline{y}) + \sum_{i=2}^d t^i \overline{x}_{i_1}^{\alpha_{i,i_1}-i} \prod_{j=1,j\neq i_1}^n \overline{x}_j^{\alpha_{i,j}} U_i(X)$$

Comme nous avons choisi i_1 de sorte que $\alpha_{i,i_1} - i \geq 0$, les propriétés algébriques de $\mathcal{C}_{n+2}$ nous permettent de conclure que $V \in \mathcal{C}_{n+2}$. De plus, nous avons $V(0,0,0) = U(0,0) \neq 0$. Nous en déduisons que V est une unité dans $\mathcal{C}_{n+2}$. En utilisant la continuité de V à l'origine, nous savons qu'il existe un polyrayon $r' \in (]0;+\infty[)^{n+1}$ et un réel $\epsilon \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall (\overline{X}, \overline{y}, t) \in I_{r'} \times I_\epsilon, \quad V(\overline{X}, \overline{y}, t) \neq 0$$

Nous considérons les cylindres :

$$\begin{aligned} C^+_{n \prec y} &= \left\{ (X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (X,y) \in B,\ y > 0, \frac{|n|}{\epsilon} \leq y \right\} \\ C^-_{n \prec y} &= \left\{ (X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; (X,y) \in B,\ y < 0, \frac{-|n|}{\epsilon} \geq y \right\} \end{aligned}$$

Les cas étant similaires, nous nous plaçons dans le premier cylindre. Pour tout $(\overline{X}, \overline{y}) \in C^+_{n \prec y}$, nous avons :

$$\tilde{f}(\overline{X}, \overline{y}) = \overline{y}^d \tilde{b} h(\overline{X}) V(\overline{X}, \overline{y}, \frac{\overline{x}_{i_1}}{\overline{y}})$$

La seule transformation effectuée sur la variable y est une transformation de Tchirnhausen associée à une fonction a. Nous définissons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} g(X) &= x_{i_1} \\ h(X) &= 1 \\ W(X,y,t) &= V(X, y + a(X), t) \end{aligned}$$

Cela donne à l'aide des variables initiales :

$$f(X,y) = (y - a(c_1^{-1}(X))^d h(c_1^{-1}(X)) W\left(c_1^{-1}(X)X, \frac{y - a(c_1^{-1}(X)}{h(X)}, \frac{g(c_1^{-1}(X)}{y - a(c_1^{-1}(X)} \right)$$

Pour que le processus fonctionne, nous avons vu qu'il est nécessaire d'effectuer les transformations $(b_\lambda^{x_{i_1},y})_{\lambda \in \Lambda}$ de sorte que $\cup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda^{x_{i_1},y}(I_r)$ forme un voisinage de l'origine. Nous choisissons un sous-ensemble fini Λ de $\mathbb{R}$ de sorte que $\cup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda^{x_{i_1},y}(I_r) \cup C^+_{n \prec y} \cup C^-_{n \prec y}$ forme un voisinage de l'origine. Par un argument de compacité similaire à celui utilisé dans la démonstration du lemme 2.8, ce choix est possible. Nous poursuivons alors nos éclatements selon le processus de chute de l'ordre.

Dans tous les cas, nous avons construit une décomposition cylindrique pour laquelle la fonction est sous forme réduite sur chaque cylindre. La propriété est donc héréditaire. Le principe de récurrence nous permet de conclure que le théorème est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par ailleurs, dans chaque cas, nous avons défini un polyrayon. Comme le nombre de cas est fini, nous choisissons le plus petit.

Par ailleurs, nous avons obtenu des suites de transformations élémentaires associées à une décomposition cylindrique sur laquelle. Il est important de noter que toutes ces suites conservent strictement la verticalité.$\diamond$

Le théorème de préparation simultanée pour une famille $(f_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$ se démontrant à partir de la mise sous forme réduite de la fonction $g = \prod_{i=1}^p f_i$, nous obtenons une décomposition cylindrique pour cette fonction et donc pour tous les éléments de la famille. Nous avons ainsi le théorème :

Théorème 4.16 *Soit $(f_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{C}_{n+1}$. Il existe un polyrayon $r \in]0;+\infty[^{n+1}$ et un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de I_r tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b conservant strictement la verticalité de y, une fonction a de $\mathcal{C}_n$, une famille d'entiers $(d_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$, trois familles de fonctions $(\theta_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$, $(h_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$ et $(g_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$, une famille d'unités $(U_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$ de $\mathcal{C}_{n+1}$ tels que, pour tout $i \in \{1,\ldots p\}$:*

- *Soit nous avons :*

$$\forall (X,y) \in C, \quad f_i(X,y) = (y - a \circ b^{-1}(X))^{d_i} \theta_i \circ b^{-1}(X) U_i\left(b^{-1}(X), \frac{y - a \circ b^{-1}(X)}{h_i \circ b^{-1}(X)}\right)$$

- *Soit nous avons :*

$$\forall (X,y) \in C, \quad f_i(X,y) = (y - a \circ b^{-1}(X))^{d_i} \theta_i \circ b^{-1}(X) U_i\left(b^{-1}(X), \frac{y - a \circ b^{-1}(X)}{h_i \circ b^{-1}(X)}, \frac{g_i \circ b^{-1}(X)}{y - a \circ b^{-1}(X)}\right)$$

Dans ce cas, le graphe de a est disjoint de C.

4.5.2 Version géométrique sur un compact

Théorème 4.17 *Soit $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ un germe défini sur un compact B. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de B tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b conservant strictement la verticalité de y, une fonction a de $\mathcal{C}_n$, un entier $d \in \mathbb{N}$, trois fonctions θ, h et g, une unité U de $\mathcal{C}_{n+1}$ tels que :*

- *Soit nous avons :*

$$\forall (X,y) \in C, \quad f(X,y) = (y - a \circ b^{-1}(X))^{d} \theta (\circ b^{-1} X) U\left(b^{-1}(X), \frac{y - a \circ b^{-1}(X)}{h \circ b^{-1}(X)}\right)$$

- *Soit nous avons :*

$$\forall (X,y) \in C, \quad f(X,y) = (y - a \circ b^{-1}(X))^{d} \theta_i \circ b^{-1}(X) U\left(b^{-1}(X), \frac{y - a \circ b^{-1}(X)}{h \circ b^{-1}(X)}, \frac{g \circ b^{-1}(X)}{y - a \circ b^{-1}(X)}\right)$$

Dans ce cas, le graphe de a est disjoint de C.

Preuve : Soit $M_0 = (X_0, y_0) \in B$. Nous notons $X_0 = (x_{0,i})_{i \in \{1,\ldots n\}}$ et $t_{M_0} = t^{x_1}_{x_{0,1}} \circ \ldots \circ t^{x_n}_{x_{0,n}} \circ t^{y}_{y_0}$ une suite de transformations de Tchirnhausen. Nous définissons le germe :

$$f_{M_0}(X,y) = f \circ t_{M_0}(X,y) = f(X + X_0, y + y_0)$$

f est définie au voisinage de M_0, donc f_1 est définie au voisinage de l'origine. D'après le théorème 4.15, il existe un polyrayon $r \in]0, +\infty[^{n+1}$ et un recouvrement fini $\mathcal{R}_{M_0}$ de I_r tel que, pour toute cellule, il existe une suite de tranformations élémentaires b, quatre fonctions a, g, h et θ de $\mathcal{C}_n$ et une unité $U \in \mathcal{C}_{n+1}$ tels que, pour tout $(X,y) \in C$, nous avons :

$$f_{M_0}(X,y) = (y - a \circ b^{-1}(X))^{d} \theta \circ b^{-1}(X) U\left(b^{-1}(X), \frac{y - a \circ b^{-1}(X)}{h \circ b^{-1}(X)}, \frac{g \circ b^{-1}(X)}{y - a \circ b^{-1}(X)}\right)$$

Nous notons $C_{M_0} = M_0 + I_r$. Il s'agit d'un voisinage de M_0. De plus, nous avons :

$$B \subset \bigcup_{M_0 \in B} C_{M_0}$$

Par compacité de B, nous pouvons en extraire un recouvrement fini. Il existe donc une famille finie $(M_i)_{i \in J}$ de point de B telle que :

$$\begin{aligned} B &\subset \bigcup_{i \in J} C_{M_i} \\ &\subset \bigcup_{i \in J} t_{M_i}(t^{-1}_{M_i}(C_{M_i})) \\ &\subset \bigcup_{i \in J} t_{M_i}\left(I_{r_i}\right) \\ &\subset \bigcup_{i \in J} t_{M_i}\left(\bigcup_{C \in \mathcal{R}_i} C\right) \\ &\subset \bigcup_{i \in J} \bigcup_{C \in \mathcal{R}_i} t_{M_i}(C) \end{aligned}$$

Soit $(X,y) \in B$. Il existe un indice $i \in J$ et une cellule $C\mathcal{R}_i$ tels qu'il existe $(\overline{X},\overline{y}) \in C$ avec :

$$(X,y) = t_{M_i}(\overline{X},\overline{y}) \Leftrightarrow (\overline{X},\overline{y}) = t_{M_i}^{-1}(X,y)$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{array}{rcl} f(X,y) & = & f_{M_i}(\overline{X},\overline{y}) \\ & = & (\overline{y} - a\circ b^{-1}(\overline{X}))^d \theta \circ b^{-1}(\overline{X}) U\left(b^{-1}(\overline{X}), \dfrac{\overline{y} - a\circ b^{-1}(\overline{X})}{h\circ b^{-1}(\overline{X})}, \dfrac{g\circ b^{-1}(\overline{X})}{\overline{y} - a\circ b^{-1}(\overline{X})}\right) \end{array}$$

Nous notons $t_{M_i}(X,y) = (t_{M_i,1}(X), y + y_{M_i})$. Nous avons alors :

$$\begin{array}{rcl} f(X,y) & = & \left(y - y_{M_i} - a\circ b^{-1}(t_{M_i,1}^{-1}(X))\right)^d \times \theta \circ b^{-1}(t_{M_i,1}^{-1}(X)) \\ & \times & U\left(b^{-1}(t_{M_i,1}^{-1}(X)X), \dfrac{y - y_{M_i} - a\circ b^{-1}(t_{M_i,1}^{-1}(X))}{h\circ b^{-1}(t_{M_i,1}^{-1}(X))}, \dfrac{g\circ b^{-1}(t_{M_i,1}^{-1}(X))}{y - y_{M_i} - a\circ b^{-1}(t_{M_i,1}^{-1}(X))}\right) \end{array}$$

Nous définissons la suite de transformations élémentaires b' et la fonction a' par :

$$\begin{array}{rcl} b' & = & t_{M_i,1} \circ b \\ a'(X) & = & y_{M_i} + a(X) \end{array}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{array}{rcl} \forall (X,y) \in t_{M_i}(C), \quad f(X,y) & = & \left(y - a' \circ (b')^{-1}(X)\right)^d \theta \circ (b')^{-1}(X) \\ & \times & U\left((b')^{-1}(X), \dfrac{y - a'\circ (b')^{-1}(X)}{h\circ (b')^{-1}(X)}, \dfrac{g\circ (b')^{-1}(X)}{y - a'\circ (b')^{-1}(X)}\right) \end{array}$$

Nous avons la forme annoncée sur chaque cellule.$\diamond$

De la même manière, nous pouvons démontrer un théorème de préparation simultanée sur un compact :

Théorème 4.18 *Soit $(f_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{C}_{n+1}$ définis sur un compact B. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de B tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b, une fonction a de $\mathcal{C}_n$, une famille d'entiers $(d_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$, trois familles de fonctions $(\theta_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$, $(h_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ et $(g_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$, une famille d'unités $(U_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ de $\mathcal{C}_{n+1}$ telles que, pour tout $i \in \{1,\ldots p\}$:*

- *Soit nous avons :*

$$\forall (X,y) \in C, \quad f_i(X,y) = (y - a\circ b^{-1}(X))^{d_i} \theta_i \circ b^{-1}(X) U_i\left(b^{-1}(X), \frac{y - a\circ b^{-1}(X)}{h_i \circ b^{-1}(X)}\right)$$

- *Soit nous avons :*

$$\forall (X,y) \in C, \quad f_i(X,y) = (y - a\circ b^{-1}(X))^{d_i} \theta_i \circ b^{-1}(X) U_i\left(b^{-1}(X), \frac{y - a\circ b^{-1}(X)}{h_i\circ b^{-1}(X)}, \frac{g_i\circ b^{-1}(X)}{y - a\circ b^{-1}(X)}\right)$$

Dans ce cas, le graphe de a est disjoint de C.

4.5.3 Comparaison des différentes versions

Pour conclure ce chapitre, nous faisons quelques remarques concernant les différentes versions du théorème de préparation. La forme des fonctions à laquelle nous aboutissons est proche de celle obtenue par J.M. Lion et J.P. Rolin dans l'article [26]. En effet, en recourant à un morphisme de réduction $\psi = \left(\phi_1, ..., \phi_s, \left(\frac{y-\theta}{a}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{b}{y-\theta}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$, ils obtiennent un recouvrement fini tel que sur chaque cylindre la fonction est sous forme réduite.
N'effectuant pas de ramification sur la variable y, nous ne faisons pas apparaître les puissances $\frac{1}{p}$. En dehors de cette différence, notre théorème est similaire à la version géométrique de J.M. Lion et J.P. Rolin. Leur démonstration s'effectuant dans le cadre sous-analytique et utilisant le théorème de préparation de Weierstrass, non prouvé dans notre cadre quasi-analytique, nous ne pouvions pas l'utliser.
Pour obtenir une version similaire à celle obtenue par P. Speisseger et L. Van den Dries dans l'article [15], il faut raffiner notre recouvrement. Soit C une cellule de notre recouvrement, nous considérons les sous-cellules :

$$\begin{array}{rcl} C^{>} & = & \left\{(X,y) \in C; y > a(X)\right\} \\ C^{=} & = & \left\{(X,y) \in C; y = a(X)\right\} \\ C^{<} & = & \left\{(X,y) \in C; y < a(X)\right\} \end{array}$$

La quantité $y - a(X)$ étant alors de signe constant sur ces cellules, nous pouvons la remplacer par sa valeur absolue $|y - a(X)|$. Par ailleurs, nous définissons l'unité :

$$V(X,y) = U\left(b^{-1}(X), \frac{y - a \circ b^{-1}(X)}{h_i \circ b^{-1}(X)}, \frac{g_i \circ b^{-1}(X)}{y - a \circ b^{-1}(X)}\right)$$

Nous obtenons sur chaque cellule la fonction sous la forme :

$$f(X,y) = |y - a(X)|^d \theta(X) U(X,y)$$

La difficulté que nous pose cette formulation dans la suite de notre travail est de perdre la nature de terme simple des éléments apparaissant. Cette perte d'information est la résultante de l'utilisation d'arguments de théorie de modèles moins constructif que des arguments purement géométrique. L'intérêt d'avoir réécrit toute la démonstration du théorème de préparation est donc de faire apparaître cette nature particulière des objets obtenus.

Chapitre 5

Paramétrisation

Dans ce chapitre, nous allons exposer le schéma de démonstration du résultat de ce travail. Nous nous appuyons sur les conclusions de l'article [32] pour montrer que le graphe d'une fonction définissable peut se paramétriser par des fonctions de l'algèbre. Cela entraîne l'apparition de nouvelles variables qu'il nous faudra éliminer, ce qui sera l'objet du chapitre suivant.

5.1 Relation de comparaison sur les fonctions

5.1.1 Définition

Nous rappelons la définition 2.1 de comparaison des fonctions :

Définition 5.1 *Soient f et g deux fonctions définies sur un sous-ensemble B de $\mathbb{R}^n$. Nous définissons les relations de comparaison de la manière suivante :*

1. *La fonction f domine la fonction g sur B s'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall X \in B, |g(X)| \leq K|f(X)|$$

   On notera $g \prec f$.

2. *Les fonctions f et g sont équivalentes sur B si f domine g et g domine f sur B. Nous noterons $f \sim g$.*

5.1.2 Propriétés de la domination

Nous énonçons et démontrons les propriétés de ces relations de comparaison que nous utiliserons dans la suite :

Proposition 5.1 *La relation de domination vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Elle est transitive.*
2. *Si $f_1 \prec g_1$ et $f_2 \prec g_2$, alors $f_1 f_2 \prec g_1 g_2$.*
   En particulier, nous avons :
   si $f \prec g$ et $p \in \mathbb{N}$, alors $f^p \prec g^p$.
3. *Si $f \prec h$ et $g \prec h$, alors $f + g \prec h$.*

Preuve : Soient f, g, h trois fonctions définies sur un ensemble $B \subset \mathbb{R}^n$ telles que $f \prec g$ et $g \prec h$. Alors il existe deux constantes $(K, K') \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall X \in B, \quad |f(X)| \leq K|g(X)| \text{ et } |g(X)| \leq K'|h(X)|$$

Nous avons alors :

$$\forall X \in B, \quad |f(X)| \leq KK'|h(X)|$$

Autrement dit, nous avons : $f \prec h$.
Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 quatre fonctions définies sur un pavé B telles que $f_1 \prec g_1$ et $f_2 \prec g_2$. Alors il existe deux constantes $(K, K') \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall X \in B, \quad |f_1(X)| \leq K|g_1(X)| \text{ et } |f_2(X)| \leq K'|g_2(X)|$$

Nous avons alors :

$$\forall X \in B, \quad |f_1(X)f_2(X)| \leq KK'|g_1(X)g_2(X)|$$

Autrement dit, nous avons : $f_1f_2 \prec g_1g_2$.
Soient f, g, h trois fonctions définies sur un pavé B telles que $f \prec h$ et $g \prec h$. Alors il existe deux constantes $(K, K') \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall X \in B, \quad |f(X)| \leq K|h(X)| \text{ et } |g(X)| \leq K'|h(X)|$$

Nous avons alors :

$$\forall X \in B, \quad |f(X) + g(X)| \leq (K + K')|h(X)|$$

Autrement dit, nous avons : $f + g \prec h$.$\diamond$

Lemme 5.2 *Soit $m = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$ un monôme tel que $\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}}{y^a} \prec 1$ alors, à l'aide de ramifications sur les variables x_i, il existe une nouvelle variable $\overline{x}_{i_0}$ telle que $\overline{x}_{i_0} \prec y$.*

Preuve : On commence par poser $X_i^a = x_i$, pour tout i, ce qui donne :

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}}{y^a} = (\frac{\prod_{i=1}^{n} X_i^{a_i}}{y})^a$$

Puis, on considère la plus petite variable x_i, autrement dit, soit x_{i_0} telle que, pour tout i, $x_{i_0} \preceq x_i$. Nous avons alors :

$$x_{i_0}^{\sum_{i=1}^{n} a_i} \prec y$$

Maintenant, nous effectuons la ramification : $\overline{x}_{i_0} = x_{i_0}^{\sum_{i=1}^{n} a_i}$, d'où :

$$\overline{x}_{i_0} \prec y.\diamond$$

5.1.3 Propriétés de l'équivalence

Proposition 5.3 *La relation d'équivalence vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Elle est réflexive et transitive.*
2. *Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1f_2 \sim g_1g_2$.*
3. *Si f_1 et f_2 sont deux fonctions définies sur un pavé B telles que $f_1 \sim f_2$ et si g est une fonction définie sur un pavé B' telle que $g(B') \subset B$, alors $f_1 \circ g \sim f_2 \circ g$ sur B'.*
   En particulier, nous avons :
   Si $f \sim g$ et si b est une suite de transformations élémentaires, alors $f \circ b \sim g \circ b$.

Preuve :

1. Par définition de la relation d'équivalence, la réflexivité est immédiate.
   Soient f, g et h trois fonctions définies sur un pavé B telles que $f \sim g$ et $g \sim h$. Par définition de la relation, f domine g et g domine h. D'après la transitivité de la relation de domination, nous en déduisons que f domine h. Comme g domine f et h domine g, nous avons aussi que h domine f. Nous en concluons que la relation d'équivalence est transitive.

2. Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 quatres fonctions définies sur un pavé B telles que $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$. Comme, f_1 domine g_1 et que f_2 domine g_2, d'après la proposition 5.1, nous en déduisons que $f_1 f_2$ domine $g_1 g_2$. Nous montrons de même que $g_1 g_2$ domine $f_1 f_2$. Nous en concluons que $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

3. Soient f_1 et f_2 sont deux fonctions définies sur un pavé B telles que $f_1 \sim f_2$ et si g est une fonction définie sur un pavé B' telle que $g(B') \subset B$. Il existe donc deux réels $(k, K) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall X \in B, \quad k|f_1(X)| \leq |f_2(X)| \leq K|f_1(X)|$$
Nous avons donc :
$$\forall X \in B', \quad k|f_1(g(X))| \leq |f_2(g(X))| \leq K|f_1(g(X))|$$
Autrement dit, nous avons $f_1 \circ g \sim f_2 \circ g$ sur B'.$\diamond$

5.1.4 Interprétation géométrique

Nous donnons une interprétation géométrique en terme de recouvrement cellulaire de l'équivalence avec un monôme. Ce lemme nous sera utile dans le dernier chapitre.

Lemme 5.4 *Soient $(k, K) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et m un monôme. Nous considérons l'ensemble C défini par :*
$$C = \left\{ (X, y) \in I_r; k|m(X)| \leq |y| \leq K|m(X)| \text{ et } y \neq 0 \right\}$$
Alors il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de C, tel que, pour toute cellule $S \in \mathcal{R}$, il existe un polyrayon $r_S \in]0; +\infty[^{n+1}$ et $\lambda_S \in \mathbb{R}^*$ tels que :
$$S = b_{\lambda_S}^{m,y}(I_{r_S})$$

Preuve : Soit $r \in]0; +\infty[^{n+1}$ un polyrayon. Nous noterons $r = (r_X, r_y)$ avec $r_X \in]0; +\infty[^n$ et $r_y \in \mathbb{R}_+^*$. Nous remarquons que, sur C, nous avons l'équivalence :
$$m(X) = 0 \Leftrightarrow y = 0$$
Nous savons donc que m ne s'annule pas sur C. Nous effectuons un premier recouvrement cellulaire en considérant les cellules suivantes :
$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & \{(X, y) \in C; y > 0 \text{ et } m > 0\} \\ C_2 & = & \{(X, y) \in C; y > 0 \text{ et } m < 0\} \\ C_3 & = & \{(X, y) \in C; y < 0 \text{ et } m < 0\} \\ C_4 & = & \{(X, y) \in C; y < 0 \text{ et } m > 0\} \end{array}$$
Nous distinguons les différents cas :

- Nous considérons le polyrayon $r_1 = (r_X, \frac{K-k}{2})$ et le réel $\lambda_1 = \frac{k+K}{2}$.
Soit $(X, y) \in b_{\lambda_1}^{m,y}(I_{r_1})$. Il existe donc $(\overline{X}, \overline{y}) \in I_{r_1}$ tel que $(X, y) = b_{\lambda_1}^{m,y}(\overline{X}, \overline{y})$. Autrement dit, nous avons : $\overline{X} = X$ et $y = m(\overline{X})(\lambda_1 + \overline{y})$. Comme $m \neq 0$ sur C_1, nous avons :
$$\overline{y} = \frac{y}{m} - \lambda_1$$
Comme $m > 0$ sur C_1, nous en déduisons :
$$\begin{aligned} -r_1 \leq \overline{y} \leq r_1 & \Leftrightarrow \quad \frac{k-K}{2} \leq \frac{y}{m} - \lambda_1 \leq \frac{K-k}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad m\left(\frac{k-K}{2} + \frac{k+K}{2}\right) \leq y \leq m\left(\frac{K-k}{2} + \frac{k+K}{2}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad km \leq y \leq Km \end{aligned}$$

Nous avons donc $b_{\lambda_1}^{m,y}(I_{r_1}) \subset C_1$.
Soit $(X, y) \in C_1$. Comme $m \neq 0$ sur C_1, nous notons $\overline{X} = X$ et $\overline{y} = \frac{y}{m} - \lambda_1$. Nous avons donc :

$$(X, y) = b_{\lambda_1}^{m,y}(\overline{X}, \overline{y})$$

Par ailleurs, nous avons :

$$km \leq y \leq Km \Leftrightarrow -r_1 \leq \overline{y} \leq r_1$$

Nous en concluons que $b_{\lambda_1}^{m,y}(I_{r_1}) = C_1$.

- Sur C_2, nous choisissons $r_2 = (r_X, \frac{K-k}{2})$ et $\lambda_2 = -\frac{k+K}{2}$.
Soit $(X, y) \in b_{\lambda_2}^{m,y}(I_{r_2})$. Il existe donc $(\overline{X}, \overline{y}) \in I_{r_2}$ tel que $(X, y) = b_{\lambda_2}^{m,y}(\overline{X}, \overline{y})$. Autrement dit, nous avons : $\overline{X} = X$ et $y = m(\overline{X})(\lambda_2 + \overline{y})$. Comme $m \neq 0$ sur C_1, nous avons :

$$\overline{y} = \frac{y}{m} - \lambda_2$$

Comme $m < 0$ sur C_2, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} -r_2 \leq \overline{y} \leq r_2 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{k-K}{2} \leq \frac{y}{m} - \lambda_2 \leq \frac{K-k}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad m\left(\frac{k-K}{2} - \frac{k+K}{2}\right) \geq y \geq m\left(\frac{K-k}{2} - \frac{k+K}{2}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad -Km \geq y \geq -km \\ & \Leftrightarrow \quad k|m| \leq y \leq K|m| \end{aligned}$$

Nous avons donc $b_{\lambda}^{m,y}(I_{r_2}) \subset C_2$.
Soit $(X, y) \in C_2$. Comme $m \neq 0$ sur C_1, nous notons $\overline{X} = X$ et $\overline{y} = \frac{y}{m} - \lambda_2$. Nous avons donc :

$$(X, y) = b_{\lambda_2}^{m,y}(\overline{X}, \overline{y})$$

Par ailleurs, nous avons :

$$-km \leq y \leq -Km \Leftrightarrow -r_2 \leq \overline{y} \leq r_2$$

Nous en concluons que $b_{\lambda_2}^{m,y}(I_{r_2}) = C_2$.
Les cas suivants sont similaires aux deux cas étudiés ci-dessus, nous donnons simplement les valeurs du polyrayon et du réel.
- Sur C_3, nous choisissons $r_3 = r_1$ et $\lambda_3 = \lambda_1$.
- Sur C_4, nous choisissons $r_4 = r_2$ et $\lambda_4 = \lambda_2$.

Nous avons donc :

$$C = \bigcup_{i \in \{1,\dots,4\}} C_i = \bigcup_{i \in \{1,\dots,4\}} b_{\lambda_i}^{m,y}(I_{r_i})$$

Nous pouvons conclure à l'existence de notre découpage cellulaire.$\diamond$

5.2 Définitions et résultats préliminaires

Les définitions et les résultats suivants sont issues de l'article [32].

5.2.1 Définitions

Définition 5.2 *Un ensemble A est appelé un $\mathcal{C}$-ensemble basique s'il existe $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et f, g_1,...,g_k des éléments de $\mathcal{C}_{n,r}$ tels que :*

$$A = \{X \in I_r; f(x) = 0, g_1(x) > 0, ..., g_k(X) > 0\}$$

Une union finie de $\mathcal{C}$-ensemble basique est appelée un $\mathcal{C}$-ensemble.
Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est dit $\mathcal{C}$-semianalytique si, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe un polyrayon $r \in]0;+\infty[^n$ tel que $(A-a) \cap I_r$ est un $\mathcal{C}$-ensemble. Si, de plus, nous supposons que A est une variété, alors A est appelée une $\mathcal{C}$-semianalytique variété.

Définition 5.3 *Un ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est appelé une $\mathcal{C}$-variété s'il existe $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ et $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que :*

1. *M est un $\mathcal{C}$-ensemble basique contenu dans I_r ;*
2. *Il existe $f_1, ..., f_k$ des éléments de $\mathcal{C}_{n,r}$ tels que M est une sous-variété de I_r de dimension $n-k$ sur laquelle les fonctions $f_1, ..., f_k$ sont identiquement nulles, et, pour tout $z \in M$, les gradients $\nabla f_1(z), ..., \nabla f_k(z)$ sont linéairement indépendants.*

Soit, maintenant, deux entiers $m \leq n$, nous notons $\Pi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la projection sur les m-premières variables. Si on considère une injection $\lambda : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$, nous notons Π_λ^n l'application définie par :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \Pi_\lambda^n(x_1, ..., x_n) = (x_{\lambda(1)}, ..., x_{\lambda(m)})$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $f = (f_1, ..., f_p) \in \mathcal{C}_{n,r}^p$ et $S \subset I_r$. On considère une condition de signe $\sigma \in \{-1; 0; 1\}^p$. On note alors :

$$B_S(f, \sigma) = \{X \in S; \mathrm{sgn}(f_1(X)) = \sigma_1, ..., \mathrm{sgn}(f_p(X)) = \sigma_p\}$$

Définition 5.4 *Soit $r \in (\mathbb{R}_+*)^n$. Un ensemble $M \subset I_r$ est dit $\mathcal{C}$-trivial s'il vérifie l'une des conditions suivantes :*

1. *Il existe une condition de signe $\sigma \in \{-1; 0; 1\}^p$ telle que $M = B_{I_r}((x_1, ..., x_n), \sigma)$;*
2. *Il existe une permutation λ de $\{1, ..., n\}$, un ensemble $\mathcal{C}$-trivial $N \subset I_s$ et $g \in \mathcal{C}_{n-1,s}$ avec $s = (r_{\lambda(1)}, ..., r_{\lambda(n-1)})$ tels que $g(I_s) \subset]-r_{\lambda(n)}; r_{\lambda(n)}[$ et $\Pi_\lambda(M) = gr(g_{|N})$.*

Remarque 1: Les ensembles triviaux sont donc soit des quadrants, soit, à une permutation des variables près, le graphe d'une fonction de notre algèbre.

5.2.2 Principaux résultats

Lemme 5.5 *Soit $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un ensemble définissable, alors A est une union finie de $\mathcal{C}^\infty$ variétés définissables.*

Preuve : ce résultat correspond au lemme 5-5 de l'article préalablement cité.$\diamond$

Théorème 5.6 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble $\mathcal{C}$-semianalytique borné et $k \leq n$. Alors il existe des variétés triviales $\mathcal{C}$-semianalytiques $N_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ avec $n_i \geq n$ et $J \in \mathbb{N}^*$ tels que :*

$$\Pi_k(A) = \Pi_k(N_1) \cup ... \cup \Pi_k(N_J)$$

et pour tout $i = 1, ..., J$, nous savons que $d = dim(N_i) \leq k$ et qu'il existe une application strictement croissante $\lambda : \{1, ..., d\} \to \{1, ..., k\}$ telle que l'application $\Pi_{\lambda|N_i} : N_i \to \mathbb{R}^d$ est une immersion.

Preuve : ce théorème est la proposition 4-7 de l'article [32].$\diamond$
Nous aurons besoin du résultat fondamental suivant :

Théorème 5.7 *La structure $\mathbb{R}_\mathcal{C}$ est o-minimale, modèle complète et polynomialement bornée.*

Preuve : Il s'agit des théorèmes 5-2 et 5-4 de l'article [32].$\diamond$

5.3 Paramétrisation d'un ensemble définissable

A partir d'une fonction définissable, notre stratégie consiste à revenir aux éléments de C_n pour pouvoir leur appliquer notre théorème de préparation. Pour cela, nous allons paramétrer tout ensemble définissable à l'aide de fonctions de $\mathcal{C}_n$. En conséquence, le graphe d'une fonction définissable de $\mathbb{R}^{n+1}$ admet cette paramétrisation.

5.3.1 Définition d'une $\mathcal{C}$-paramétrisation

Dans l'article [16], les auteurs complètent la notion de dimension par la définition suivante :

Définition 5.5 *Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Nous disons que S a une* dimension *si S est une union dénombrable de variétés de classe C^1, et, dans ce cas, nous notons :*

$$\dim(S) = \begin{cases} \max\{\dim(M); M \subset S \textit{ est une } C^1\textit{-variété}\} & \textit{si } S \neq \varnothing \\ -\infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

Nous remarquons que le lemme 5.5 nous permet de conclure que tous les ensembles définissables ont une dimension.

Définition 5.6 *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable de la structure $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ et $p = \dim(S)$. Nous disons que S admet une $\mathcal{C}$-paramétrisation s'il existe une famille $(a_i)_{i=1..n}$ de $\mathcal{C}_p$ telle que nous avons l'équivalence suivante :*

$$M(x_1, ..., x_n) \in S \Leftrightarrow \exists (\lambda_j)_{j=1..p}, \forall i \in \{1, ..., n\}, x_i = a_i(\lambda_1, ..., \lambda_p)$$

Lemme 5.8 *Un ensemble $\mathcal{C}$-trivial admet une $\mathcal{C}$-paramétrisation.*

Preuve : Reprenons la définition 5.4 d'un ensemble $\mathcal{C}$-trivial. Il s'agit d'un procédé constructif commençant par les quadrants. Il existe donc $r \in (0, \infty)^{n'}$ tel que :
• La composante N est un quadrant : il existe donc une condition de signe $\sigma \in \{-1, 0, 1\}^{n'}$ telle que $N = B_{I_r}((x_1, ..., x_{n_i}), \sigma)$. On sait que la dimension d'un tel quadrant est égale au cardinal de l'ensemble $\{i; \sigma_i \neq 0\}$. Or, on a vu que dim $N \leq n$, on en conclut qu'il existe $i_0 \in \{1, ..., n+1\}$ tel que $\sigma_{i_0} = 0$. On considère l'ensemble :

$$J_r = (-r_1; r_1) \times ... \times (-i_0 - 1; i_0 - 1) \times (-i_0 + 1; i_0 + 1) \times ... \times (-r_{n+1}; r_{n+1})$$

On va distinguer trois cas pour définir nos applications :
– Si $i \in \{1, ..., i_0 - 1\}$, on définit l'application a_i, pour tout $(u_1, ..., u_n) \in J_r$, par :
  Si $\sigma_i = -1$, alors $a_i(u_1, ..., u_n) = u_i$ si $u_i < 0$ et $a_i(u_1, ..., u_n) = 0$ sinon ;
  Si $\sigma_i = 0$, alors $a_i(u_1, ..., u_n) = 0$;
  Si $\sigma_i = 1$, alors $a_i(u_1, ..., u_n) = u_i$ si $u_i > 0$ et $a_i(u_1, ..., u_n) = 0$ sinon.
– Si $i = i_0$, alors : $\forall (u_1, ..., u_n) \in J_r, a_{i_0}(u_1, ..., u_n) = 0$.
– Si $i \in \{i_0 + 1, ..., n+1\}$, on définit l'application a_i par, pour tout $(u_1, ..., u_n) \in J_r$:
  Si $\sigma_i = -1$, alors $a_i(u_1, ..., u_n) = u_{i-1}$ si $u_i < 0$ et $a_i(u_1, ..., u_n) = 0$ sinon ;
  Si $\sigma_i = 0$, alors $a_i(u_1, ..., u_n) = 0$;
  Si $\sigma_i = 1$, alors $a_i(u_1, ..., u_n) = u_{i-1}$ si $u_i > 0$ et $a_i(u_1, ..., u_n) = 0$ sinon.

Comme $A = \Pi_{n+1}(N_i)$, on obtient :

$$M = (x_1, ..., x_{n+1}) \in A \Leftrightarrow \exists (u_1, ..., u_n) \in J_r, \forall i \in \{1, ..., n+1\}, x_i = a_i(u_1, ..., u_n)$$

• La composante N est de la nature précisée dans la deuxième partie de la définition : autrement dit, il existe une permutation λ de $\{1, ..., n'\}$, un ensemble $\mathcal{C}$-trivial N' inclus dans I_s et $g \in C_{n'-1,s}$ avec $s = (r_{\lambda(1)}, ..., r_{\lambda(n'-1)})$ tels que $g(I_s)$ est inclus dans $(-r_{\lambda(n')}, r_{\lambda(n')})$ et $\Pi_\lambda(N) = gr(g_{|N})$. Puisque λ est une permutation, alors Π_λ est un difféomorphisme. On en déduit que

$\dim(N) = \dim gr(g_{|N})$, donc que $\dim gr(g_{|N}) \leq n$. Or $\dim gr(g_{|N}) \geq \dim N$, donc $\dim N \leq n$.
Pour tout $i = 1, ..., n+1$, on définit des applications a_i par :

$$\forall (u_1, ..., u_n) \in N', \quad \begin{array}{l} \text{Si } i \in \{1, ..., n\}, \text{ alors } a_i(u_1, ..., u_n) = u_i \\ \text{Si } i = n+1, \text{ alors } a_{n+1}(u_1, ..., u_n) = g(u_1, ..., u_n) \end{array}$$

En utilisant la définition de Π_λ, on obtient alors que :

$$M = (x_1, ..., x_{n+1}) \in A \Leftrightarrow \exists (u_1, ..., u_n) \in B, \forall i \in \{1, ..., n+1\}, x_i = a_{\lambda^{-1}(i)}(u_1, ..., u_n)$$

Dans tous les cas, les applications que nous avons construites sont des éléments de C_n.$\diamond$

Définition 5.7 *Soit S un ensemble définissable. S admet une $\mathcal{C}$-paramétrisation cellulaire s'il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de S tel que toute cellule $C \in \mathcal{R}$ admet une $\mathcal{C}$-paramétrisation.*

5.3.2 Paramétrisation des ensembles définissables

Lemme 5.9 *Nous considérons l'application τ définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tau(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Elle admet une application réciproque et nous avons $\tau^{-1} \in \mathcal{C}_1$.

Preuve : Nous vérifions que τ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$. L'application réciproque est donnée par :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \tau^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

En utilisant les propositions 2.11 et 2.12, nous obtenons que τ^{-1} appartient à $\mathcal{C}_1$.$\diamond$

Théorème 5.10 *Soit S un ensemble définissable de la structure $\mathbb{R}_\mathcal{C}$. S admet une $\mathcal{C}$-paramétrisation cellulaire.*

Preuve : Soit S un ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$. Nous avons vu qu'il admet une dimension que l'on note $d \leq n$.
Or nous savons que notre structure est modèle complète, il existe donc un ensemble $\mathcal{C}$-semianalytique C dans $\mathbb{R}^{n'}$ avec $n \leq n'$ tel que $S = \Pi_n(C)$. Nous notons $\dim(C) = d_C$.
Nous considérons l'application $\tau_{n'}$ définie par :

$$\forall (x_1, ..., x_{n'}) \in \mathbb{R}^{n'}, \quad \tau_{n'}(x_1, ..., x_{n'}) = \Big(\tau(x_1), ..., \tau(x_{n'})\Big)$$

Il s'agit d'un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{n'}$ dans $(-1;1)^{n'}$. Nous avons donc que $\tau_{n'}(C)$ est un $\mathcal{C}$-semianalytique borné de dimension d_C.
D'après le théorème 5.6, il existe donc des variétés triviales $\mathcal{C}$-semianalytiques $N_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ avec $n_i \geq n'$ pour $i = 1, ..., l$ telles que :

$$\tau_{n'}(C) = \Pi_{n'}(\tau_{n'}(C)) = \Pi_{n'}(N_1) \cup ... \cup \Pi_{n'}(N_d)$$

De plus, nous savons que $\Pi_{n'|N_i}$ est une immersion. D'après la définition d'une dimension, nous en déduisons :

$$d_C = \max\Big\{\dim(N_i); i = 1..l\Big\}$$

Pour tout $i \in \{1, ..., l\}$, nous notons $C_i = \Pi_{n'}(N_i)$ et $d_i = \dim(N_i)$. Nous avons un recouvrement cellulaire de $\tau_{n'}(C)$ par des projections de variétés triviales. D'après le lemme 5.8, pour tout $i \in \{1, ..., l\}$, il existe une famille $(a_{i,j})_{j=1..n_i}$ de $\mathcal{C}_{d_i}$ telle que :

$$M(x_1, ..., x_{n_i}) \in N_i \Leftrightarrow \exists (\lambda_{i,j})_{j=1..d_i} \in \mathbb{R}^{d_i}, \forall k \in \{1, ..., n_i\}, x_k = a_{i,k}(\lambda_1, ..., \lambda_{d_i})$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} M \in S &\Leftrightarrow \exists N \in C, M = \Pi_n(N) \\ &\Leftrightarrow \exists P \in \tau_{n'}(C), M = \Pi_n\left(\tau_{n'}^{-1}(P)\right) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \{1, ..., l\}, \exists P_i \in N_i, M = \Pi_n\left(\tau_{n'}^{-1}(\Pi_{n'}(P_i))\right) \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, ..., l\}$, nous notons $C_i = \Pi_n\left(\tau_{n'}^{-1}(\Pi_{n'}(N_i))\right)$. D'après les équivalences précédentes, nous avons un recouvrement fini de S par la famille $(C_i)_{i\in\{1,...,l\}}$.
Soit $i \in \{1, ..., l\}$. L'utilisation de la paramétrisation de N_i nous permet d'écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in C_i &\Leftrightarrow \exists i \in \{1, ..., l\}, \exists (\lambda_{i,j})_{j=1..d_i} \in \mathbb{R}^{d_i}, \forall k \in \{1, ..., n'\}, \\ &\qquad M = \Pi_n\left(\tau_{n'}^{-1}\left(a_{i,1}(\lambda_1, ..., \lambda_{d_i}), ..., a_{i,n'}(\lambda_1, ..., \lambda_{d_i})\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \{1, ..., l\}, \exists (\lambda_{i,j})_{j=1..d_i} \in \mathbb{R}^{d_i}, \forall k \in \{1, ..., n'\}, \\ &\qquad M = \Pi_n\left(\tau^{-1} \circ a_{i,1}(\lambda_1, ..., \lambda_{d_i}), ..., \tau^{-1} \circ a_{i,n'}(\lambda_1, ..., \lambda_{d_i})\right) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \{1, ..., l\}, \exists (\lambda_{i,j})_{j=1..d_i} \in \mathbb{R}^{d_i}, \forall k \in \{1, ..., n\}, \\ &\qquad M = \left(\tau^{-1} \circ a_{i,1}(\lambda_1, ..., \lambda_{d_i}), ..., \tau^{-1} \circ a_{i,n}(\lambda_1, ..., \lambda_{d_i})\right) \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.9, nous remarquons que, pour tout $i \in \{1, ..., l\}$ et pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, le germe $\tau^{-1} \circ a_{i,k}$ apprtient à $\mathcal{C}_{d_i}$. Nous en concluons que, pour tout $i \in \{1, ..., l\}$, C_i admet une C-paramétrisation, et donc S admet une $\mathcal{C}$ paramétrisation cellulaire.$\diamond$

Corollaire 5.11 *Soit ϕ une fonction définissable, nous notons $\Gamma(\phi) = \{(X, \phi(X); X \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ son graphe. Alors il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de $\Gamma(\phi)$ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une famille $(a_i)_{i\in\{1,...,n\}}$, des fonctions de $\mathcal{C}_{n-1}$ et un compact $B \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que nous ayons :*

$$M(x_1, ..., x_n) \in C \Leftrightarrow \exists (u_1, ..., u_{n-1}) \in B, \begin{cases} \forall i \in \{1, ..., n-1\}, x_i = a_i(u_1, ..., u_{n-1}) \\ \phi(X) = a_n(u_1, ..., u_{n-1}) \end{cases}$$

Preuve : En remarquant que la dimension de $\Gamma(\phi)$ est égale à $n-1$, nous appliquons le théorème 5.10 à $\Gamma(\phi)$ pour justifier ce résultat. Par ailleurs, les éléments de l'algèbre $\mathcal{C}_{n-1}$ étant identiquement nuls en dehors d'un pavé, nous pouvons supposer que les paramètres appartiennent à un compact B.$\diamond$

5.4 Notre méthode de démonstration

Nous allons démontrer par récurrence sur le nombre de variables le théorème suivant :

Théorème 5.12 *Toute application définissable est un terme par morceaux.*

Preuve : Nous allons commencer par initialiser notre récurrence en démontrant le résultat suivant :

Lemme 5.13 *Soit une fonction définissable ϕ d'une seule variable $x \in \mathbb{R}$ définie sur un ensemble B. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de B tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, la restriction de ϕ à C soit un terme simple.*

Preuve : Nous notons Γ le graphe de ϕ. D'après le corollaire 5.11, nous savons qu'il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de Γ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe deux fonctions $(a_1, a_2) \in (\mathcal{C}_1)^2$ et un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tels que :

$$(x, \phi(x)) \in C \Leftrightarrow \exists u \in I, \begin{cases} x = a_1(u) \\ \phi(x) = a_2(u) \end{cases}$$

Nous considérons le germe $f \in \mathcal{C}_2$ défini par :

$$\forall (x, u) \in B = a_1(I) \times I, \quad f(x, u) = x - a_1(u)$$

D'après le théorème 4.17 de préparation pour les fonctions de l'algèbre, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}_1$ de B par des ensembles S tel que, pour tout $S \in \mathcal{R}_1$, il existe une suite de transformations élémentaires b, un entier $d \in \mathbb{N}$, quatre fonctions a, θ, g et h de $\mathcal{C}_1$ et une unité U_2 tels que, nous ayons :

$$\forall (x, u) \in S, f(x, u) = (u - a \circ b^{-1}(x))^d \theta \circ b^{-1}(x) U \left(b^{-1}(x), \frac{u - a \circ b^{-1}(x)}{h \circ b^{-1}(x)}, \frac{g \circ b^{-1}(x)}{u - a \circ b^{-1}(x)} \right)$$

Nous avons alors :

$$f(x, u) = 0 \Leftrightarrow u = a \circ b^{-1}(x) \text{ ou } \theta \circ b^{-1}(x) = 0$$

Ce qui donne :

$$\forall x \in \pi(S), \phi(x) = a_2(u) = a_2(a \circ b^{-1}(x))$$

Par composition, nous savons que $a_1 \circ a$ est un élément de $\mathcal{C}_1$, et donc $\phi = a_2 \circ a \circ b^{-1}$ est un terme simple.$\diamond$

Notre méthode de résolution est basée sur la résolution d'équations du type $a(u_1, ..., u_p) = x$ avec a un terme. La résolution de ces équations est l'objet du prochain chapitre. Pour ce faire, nous faisons un hypothèse de récurrence : les fonctions définissables de $N - 1$ variables sont des termes simples par morceaux avec N un entier. Dorénavant, le nombre de variables X sera un entier $n \leq N - 1$.

Chapitre 6

Réduction des termes

L'objet de ce chapitre porte sur la résolution des équations définies à l'aide de termes. Pour ce faire, nous commencerons par transformer nos termes afin de revenir au cas des fonctions de l'algèbre. Nous allons procéder en deux étapes. Dans un premier temps, appelé réduction des termes, nous démontrons que, pour chaque terme, il existe un recouvrement cellulaires de $\mathbb{R}^n$ tel que, sur chaque cellule, le terme s'écrit comme la composée d'une fonction de $\mathcal{C}_n$ et d'une suite de transformations élémentaires inverses. Cela permet, dans un second temps, de revenir aux fonctions de l'algèbre en effectuant un changement de variables. Nous montrons ensuite un théorème de fonction implicite pour nos équations.

6.1 Introduction

6.1.1 Description des termes sous forme d'arbre

Les différentes conditions de stabilité de la définition 2.16 nous permettent de construire les termes à partir des termes simples. Ces derniers sont définis comme étant la composée d'une fonction de l'algèbre $\mathcal{C}_n$ avec une transformation élémentaire inverse. A partir de ces définitions, il est possible de voir un terme comme un arbre. Chaque noeud de l'arbre se compose d'une des opérations suivantes : racine p-ième, addition, multiplication, passage au quotient, composition à partir d'une fonction de $\mathcal{C}_n$ et les extrémités des branches sont des fonctions de l'algèbre.
Si nous considérons, par exemple, le terme $g = f(\frac{f_1}{f_2} + f_3, \sqrt[3]{f_4} + f_5)$ avec f, f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 des fonctions de $\mathcal{C}_n$, nous pourrons le représenter par l'arbre suivant :

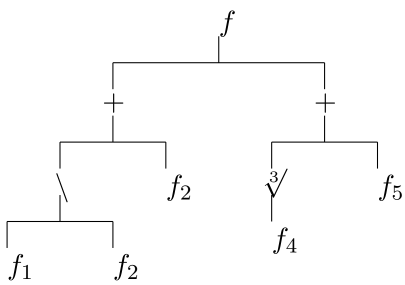

FIGURE 6.1 – Arbre représentant le terme g

En remarquant que par une mise au même dénominateur, le terme peut s'écrire :

$$g = f(\frac{f_1 + f_3 f_2}{f_2}, \sqrt[3]{f_4} + f_5) = f(\frac{f_6}{f_2}, \sqrt[3]{f_4} + f_5)$$

en posant $f_6 = f_1 + f_3 f_2$. L'arbre devient alors :

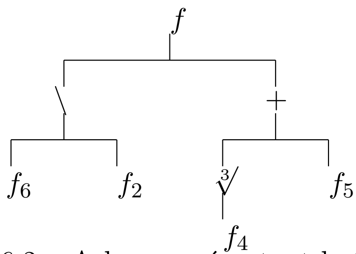

FIGURE 6.2 – Arbre représentant le terme g

Cette remarque est importante pour la suite de notre travail. La mise au même dénominateur nous permettra de faire précéder les noeuds correspondants aux divisions d'un noeud défini par une fonction de $\mathcal{C}_n$. Or les fonctions de l'algèbre sont à support compact. Dans nos raisonnements, nous pourrons donc supposer que les quotients sont nécessairement bornés.

Par ailleurs, les feuilles de nos arbres sont à support compact. Les termes sont donc constants en dehors d'un compact. Comme nous nous intéressons dans ce chapitre à la résolution des équations du type $g(X, y) = 0$, nous pouvons donc supposer que nos variables sont à l'intérieur d'un pavé compact.

6.1.2 Enoncé et stratégie de résolution

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous intéresser à la résolution des équations définies à partir des termes. Le but est de montrer un théorème des fonctions implicites.

Théorème 6.1 *Si g est un terme de $n+1$ variables , alors il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout $S \in \mathcal{R}$, nous avons :*
- *soit l'équation $g(X, y) = 0$ n'admet pas de solution sur S ;*
- *soit il existe un terme h tel que, sur S, nous avons l'équivalence suivante :*

$$g(X, y) = 0 \Leftrightarrow y = h(X)$$

Notre stratégie consiste à transformer l'équation pour revenir à une équation définie à l'aide d'une fonction de l'algèbre, le théorème de préparation nous permettant alors de conclure à l'existence d'une fonction de l'algèbre solution. Le retour aux variables initiales se faisant par des transformations élémentaires inverses, nous en concluerons à l'existence d'un terme solution.

La première étape, appelée réduction du terme, se fera par récurrence sur la hauteur du terme en utilisant des transformations élémentaires respectant la verticalité de la variable y. Comme dans le cas du théorème de préparation, cette condition de verticalité est nécessaire pour exprimer de manière inversible la nouvelle variable verticale à l'aide de la variable initiale. Il s'agit de revenir à des termes dits simples dont nous rappelons la définition.

Définition 6.1 *Soit g un terme de n variables. Le terme est dit* simple *s'il existe un germe $f \in \mathcal{C}_n$ et une famille $(b_i^{-1})_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ de transformations élémentaires inverses tel que $g = f \circ b_1^{-1} \circ \ldots \circ b_p^{-1}$.*
Un terme est dit simple par morceaux *sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$ s'il existe un recouvrement cellulaire $\mathcal{R}$ fini de A tel que, sur chaque cellule $C \in \mathcal{R}$, g soit un terme simple.*

Nous montrons que si nous nous plaçons sur un cylindre défini à l'aide d'une équation, il existe un recouvrement de ce cylindre de sorte que le terme soit un terme simple par morceaux. En affinant notre découpage, nous avons donc réduit notre étude au cas où il existe $f \in \mathcal{C}_n$ et b une suite de transformations élémentaires telle que $g = f \circ b^{-1}$ sur un cellule C. Nous effectuons le changement de variables :

$$\forall X \in C, \overline{X} = b(X)$$

Nous avons alors :

$$g(X) = g \circ b(\overline{X}) = f \circ b^{-1} \circ b(\overline{X}) = f(\overline{X})$$

Le changement de variable $\overline{X} = b(X)$ nous permet donc de réduire notre problème pour revenir à l'étude des fonctions de $\mathcal{C}_n$.

Il faut remarquer que, pour que le changement de variables soit inversible, il est suffisant d'affiner notre recouvrement en découpant la cellule C en deux cellules : $C = \Big(C\backslash \mathrm{Div}(b)\Big) \cup \Big(\mathrm{Div}(b) \cap C\Big)$. Sur la première sous-cellule, il est possible de revenir aux variables initiales. Tandis que, sur la seconde, il faut utiliser une hypothèse de récurrence. Ainsi, l'existence du diviseur nous oblige à raisonner par récurrence sur le nombre de variables.

6.2 Etude des fonctions de $\mathcal{C}_{n,r}$

Soit $r \in]0; +\infty[^n$ un polyrayon, nous allons étudier les fonctions $f \in \mathcal{C}_{n,r}$. Nous démontrons deux résultats qui seront utiles pour la suite. Dans un premier temps, nous allons résoudre une équation du type $f(X, y) = 0$. Dans un second temps, nous montrons que tout terme est simple par morceaux sur $\mathbb{R}^n$. Cela nous permet de supposer que, quitte à affiner notre recouvrement, les termes sont simples.

6.2.1 Résolution des équations dans $\mathcal{C}_{n+1}$

Nous démontrons notre théorème dans le cas particuliers des fonctions de $\mathcal{C}_{n+1}$.

Proposition 6.2 *Soit f est un fonction de $\mathcal{C}_{n+1,r}$. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de I_r tel que, pour tout $S \in \mathcal{R}$, nous avons :*
- *soit l'équation $f(X, y) = 0$ n'admet pas de solution sur S ;*
- *soit il existe un terme a tel que, sur S, nous avons l'équivalence suivante :*

$$f(X, y) = 0 \Leftrightarrow y = a(X)$$

Preuve : D'après le théorème de préparation géométrique 4.17, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de I_r tel que, pour tout $S \in \mathcal{R}$, il existe une suite b de transformations élémentaires, un entier $d \in \mathbb{N}$, quatre fonctions a, g, h et θ et une unité U tels que :
- Soit nous avons :

$$\forall (X, y) \in S, \quad f(X, y) = (y - a \circ b^{-1}(X))^d \theta \circ b^{-1}(X) U(b^{-1}(X), \frac{y - a \circ b^{-1}(X)}{h \circ b^{-1}(X)})$$

- Soit nous avons :

$$\forall (X, y) \in S, \quad f(X, y) = (y - a \circ b^{-1}(X))^d \theta \circ b^{-1}(X) U\left(b^{-1}, \frac{y - a \circ b^{-1}(X)}{h \circ b^{-1}(X)}, \frac{g(X)}{y - a \circ b^{-1}(X)}\right)$$

Et, dans ce cas, le graphe de a est disjoint de S.

Dans le second cas, l'équation $f(X, y) = 0$ n'admet pas de solution selon la variable y dans S. Nous nous plaçons donc dans le premier cas. Il faut de nouveau distinguer les cas selon que le graphe de a est disjoint ou non de S. S'il est disjoint, l'équation n'admet pas de solution sur la cellule.

Dans le cas où le graphe de a intersecte S, nous avons :

$$f(X, y) = 0 \Leftrightarrow y = a \circ b^{-1}(X). \diamond$$

6.3 Réduction des termes

Nous allons montrer que tout terme est simple par morceaux par une récurrence sur la hauteur des termes. C'est pourquoi nous commencerons par justifier la réduction des termes de hauteur 1.

Il convient de remarquer que dans cette partie, nous ne nous soucions pas de la verticalité d'une des variables. Toutes les transformations élémentaires sont donc permises.

6.3.1 Réduction d'un terme ultra-simple

Nous donnons la définition suivante :

Définition 6.2 *Un terme g défini sur un ensemble C est dit* ultra-simple *sur D si nous avons l'un des cas suivants :*

1. *Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_n$ et $s \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall X \in C, \quad g(X) = (f(X))^{\frac{1}{s}}$;*
2. *Il existe deux fonctions $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}_n^2$ tel que : $\forall X \in C, \quad g(X) = D\Big(f_1(X), f_2(X)\Big) = \frac{f_1(X)}{f_2(X)}$*

Soit g un terme. Par définition de la hauteur d'un terme, g est un terme de hauteur 1 si et seulement s'il existe une famille $(g_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ de termes ultra-simples etune fonction $f \in \mathcal{C}_p$ telles que nous avons :

$$g = f(g_1, \dots, g_p)$$

Dans un premier temps, nous allons justifier la réduction des termes ultra-simples. Puis, nous démontrons un théorème de réduction simultanée. Cela nous permettra de conclure à la réduction des termes de hauteur 1.

Lemme 6.3 *Soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}_{n,r}$ avec $r \in]0; +\infty[^n$ un polyrayon. Nous définissons le terme g par :*

$$\forall X \in I_r, \quad g(X) = D(f_1(X), f_2(X)) = \frac{f_1(X)}{f_2(X)}$$

Si g est bornée sur I_r, alors il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de I_r tel que, pour tout cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe un suite de transformations élémentaires et f une fonction de $\mathcal{C}_n$ définie sur $b(C)$ telles que :

$$\forall X \in C, \quad g(X) = f \circ b^{-1}(X)$$

Preuve : D'après le théorème 3.15, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b, deux monômes m_1 et m_2 et deux unités U_1 et U_2 de $\mathcal{C}_n$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall X \in C, \quad g(X) &= \frac{f_1(X)}{f_2(X)} \\ &= \frac{m_1 \circ b^{-1}(X) U_1 \circ b^{-1}(X)}{m_2 \circ b^{-1}(X) U_2 \circ b^{-1}(X)} \\ &= \frac{m_1 \circ b^{-1}(X)}{m_2 \circ b^{-1}(X)} U_1 \circ b^{-1}(X) (U_2 \circ b^{-1}(X))^{-1} \end{aligned}$$

De plus, les monômes sont ordonnés pour la division. Nous savons donc que l'un d'entre eux divise l'autre. Or, g est bornée sur I_r, nous en déduisons que m_2 divise m_1. Il existe donc un monôme p tel que :

$$\forall X \in C, \quad g(X) = p \circ b^{-1}(X) U_1 \circ b^{-1}(X) (U_2 \circ b^{-1}(X))^{-1}$$

Nous définissons la fonction f par :

$$\forall X \in b(C), \quad f(X) = p(X)U_1(X)(U_2(X))^{-1}$$

D'après la proposition 2.12, nous savons que f est une fonction de $\mathcal{C}_n$. Nous avons :

$$\forall X \in C, \quad g(X) = f \circ b^{-1}$$

g est un terme simple sur chaque cellule.$\diamond$

Lemme 6.4 *Soient $s \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}_{n,r}$ avec $r \in]0; +\infty[^n$ un polyrayon. Nous considérons la fonction g définie sur un ensemble D par :*

$$\forall X \in D, \quad g(X) = (f(X))^{\frac{1}{s}}$$

Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de D tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{D}$, il existe une suite de transformations élémentaires b, une fonction f définie sur $b(D)$ telles que :

$$\forall X \in C, \quad g(X) = f \circ b^{-1}(X)$$

Preuve : En utilisant le théorème 3.14, nous normalisons la fonction f. Il existe donc un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de D tel que, pour tout cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b, un monôme m et une unité U dans $\mathcal{C}_n$ avec :

$$\forall X \in C, \quad g(X) = (f \circ b^{-1}(X))^{\frac{1}{s}} = \left(m \circ b^{-1}(X) \times U \circ b^{-1}(X) \right)^{\frac{1}{s}}$$

Nous notons $S = b^{-1}(C)$ et nous définissons la fonction g_1 par :

$$\forall X \in S, \quad g_1(X) = g \circ b(X)$$

Nous avons alors :

$$\forall X \in S, \quad g_1(X) = \left(m(X)U(X) \right)^{\frac{1}{s}}$$

Nous définissons les ensembles :

$$\Sigma = \{\sigma; \sigma \in \{-1, 0, 1\}^n\} \text{ et } B_{\sigma,r} = \left\{ X \in I_r; \forall i \in \{1, ..., n\}, \operatorname{sgn}(x_i) = \sigma_i \right\}$$

Un élément de Σ est appelé une condition de signe. Nous effectuons le découpage cellulaire :

$$S = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} (S \cap B_{\sigma,r}) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma$$

Soit $\sigma \in \Sigma$. Nous considérons la suite de transformations élémentaires $r = \prod_{i=1}^n r_i^{\sigma_i, s}$. Nous remarquons que r admet une application réciproque $r^{-1} = \prod_{i=1}^n r_i^{\sigma_i, \frac{1}{s}}$ et nous notons $S_1 = r^{-1}(S_\sigma)$. Nous définissons la fonction g_2 par :

$$\forall X \in S_1, \quad g_2(X) = g_1(x_1^s, ..., x_n^s)$$

Nous avons alors :

$$\forall X \in S_1, \quad g_2(X) = m(X) \left(U(x_1^s, ..., x_n^s) \right)^{\frac{1}{s}}$$

Nous définissons la fonction V par :

$$\forall X \in S_1, \quad V(X) = \left(U(x_1^s, ..., x_n^s) \right)^{\frac{1}{s}}$$

Comme U est une unité sur S, la fonction $(x_1, ..., x_n) \mapsto U(x_1^s, ..., x_n^s)$ est une unité sur S_1. D'après la proposition 2.11, nous en déduisons que V est une unité.
Nous remarquons alors :

$$\begin{aligned}
D &= \bigcup_{C \in \mathcal{R}} C \\
&= \bigcup_{C \in \mathcal{R}} b(S) \\
&= \bigcup_{C \in \mathcal{R}} b(S) \\
&= \bigcup_{C \in \mathcal{R}} b\Big(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma \Big) \\
&= \bigcup_{C \in \mathcal{R}} \bigcup_{\sigma \in \Sigma} b \circ r(S_1)
\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu un recouvrement cellulaire fini de D. De plus, nous avons :

$$\forall X \in D, \exists \overline{X} \in S_1, X = b \circ r(\overline{X})$$

Nous notons $b' = b \circ r$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
g(X) &= g \circ b' \circ (b')^{-1}(X) \\
&= g \circ b'(\overline{X}) \\
&= g_2(\overline{X}) \\
&= m(\overline{X})V(\overline{X})
\end{aligned}$$

Nous définissons la fonction f par :

$$\forall X \in b'(S_1), \quad f(X) = m(X)V(X)$$

Nous obtenons :

$$\forall X \in S_1, \quad g(X) = f \circ (b')^{-1}(X)$$

La restriction du terme sur une cellule est donc un terme simple.$\diamond$

6.3.2 Réduction simultanée des termes ultra-simples

Proposition 6.5 *Soit $(g_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ une famille de termes ultra-simples définis et bornés sur un ensemble D. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de D tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b et une famille de fonctions $(f_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ de $\mathcal{C}_n$ définies sur C telles que :*

$$\forall X \in C, \quad g_i(X) = f_i \circ b^{-1}(X)$$

Preuve : On montre cette propriété par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : pour $p = 1$, nous considérons un terme g ultra-simple. Nous pouvons conclure en utilisant les lemmes 6.3 et 6.4. La propriété est donc vraie au rang 1.

Hérédité : Nous supposons que la propriété est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Nous considérons alors $g_1, ..., g_{p+1}$ des termes ultra-simples en n variables définis sur un ensemble D. D'après l'hypothèse de récurrence, nous savons qu'il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de D tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b et $f_1, ..., f_p \in \mathcal{C}_n$ des fonctions telles que :

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, \forall X \in C, g_i(X) = f_i \circ b^{-1}$$

Nous définissons la fonction h par :

$$\forall X \in S = b^{-1}(C), \quad h(X) = g_{p+1} \circ b(X)$$

Or b est une suite de transformations élémentaires, donc h est un terme ultra-simple. Il existe donc un recouvrement fini $\mathcal{S}$ de S tel que, pour toute cellule $C_1 \in \mathcal{S}$, il existe une fonction $f_{p+1} \in \mathcal{C}_n$ et une suite de transformations élémentaires b_1 telles que :

$$\forall X \in C_1, \quad h(X) = f_{p+1} \circ b_1^{-1}(X)$$

Nous avons alors :

$$D = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} C = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} b(S) = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} b\Bigg(\bigcup_{C_1 \in \mathcal{S}} C_1 \Bigg) = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} \bigcup_{C_1 \in \mathcal{S}} b(C_1)$$

Nous avons réalisé un recouvrement fini de D. Nous avons :

$$\forall X \in C, \exists \overline{X} \in C_1, X = b(\overline{X})$$

Nous notons $b' = b \circ b_1$. Il s'agit d'une suite de transformations élémentaires. Nous avons alors :

$$\forall X \in D, \quad g_{p+1}(X) = g_{p+1} \circ b(\overline{X}) = f_{p+1} \circ b_1^{-1}(\overline{X}) = f_{p+1} \circ (b')^{-1}(X)$$

Par ailleurs, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, nous avons :

$$\forall X \in D, g_i(X) = g_i \circ b(\overline{X}) = f_i(\overline{X}) = f_i \circ b^{-1}(X) = f_i \circ b_1 \circ b_1^{-1} \circ b^{-1}(X) = f_i \circ b_1 \circ (b')^{-1}(X)$$

Nous notons $f_{i,1} = f \circ b_1$. Nous remarquons que $f_{i,1}$ est un élément de $\mathcal{C}_n$. Nous avons donc obtenu un recouvrement de D tel que, sur chaque cellule, les termes de la famille sont de la forme voulue. La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.$\diamond$

6.3.3 Réduction d'un terme

Proposition 6.6 *Soit g un terme défini sur $\mathbb{R}^n$. Il existe un recouvrement cellulaire fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, sur chaque cellule $C \in \mathcal{R}$, g est un terme simple. Autrement dit, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_{n,r}$ et b une suite de transformations élémentaires telles que :*

$$\forall X \in C, \quad g(X) = f \circ b^{-1}(X)$$

Preuve : Nous effectuons une récurrence sur la hauteur h des termes.

Initialisation : Soit g est un terme de hauteur nulle. Par définition, il s'agit donc d'une fonction $\mathcal{C}_n$. Le résultat est donc vrai au rang 0.

Hérédité : nous supposons que tout terme de hauteur h est simple par morceaux. Nous considérons un terme g de hauteur $h+1$. Par définition de la hauteur d'un terme, il existe g' un terme de hauteur h et une famille $(g_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ de termes ultra-simples tels que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad g(X) = g'(g_1(X), ..., g_p(X))$$

Nous appliquons la proposition 6.5 à la famille $(g_i)_{i \in \{1,...,p\}}$. Il existe un recouvrement cellulaire fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe b une suite de transformations élémentaires et une famille $(f_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ de $\mathcal{C}_n$ telles que :

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, \forall X \in C, \quad g_i(X) = f_i \circ b^{-1}(X)$$

Nous notons $S = b^{-1}(C)$ et nous définissons le terme $\overline{g}$ par :

$$\forall X \in S, \quad \overline{g}(X) = g \circ b(X) = g'(f_1(X), ..., f_p(X))$$

Le terme $\overline{g}$ est de hauteur au plus h. Nous lui appliquons l'hypothèse de récurrence. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{S}$ de S tel que, pour toute cellule $C_1 \in \mathcal{S}$, il existe une suite de transformations élémentaires b_1 et une fonction f_1 de $\mathcal{C}_n$ telles que :

$$\forall X \in C_1, \quad \overline{g}(X) = f_1 \circ b_1^{-1}(X)$$

Nous avons alors :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} C = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} b(S) = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} \bigcup_{C_1 \in \mathcal{S}} b(C_1)$$

Nous avons construit un recouvrement fini de $\mathbb{R}^n$. De plus, nous avons :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \exists C \in \mathcal{R}, \exists C_1 \in \mathcal{S}, \exists \overline{X} \in C_1, X = b(\overline{X})$$

Nous obtenons alors :

$$g(X) = g \circ b(\overline{X}) = \overline{g}(\overline{X}) = f_1 \circ b_1^{-1}(\overline{X}) = f_1 \circ b_1^{-1} \circ b^{-1}(X)$$

Le terme est donc simple par morceaux. La propriété est vraie au rang $h+1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tous les termes de n variables.$\diamond$

Remarque 1: Les opérations que nous effectuons consistent à réaliser un changement de variables. Si nous considérons le terme défini par :

$$g(x_1, x_2) = \sqrt[2]{x_1}\sqrt[3]{x_2} f(x_1, x_2)$$

Nous notons $\overline{x}_1 = \sqrt[2]{x_1}$ et $\overline{x}_2 = \sqrt[3]{x_2}$ ce qui donne :

$$g(x_1, x_2) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 f(\overline{x}_1^2, \overline{x}_2^3)$$

6.3.4 Réduction simultanée d'une famille de termes

Nous obtenons la réduction d'une famille de termes :

Théorème 6.7 *Soit $(g_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ une famille de termes définis sur un ensemble D. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de D tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b et une famille de fonctions $(f_i)_{i \in \{1,...,p\}}$ de $\mathcal{C}_n$ définies sur C telles que :*

$$\forall X \in C, \quad g_i(X) = f_i \circ b^{-1}(X)$$

Preuve : La preuve de la proposition 6.5 peut être reproduite ici sans modification.$\diamond$

6.4 Equivalence avec un monôme à proximité d'une racine

Pour résoudre les équations définies à l'aide des termes, nous allons réduire ces équations en revenant aux fonctions de l'algèbre. Or, dans nos termes, des quotients du type $\frac{x}{y}$ ou des racines sont apparus. Pour les faire disparaître, nous allons justifier qu'à proximité de la racine, la variable y est proche d'un monôme des autres variables, en fait de la partie principale de la solution. Nous utiliserons le théorème de préparation de Speisseger-Van den Dries [15].

6.4.1 Théorème de Speisseger-Van den Dries

Nous rappelons le théorème de préparation des fonctions définissables dans une structure o-minimale polynomialement bornée dû à P. Speisseger et L. Van den Dries :
Théorème : *Soient $\mathcal{S}$ une structure o-minimale polynomialement bornée et $f_1, ..., f_l : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ des éléments de $\mathcal{S}$. Alors il existe un recouvrement fini $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par des ensembles appartenant à $\mathcal{S}$, et pour chaque $C \in \mathcal{C}$, il existe des exposants $\lambda_1, ..., \lambda_l \in \Lambda$ et des fonctions θ, $a_1, ..., a_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $U_1, ..., U_l : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, toutes dans $\mathcal{S}$, tels que le graphe de θ est disjoint de S et, pour tout $i = 1, ..., l$ et pour tout $(X, y) \in C$, nous ayons :*

$$f_i(X, y) = |y - \theta(X)|^{\lambda_i} a_i(X) U_i(X, y) \text{ et } |U_i(X, y) - 1| \leq \frac{1}{2}$$

Preuve : La preuve se trouve dans l'article [15]. Par ailleurs, il faut remarquer que les inégalités $|U_i(X, y) - 1| \leq \frac{1}{2}$ signifient que les fonctions $U_1, ..., U_l$ sont des unités.$\diamond$

Λ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, appelé le corps des exposants de la structure. Il s'agit de l'ensemble des réels λ tels que la fonction $x \mapsto x^\lambda$ est définissable. Or, d'après le théorème 5-4 de l'article [32], nous savons que $\Lambda = \mathbb{Q}$. Nous pouvons donc préciser le théorème précédent pour obtenir :

Théorème 6.8 *Soient $\mathcal{S}$ une structure o-minimale polynomialement bornée et $f_1, ..., f_l : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ des éléments de $\mathcal{S}$. Alors il existe un recouvrement fini $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par des ensembles appartenant à $\mathcal{S}$, et pour chaque $C \in \mathcal{C}$, il existe des exposants $\lambda_1, ..., \lambda_l \in \mathbb{Q}$ et des fonctions θ, $a_1, ..., a_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $U_1, ..., U_l : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, toutes dans $\mathcal{S}$, tels que le graphe de θ est disjoint de S et, pour tout $i = 1, ..., l$ et pour tout $(X, y) \in C$, nous ayons :*

$$f_i(X, y) = |y - \theta(X)|^{\lambda_i} a_i(X) U_i(X, y) \text{ et } |U_i(X, y) - 1| \leq \frac{1}{2}$$

6.4.2 Monomialisation des fonctions définissables bornées

Lemme 6.9 *Soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}_{n,r}^2$ avec $r \in]0, +\infty[^n$ un polyrayon. Nous définissons la fonction ϕ par :*

$$\forall X \in I_r, \quad \phi(X) = D\Big(f_1(X), f_2(X)\Big) = \frac{f_1(X)}{f_2(X)}$$

Si la fonction ϕ est bornée sur I_r, alors il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de I_r tel que, pour tout $C \in \mathcal{R}$, il existe b une suite de transformations élémentaires, un monôme p et une unité U tels que :

$$\forall X \in C, \quad \phi(X) = p \circ b^{-1}(X) U \circ b^{-1}(X)$$

Preuve : Nous considérons ϕ une fonction de n variables telle qu'il existe $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}_{n,r}$ avec :

$$\forall X \in I_r, \quad \phi(X) = \frac{f_1(X)}{f_2(X)}$$

D'après le théorème de normalisation simultanée 3.15, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de I_r tel que, pour tout $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b, deux monômes m_1 et m_2 ordonnés pour la division et deux unités U_1 et U_2 tels que :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \forall X \in C, \quad f_i(X) = m_i \circ b^{-1}(X) U_i \circ b^{-1}(X)$$

Comme les monômes sont ordonnés pour la division et que ϕ est bornée sur C, nous en déduisons qu'il existe un monôme p tel que : $bm_1 = pbm_2$.
Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \forall X \in C, \quad \phi(X) &= \frac{m_1 \circ b^{-1}(X) U_1 \circ b^{-1}(X)}{m_1 \circ b^{-1}(X) U_1 \circ b^{-1}(X)} \\ &= p \circ b^{-1}(X) U_1 \circ b^{-1}(X) U_2^{-1} \circ b^{-1}(X) \end{aligned}$$

Nous définissons les fonction $V = U_1 U_2^{-1}$. D'après la proposition 2.12, V est une unité de $\mathcal{C}_n$. Nous avons :

$$\forall X \in C, \quad \phi(X) = p \circ b^{-1}(X) V \circ b^{-1}(X)$$

Sur chaque cellule, la fonction ϕ est un terme simple de la forme annoncée.$\diamond$

Ce lemme nous sert à démontrer la proposition suivante :

Proposition 6.10 *Soit ϕ une fonction définissable de $\mathbb{R}^n$ avec $\phi \prec 1$. Alors il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, sur chaque cellule C de $\mathcal{R}$, il existe p un monôme, b une suite de transformations élémentaires et U une unité tels que :*

$$\forall X \in C, \quad \phi(X) = p \circ b^{-1}(X) U \circ b^{-1}(X)$$

Preuve : Nous effectuons une récurrence sur le nombre n de variables.

Initialisation : Nous considérons une fonction ϕ d'une seule variable. Dans le lemme 5.13, nous avons montré qu'il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}$ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b et une fonction $f \in \mathcal{C}_1$ telles que :

$$\forall x \in C, \quad \phi(x) = f \circ b^{-1}(x)$$

D'après la proposition 3.1, il existe un réel $r \in]0; +\infty[$, un entier $p \in \mathbb{N}$ et une unité U dans $\mathcal{C}_1$ tels que :

$$\forall x \in]-r; r[, \quad f(x) = x^p U(x)$$

Nous avons donc :

$$\forall x \in C, \quad \phi(x) = (b^{-1}(X))^p U \circ b^{-1}(X)$$

Cela signifie que la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Nous supposons que la proposition est vraie pour toute fonction définissable définie sur $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit ϕ une fonction définissable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Speisseger-Van den Dries, il existe un recouvrement $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout C de $\mathcal{R}$, il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$, deux fonctions définissables a et θ de $\mathbb{R}^{n-1}$ et une unité U définissable dans $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$\forall X \in C, \quad \phi(X) = (x_n - \theta(X'))^\lambda a(X') U(X)$$

Nous considérons la fonction ψ définie sur $S = t_{-a}^{x_n}(C)$ par :

$$\forall X \in S, \quad \psi(X) = \phi(X', x_n + \theta(X'))$$

Nous avons alors :

$$\forall X \in S, \quad \psi(X) = x_n^\lambda a(X') U(X', x_n + \theta(X'))$$

Nous définissons la fonction U_1 par :

$$\forall X \in S, \quad U_1(X) = U(X', x_n + \theta(X'))$$

Il s'agit d'une unité.
Par ailleurs, d'après l'hypothése liée au théorème 5.12, comme la fonction a admet au plus $n-1 \leq N-1$ variables, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}_1$ de S tel que, pour toute cellule $C_1 \in \mathcal{R}_1$, il existe une suite de transformations élémentaires b_1, une fonction $a_1 \in \mathcal{C}_{n-1}$ telles que :

$$\forall X' \in C, \quad a(X') = a_1 \circ b_1^{-1}(X')$$

Nous notons $S_1 = b_1^{-1}(C_1)$ et nous définissons la fonction ϕ_1 par :

$$\forall X \in S_1, \quad \phi_1(X) = \psi \circ b_1(X) = x_n^\lambda a_1(X')V(X)$$

Avec $V(X) = U_1 \circ b_1(X)$, nous remarquons que V est une unité.
Nous notons $\lambda = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Nous affinons notre découpage cellulaire en considérant les cellules suivantes :

$$\begin{array}{l} S_1^+ = \{X \in S; x_n > 0\} \\ S_1^- = \{X \in S; x_n < 0\} \\ S_1^0 = \{X \in S; x_n = 0\} \end{array}$$

Nous distinguons donc les cas :

- Sur S_1^0, la fonction ϕ est une fonction de $n-1$ variables, nous pouvons conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence. Il existe donc un recouvrement fini, noté $\mathcal{R}_3^=$ de S_1^0 tel que, pour toute cellule $C_3^= \in \mathcal{R}_3^=$, il existe une suite de transformations élémentaires b_3, un monôme p et une unité U_3 tels que :

$$\forall X \in C_3^=, \quad \phi_1(X) = p \circ b_3^{-1}(X)U_3^{-1}(X)$$

- Sur S_1^+, nous définissons la fonction ϕ_2 par :

$$\forall X \in S_2 = r_n^{+,\frac{1}{q}}(S_1^+), \quad \phi_2(X) = \phi_1 \circ r_n^{+,q}(X) = x_n^p a_1(X')V \circ r_n^{+,q}(X)$$

Selon le signe de p, nous distinguons les cas :
– Soit p est positif. Nous définissons les fonctions suivantes :

$$\forall X \in r_n^{+,\frac{1}{q}}(S^+), \quad f_1(X) = x_n^p a_1(X') \text{ et } f_2(X) = 1$$

Comme ce sont des fonctions de $\mathcal{C}_n$, nous pouvons appliquer le lemme 6.9. Il existe donc un recouvrement $\mathcal{R}_2$ fini de $r_n^{+,\frac{1}{q}}(S^+)$ tel que, pour tout $C_2 \in \mathcal{R}_2$, il existe p un monôme, b_2 une suite de transformations élémentaires et U_2 une unité tels que :

$$\forall X \in C_2, \quad f_1(X) = p \circ b_2^{-1}(\overline{X})U_2 \circ b_2^{-1}(\overline{X})$$

Nous en déduisons que :

$$\forall X \in C_2, \quad \phi_2(X) = p \circ b_2^{-1}(X)U_2 \circ b_2^{-1}(X)V \circ r_n^{+,q}(X)$$

Nous avons alors :

$$S_1^+ = r_n^{+,q}\left(r_n^{+,\frac{1}{q}}(S_1^+)\right) = r_n^{+,q}\left(\bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} C_2\right) = \bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} r_n^{+,q}(C_2)$$

Donc, il existe un recouvrement fini de S_1^+. Nous en déduisons que, pour tout $X \in S_1^+$, il existe $C_2 \in \mathcal{R}_2$ et $\overline{X} \in C_2$ tels que :

$$X = r_n^{+,q}(\overline{X}) \Leftrightarrow \overline{X} = (r_n^{+,q})^{-1}(X)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \phi_1(X) &= \phi_1 \circ r_n^{+,q}(r_n^{+,\frac{1}{q}}(X)) \\ &= \phi_2(\overline{X}) \\ &= p \circ b_2^{-1}(\overline{X})U_2 \circ b_2^{-1}(\overline{X})V \circ r_n^{+,q}(\overline{X}) \\ &= p \circ b_2^{-1} \circ r_n^{+,\frac{1}{q}}(X)U_2 \circ b_2^{-1} \circ r_n^{+,\frac{1}{q}}(X)V(X) \end{aligned}$$

Nous définissons la fonction U_3 par :

$$\forall X \in S_1^+, \quad U_3(X) = U_2(X)V \circ r_n^{+,q} \circ b_2(X)$$

Il s'agit d'une unité. Si nous notons $b_3 = r_n^{+,q} \circ b$, il s'agit d'une suite de transformations élḿeentaires et nous avons :

$$\phi_1(X) = p \circ b_3^{-1}(X)U_3 \circ b_3^{-1}(X)$$

– Soit p est négatif. Nous définissons les fonctions suivantes : :

$$\forall X \in r_n^{+,\frac{1}{q}}(S_1^+), \quad f_1(X) = a_1(X') \text{ et } f_2(X) = x_n^{-p}$$

Il s'agit de deux fonctions de $\mathcal{C}_n$, nous pouvons appliquer le lemme 6.9. Il existe donc un recouvrement $\mathcal{R}_2$ fini de $r_n^{+,\frac{1}{q}}(S_1^+)$ tel que, pour tout $C_2 \in \mathcal{R}_2$, il existe p un monôme, b_2 une suite de transformations élémentaires et U_2 une unité tels que :

$$\forall X \in C_2, \quad \phi_2(X) = p \circ b_2^{-1}(X)U_2 \circ b_2^{-1}(X)V \circ r_n^{+q}(X)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$S_1^+ = r_n^{+,q}\left(r_n^{+,\frac{1}{q}}(S_1^+)\right) = r_n^{+,q}\left(\bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} C_2\right) = \bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} r_n^{+,q}(C_2)$$

Nous avons donc construit un recouvrement fini de S_1^+. Nous en déduisons que, pour tout $X \in S_1^+$, il existe $C_2 \in \mathcal{R}_2$ et $\overline{X} \in C_2$ tels que :

$$X = r_n^{+,q}(\overline{X}) \Leftrightarrow \overline{X} = (r_n^{+,q})^{-1}(X)$$

Nous avons alors :

$$\phi_1(X) = p \circ b_2^{-1} \circ r_n^{+,\frac{1}{q}}(X)U_2 \circ b_2^{-1} \circ r_n^{+,\frac{1}{q}}(X)V(X)$$

Nous définissons la fonction U_3 par :

$$\forall X \in S_1^+, \quad U_3(X) = U_2(X)V \circ r_n^{+,q} \circ b_2(X)$$

Il s'agit d'une unité. Si nous notons $b_3 = r_n^{+,q} \circ b$, il s'agit d'une suite de transformations élémentaires et nous avons :

$$\phi_1(X) = p \circ b_3^{-1}(X)U_3 \circ b_3^{-1}(X)$$

Dans tous les cas, nous avons construit un recouvrement fini, noté $\mathcal{R}_3^+$, de S_1^+ tel que, pour toute cellule $C_3^+ \in \mathcal{R}_3^+$, il existe b_3 une suite de transformations élémentaires, p un monôme et U_3 une unité tels que :

$$\forall X \in C_3^+, \quad \phi_1(X) = p \circ b_3^{-1}(X)U_3 \circ b_3^{-1}(X)$$

- Sur S_1^-, nous définissons la fonction ϕ_2 par :

$$\forall X \in r_n^{-,\frac{1}{q}}(S_1^-), \quad \phi_2(X) = \phi_1 \circ r_n^{-,q}(X) = x_n^p a_1(X')V \circ r_n^{-,q}(X)$$

Selon le signe de p, nous avons :

– Soit p est positif. Nous définissons les fonctions suivantes :

$$\forall X \in r_n^{-,\frac{1}{q}}(S_1^+), \quad f_1(X) = x_n^p a_1(X') \text{ et } f_2(X) = 1$$

Ces sont des éléments de $\mathcal{C}_n$. Nous pouvons appliquer le lemme 6.9. Il existe donc un recouvrement $\mathcal{R}_2$ fini de $r_n^{-,\frac{1}{q}}(S_1^-)$ tel que, pour tout $C_2 \in \mathcal{R}_2$, il existe p un monôme, b_2 une suite de transformations élémentaires et U_2 une unité tels que :

$$\forall X \in C_2, \quad \phi_2(X) = p \circ b_2^{-1}(X) U_2 \circ b_2^{-1}(X) V \circ r_n^{-,q}(X)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$S_1^- = r_n^{-,q}\left(r_n^{-,\frac{1}{q}}(S_1^-)\right) = r_n^{-,q}\left(\bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} C_2\right) = \bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} r_n^{-,q}(C_2)$$

Nous avons donc construit un recouvrement fini de S_1^-. Pour tout $X \in S_1^-$, il existe donc $C_2 \in \mathcal{R}_2$ et $\overline{X} \in C_2$ tel que :

$$X = r_n^{-,q}(\overline{X}) \Leftrightarrow \overline{X} = (r_n^{-,q})^{-1}(X)$$

Nous avons alors :

$$\phi_1(X) = p \circ b_2^{-1} \circ r_n^{-,\frac{1}{q}}(X) U_2 \circ b_2^{-1} \circ r_n^{-,\frac{1}{q}}(X) V(X)$$

Nous définissons la fonction U_3 par :

$$\forall X \in S_1^+, \quad U_3(X) = U_2(X) V \circ r_n^{-,q} \circ b_2(X)$$

Il s'agit d'une unité. Si nous notons $b_3 = r_n^{+,q} \circ b$, il s'agit d'une suite de transformations élḿeentaires et nous avons :

$$\phi_1(X) = p \circ b_3^{-1}(X) U_3 \circ b_3^{-1}(X)$$

– Soit p est négatif, Nous définissons les fonctions suivantes :

$$\forall X \in r_n^{-,\frac{1}{q}}(S_1^+), \quad f_1(X) = a_1(X') \text{ et } f_2(X) = x_n^{-p}$$

Ces sont des éléments de $\mathcal{C}_n$. Nous pouvons appliquer le lemme 6.9. Il existe donc un recouvrement $\mathcal{R}_2$ fini de $r_n^{-,\frac{1}{q}}(S_1^-)$ tel que, pour tout $C_2 \in \mathcal{R}_2$, il existe p un monôme, b_2 une suite de transformations élémentaires et U_2 une unité tels que :

$$\forall X \in C_2, \quad \phi_2(X) = p \circ b_2^{-1}(X) U_2 \circ b_2^{-1}(X) V \circ r_n^{-,q}(X)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$S_1^- = r_n^{-,q}\left(r_n^{-,\frac{1}{q}}(S_1^-)\right) = r_n^{-,q}\left(\bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} C_2\right) = \bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} r_n^{-,q}(C_2)$$

Nous avons donc construit un recouvrement fini de S_1^-. Pour tout $X \in S_1^-$, il existe donc $C_2 \in \mathcal{R}_2$ et $\overline{X} \in C_2$ tel que :

$$X = r_n^{-,q}(\overline{X}) \Leftrightarrow \overline{X} = (r_n^{-,q})^{-1}(X)$$

Nous avons alors :

$$\phi_1(X) = p \circ b_2^{-1} \circ r_n^{-,\frac{1}{q}}(X) U_2 \circ b_2^{-1} \circ r_n^{-,\frac{1}{q}}(X) V(X)$$

Nous définissons la fonction U_3 par :

$$\forall X \in S_1^+, \quad U_3(X) = U_2(X)V \circ r_n^{-,q} \circ b_2(X)$$

Il s'agit d'une unité. Si nous notons $b_3 = r_n^{+,q} \circ b$, il s'agit d'une suite de transformations élémentaires et nous avons :

$$\phi_1(X) = p \circ b_3^{-1}(X)U_3 \circ b_3^{-1}(X)$$

Dans les deux cas, nous avons construit un recouvrement fini, noté $\mathcal{R}_3^-$, de S_1^- tel que, pour toute cellule $C_3^- \in \mathcal{R}_3^-$, il existe b_3 une suite de transformations élémentaires, p un monôme et U_3 une unité tels que :

$$\forall X \in C_3^-, \quad \phi_1(X) = p \circ b_3^{-1}(X)U_3 \circ b_3^{-1}(X)$$

A l'aide des différents recouvrements, nous allons construire un recouvrement de $\mathbb{R}^n$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n &= \bigcup_{C\in\mathcal{R}} C \\
&= \bigcup_{C\in\mathcal{R}} t_a^{x_n}\Big(t_{-a}^{x_n}(C)\Big) \\
&= \bigcup_{C\in\mathcal{R}} t_a^{x_n}(S) \\
&= \bigcup_{C\in\mathcal{R}} t_a^{x_n}\Big(b_1(b_1^{-1}(S))\Big) \\
&= \bigcup_{C\in\mathcal{R}} t_a^{x_n}\Big(b_1(S_1)\Big) \\
&= \bigcup_{C\in\mathcal{R}} t_a^{x_n}\Big(b_1(S_1^+ \cup S_1^= \cup S_1^-)\Big) \\
&= \bigcup_{C\in\mathcal{R}} t_a^{x_n}\Big(b_1\Big(\bigcup_{C_3^+\in\mathcal{R}_3^+} C_3^+ \cup \bigcup_{C_3^=\in\mathcal{R}_3^=} C_3^= \cup \bigcup_{C_3^-\in\mathcal{R}_3^-} C_3^-\Big)\Big) \\
&= \bigcup_{C\in\mathcal{R}} \Big(\bigcup_{C_3^+\in\mathcal{R}_3^+} t_a^{x_n} \circ b_1(C_3^+) \bigcup \bigcup_{C_3^=\in\mathcal{R}_3^=} t_a^{x_n} \circ b_1(C_3^=) \bigcup \bigcup_{C_3^-\in\mathcal{R}_3^-} t_a^{x_n} \circ b_1(C_3^-)\Big)
\end{aligned}$$

Nous notons $\mathcal{Q}$ ce recouvrement.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Il existe donc $C \in \mathcal{R}_3^+ \cup \mathcal{R}_3^= \cup \mathcal{R}_3^-$ et $\overline{X} \in C$ tel que :

$$X = t_a^{x_n} \circ b_1(\overline{X}) \Leftrightarrow \overline{X} = b_1^{-1} \circ (t_a^{x_n})^{-1}(X)$$

Nous obtenons alors :

$$\phi(X) = \phi \circ t_a^{x_n} \circ b_1(\overline{X}) = \phi_1(\overline{X})$$

Or, nous savons que, pour tout $C \in \mathcal{R}_3^+ \cup \mathcal{R}_3^= \cup \mathcal{R}_3^-$, il existe p un monôme, b_3 une suite de transformations élémentaires et U_3 une unité tels que :

$$\forall \overline{X} \in C, \quad \phi_1(\overline{X}) = p \circ b_3^{-1}(\overline{X})U_3 \circ b_3^{-1}(\overline{X})$$

Nous définissons la suite de transformations élémentaires $b = t_a^{x_n} \circ b_1 \circ 3$. Nous obtenons :

$$\phi(X) = p \circ b^{-1}(X)U_3 \circ b^{-1}(X)$$

La proposition est donc vraie au rang n.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour toute fonction définissable bornée.$\diamond$

Ce résultat va permettre de démontrer le résultat suivant :

Proposition 6.11 *Soit ϕ une fonction définissable de $n+1$ variables, nous considérons l'ensemble $Z(\phi)$ défini par :*

$$Z(\phi) = \Big\{(X, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; \phi(X, y) = 0\Big\}$$

Alors, il existe un recouvrement cellulaire de $Z(\phi)$ tel que, sur chaque cellule, il existe un monôme p de $\mathbb{R}_n[X]$ et une suite b de transformations élémentaires tels que y est équivalent à $p \circ b^{-1}$.

Preuve : ϕ est une fonction définissable, l'équation $\phi(x, y) = 0$ d'inconnue y admet donc un nombre fini de racines. Autrement dit, il existe une famille $(\phi_i)_{i\in\{1,...,p\}}$ de fonctions définissables telle que :

$$\phi(X, y) = 0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, ..., p\}, y = \phi_i(X)$$

Nous notons $C_i = \Big\{(X, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; y = \phi_i(X)\Big\}$ et $\mathcal{S} = \Big\{C_i; i \in \{1, ..., p\}\Big\}$. Par construction, $\mathcal{S}$ est un recouvrement fini de $Z(\phi)$. Nous allons maintenant affiner ce recouvrement.
Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Nous appliquons la proposition 6.10 à la fonction ϕ_i. Il existe un recouvrement $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que, sur chaque cellule $S \in \mathcal{R}$, il existe un monôme p, une suite de transformations élémentaires b et une unité U tels que :

$$\forall (X, y) \in C_i \cap S, \quad y = \phi_i(X) = p \circ b^{-1}(X) U \circ b^{-1}(X)$$

Nous effectuons le changement de variables :

$$\begin{cases} \overline{X} = b(X) \\ \overline{y} = y \end{cases}$$

Comme U est une unité, nous avons donc $y \sim p(\overline{X})$ sur la cellule.$\diamond$

Remarque 2: Les transformations élémentaires de la proposition précédente ne concernant que les variables X conservent strictement la verticalité de y.

6.5 Redressement de la verticalité

Dans un premier temps, nous allons démontrer une série de lemmes préparatoires. Ils nous serviront à la réduction des termes dans le cas particulier des quotients et des radicaux.
Soit ϕ une fonction définissable. Nous notons $Z(\phi)$ l'ensemble défini par :

$$Z(\phi) = \Big\{(X, y) \in I_r; \phi(X, y) = 0\Big\}$$

6.5.1 Cas des quotients bornés

Lemme 6.12 *Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathcal{C}_{n+1}$. Nous considérons la fonction h définie par :*

$$\forall (X, y) \in Z(\phi), \quad h(X, y) = \frac{f_1(X, y)}{f_2(X, y)}$$

Si nous supposons que h est bornée sur $Z(\phi)$, alors il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de $Z(\phi)$ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b préservant strictement la verticalité de y et une fonction $f \in \mathcal{C}_{n+1}$ avec :

$$\forall (X,y) \in C, \quad h(X,y) = f \circ b^{-1}(X,y)$$

Preuve : D'après le théorème de préparation simultanée 4.18, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}_1$ de $Z(\phi)$ tel que, pour tout $C_1 \in \mathcal{R}_1$, il existe une suite de transformations élémentaires b_1 concernant uniquement les variables X, sept fonctions $(a, \theta_1, \theta_2, g_1, g_2, l_1, l_2) \in \mathcal{C}_n^7$, deux entiers d_1 et d_2 et deux unités $(U_1, U_2) \in \mathcal{C}_{n+1}^2$ tels que, pout tout $i \in \{1,2\}$ et tout $(X,y) \in C_1$, nous ayons :

$$f_i = (y - a \circ b_1^{-1}(X))^{d_i} \theta_i \circ b_1^{-1}(X) U_i \left(b_1^{-1}(X), \frac{y - a \circ b_1^{-1}(X)}{l_i \circ b_1^{-1}(X)}, \frac{g_i \circ b_1^{-1}(X)}{y - a \circ b_1^{-1}(X)} \right)$$

Nous notons $S_0 = b_1^{-1}(C_1)$ et nous définissons la fonction h_0 par :

$$\forall (X,y) \in S_0, \quad h_0(X,y) = h \circ b_1(X,y)$$

Nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} \forall (X,y) \in S_0, \quad h_0(X,y) & = & (y - a(X))^{d_1 - d_2} \dfrac{\theta_1(X)}{\theta_2(X)} U_1 \left(X, \dfrac{y - a(X)}{l_1(X)}, \dfrac{g_1(X)}{y - a(X)} \right) \\ & \times & U_2^{-1} \left(X, \dfrac{y - a(X)}{l_2(X)}, \dfrac{g_2(X)}{y - a(X)} \right) \end{array}$$

Nous considérons la fonction h_1 définie par :

$$\forall (X,y) \in S_1 = t_{-a}^y(S_0), \quad h_1(X,y) = h_0(X, y + a(X))$$

Nous avons alors :

$$\begin{array}{rcl} \forall (X,y) \in S_1, \quad h_1(X,y) & = & y^{d_1 - d_2} \dfrac{\theta_1(X)}{\theta_2(X)} U_1 \left(X, \dfrac{y}{l_1(X)}, \dfrac{g_1(X)}{y} \right) \\ & \times & U_2^{-1} \left(X, \dfrac{y}{l_2(X)}, \dfrac{g_2(X)}{y} \right) \end{array}$$

Nous définissons la fonction ϕ_1 par :

$$\forall (X,y) \in S_1, \quad \phi_1(X,y) = \phi(X, y + a \circ b_1^{-1}(X))$$

Soit $(X,y) \in S_1$. Par définition de S_1, il existe $(\overline{X}, \overline{y}) \in S_0$ tel que :

$$(X,y) = t_{-a}^y(\overline{X}, \overline{y}) \Leftrightarrow (\overline{X}, \overline{y}) = t_a^y(X,y)$$

Par définition de S_0, il existe $(\tilde{X}, \tilde{y}) \in C_1$ tel que :

$$(\overline{X}, \overline{y}) = b_1^{-1}(\tilde{X}, \tilde{y}) \Leftrightarrow (\tilde{X}, \tilde{y}) = b_1(\overline{X}, \overline{y})$$

Or, $C_1 \subset Z(\phi)$, nous avons donc :

$$\phi(\tilde{X}, \tilde{y}) = 0 \Rightarrow \phi_1(X,y) = 0$$

Nous en concluons que $S_1 \subset Z(\phi_1)$.
D'après la proposition 6.11, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}_2$ de $Z(\phi_1)$, donc de S_1, tel que, pour toute cellule $C_2 \in \mathcal{R}_2$, il existe b_2 une suite de transformations élémentaires préservant la

verticalité de y et un monôme p tel que $y \sim p \circ b_2^{-1}(X)$ sur C_2.
Par définition de la relation d'équivalence, il existe $(k, K) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall (X, y) \in C_2, \quad k|p \circ b_2^{-1}(X)| \leq |y| \leq K|p \circ b_2^{-1}(X)|$$

Nous notons $S_2 = b_2^{-1}(C_2)$ et nous définissons la fonction h_2 par :

$$\forall (X, y) \in S_2, \quad h_2(X, y) = h_1 \circ b_2(X, y)$$

Soit $(X, y) \in S_2$. Il existe $(\overline{X}, \overline{y}) \in C_2$ tel que :

$$(X, y) = b_2^{-1}(\overline{X}, \overline{y}) \Leftrightarrow (\overline{X}, \overline{y}) = b_2(X, y)$$

Or, nous avons :

$$k|p \circ b_2^{-1}(X)| \leq |y| \leq K|p \circ b_2^{-1}(X)|$$

Nous obtenons :

$$k|p(\overline{X})| \leq |\overline{y}| \leq K|p(\overline{X})|$$

Autrement dit, nous avons $y \sim p$ sur S_2.
D'après le lemme 5.4, il existe un recouvrement cellulaire fini $\mathcal{R}_3$ de S_2 tel que, pour tout cellule $C_3 \in \mathcal{R}_3$, il existe un polyrayon $r \in]0; +\infty[^{n+1}$ et un réel $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que : $C_3 = b_\lambda^{p,y}(I_r)$.
Nous notons $S_3 = (b_\lambda^{p,y})^{-1}(C_3)$ et nous définissons la fonction h_3 par :

$$\forall (X, y) \in S_3, \quad h_3(X, y) = h_2 \circ b_\lambda^{p,y}(X, y)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \forall (X, y) \in S_3, \quad h_3(X, y) &= \Big(p(X)(\lambda + y)\Big)^{d_1 - d_2} \frac{\theta_1 \circ b_2(X)}{\theta_2 \circ b_2(X)} \\ &\times \ U_1\left(b_2(X), \frac{p(X)}{l_1 \circ b_2(X)}(\lambda + y), \frac{g_1 \circ b_2(X)}{p(X)(\lambda + y)}\right) \\ &\times \ U_2^{-1}\left(b_2(X), \frac{p(X)}{l_2 \circ b_2(X)}(\lambda + y), \frac{g_2 \circ b_2(X)}{p(X)(\lambda + y)}\right) \end{aligned}$$

Nous remarquons que sur I_r, la fonction $V : y \mapsto \lambda + y$ est une unité. D'après la proposition 2.12, $V_1 = V^{-1}$ et $V_2 = V^{d_1 - d_2}$ sont des unités. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \forall (X, y) \in S_3, \quad h_3(X, y) &= p(X)^{d_1 - d_2} V_2(y) \frac{\theta_1 \circ b_2(X)}{\theta_2 \circ b_2(X)} \\ &\times \ U_1\left(b_2(X), \frac{p(X)}{l_1 \circ b_2(X)} V(y), \frac{g_1 \circ b_2(X)}{p(X)} V_1(y)\right) \\ &\times \ U_2^{-1}\left(b_2(X), \frac{p(X)}{l_2 \circ b_2(X)} V(y), \frac{g_2 \circ b_2(X)}{p(X)} V_2(y)\right) \end{aligned}$$

D'après le théorème 6.7 appliqué à la famille $\left(p^{d_1 - d_2} \frac{\theta_1 \circ b_2}{\theta_2 \circ b_2}, \frac{g_1 \circ b_2}{p}, \frac{g_2 \circ b_2}{p}, \frac{p}{l_1 \circ b_2}, \frac{p}{l_2 \circ b_2}\right)$, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}_4$ de S_3 tel que, pour toute cellule $C_4 \in \mathcal{R}_4$, il existe b_4 une suite de transformations élémentaires concernant les variables X, cinq fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 de $\mathcal{C}_n$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall (X, y) \in C_4, \quad h_3(X, y) &= f_1 \circ b_4^{-1}(X) V_2(y) U_1\Big(b_2 \circ b_4^{-1}(X), f_2 \circ b_4^{-1}(X) V(y), f_3 \circ b_4^{-1}(X) V_1(y)\Big) \\ &\times \ U_2^{-1}\Big(b_2 \circ b_4^{-1}(X), f_4 \circ b_4^{-1}(X) V(y), f_5 \circ b_4^{-1}(X) V_2(y)\Big) \end{aligned}$$

Nous définissons la fonction W par :

$$\begin{aligned}\forall (X,y)\in b_4^{-1}(C_4),\quad W(X,y) &= V_2(y)U_1\Big(b_2(X), f_2(X)V(y), f_3(X)V_1(y)\Big)\\ &\times\ U_2^{-1}\Big(b_2(X), f_4(X)V(y), f_5(X)V_2(y)\Big)\end{aligned}$$

Comme toutes les fonctions qui composent W sont des éléments de $\mathcal{C}_{n+1}$, nous en déduisons que W appartient à $\mathcal{C}_{n+1}$. Par ailleurs, V_2, U_1 et U_2^{-1} sont des unités, alors W est une unité. Nous avons alors :

$$\forall (X,y)\in C_4,\quad h_3(X,y) = f_1\circ b_4^{-1}(X)W\circ b_4^{-1}(X,y)$$

Nous notons $S_4 = b_4^{-1}(C_4)$ et nous définissons la fonction h_4 par :

$$\forall (X,y)\in S_4,\quad h_4 = h_3\circ b_4(X,y)$$

Nous avons alors :

$$\forall (X,y)\in S_4,\quad h_4(X,y) = f_1(X,y)W(X,y) = (f_1\times W)(X,y)$$

La fonction $h_4 = f_1\times W$ appartient à $\mathcal{C}_{n+1}$. Nous remarquons aussi que nous avons :

$$h_4 = h\circ b_1\circ t_a^y\circ b_2\circ b_3\circ b_4$$

Pour conclure, il faut revenir à l'ensemble F en suivant les différentes étapes. Nous avons :

$$\begin{aligned}F &= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1} C_1 = \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1} b_1(S_0)\\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1} b_1\Big(t_a^y(S_1)\Big)\\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1} b_1\circ t_a^y\Big(\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2} C_2\Big)\\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1}\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2} b_1\circ t_a^y\circ b_2(S_2)\\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1}\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2} b_1\circ t_a^y\circ b_2\Big(\bigcup_{C_3\in\mathcal{R}_3} C_3\Big)\\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1}\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2}\bigcup_{C_3\in\mathcal{R}_3} b_1\circ t_a^y\circ b_2\circ b_3(S_3)\\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1}\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2}\bigcup_{C_3\in\mathcal{R}_3} b_1\circ t_a^y\circ b_2\circ b_3\Big(\bigcup_{C_4\in\mathcal{R}_4} C_4\Big)\\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1}\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2}\bigcup_{C_3\in\mathcal{R}_3}\bigcup_{C_4\in\mathcal{R}_4} b_1\circ t_a^y\circ b_2\circ b_3\circ b_4(S_4)\end{aligned}$$

Nous voyons clairement dans cette suite d'égalités apparaître le fait que nous progressons par raffinement successif de nos recouvrements.
Pour tout $(X,y)\in F$, il existe une cellule $C_4\in\mathcal{R}_4$ et $(\overline{X},\overline{Y})\in S_4$ telle que :

$$(X,y) = b_1\circ t_a^y\circ b_2\circ b_3\circ b_4(\overline{X},\overline{y}) \Leftrightarrow (\overline{X},\overline{y}) = b_4^{-1}\circ b_3^{-1}\circ b_2^{-1}\circ t_{-a}^y\circ b_1^{-1}(X,y)$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}h(X,y) &= h\circ b_1\circ t_a^y\circ b_2\circ b_3\circ b_4\circ b_4^{-1}\circ b_3^{-1}\circ b_2^{-1}\circ t_{-a}^y\circ b_1^{-1}(X,y)\\
&= h\circ b_1\circ t_a^y\circ b_2\circ b_3\circ b_4(\overline{X},\overline{y})\\
&= h_4(\overline{X},\overline{y})\\
&= h_4\circ b_4^{-1}\circ b_3^{-1}\circ b_2^{-1}\circ t_{-a}^y\circ b_1^{-1}(X,y)\end{aligned}$$

Nous avons donc construit une recouvrement fini de $Z(\phi)$ tel que, sur chaque cellule, la fonction a la forme voulue. Il faut aussi remarquer que les transformations effectuées conservent toutes strictement la verticalité de y.$\diamond$

6.5.2 Ramification

Lemme 6.13 *Soit f un élément de notre algèbre et p un entier positif. Nous considérons la fonction h définie par :*

$$\forall (x,y) \in I_r, \quad h(X,y) = (f(X,y))^{\frac{1}{p}}$$

Alors il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de $Z(\phi)$ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b conservant la verticalité de y et une fonction f_0 dans $\mathcal{C}_{n+1}$ telles que :

$$\forall (X,y) \in C, \quad h(X,y) = f_0 \circ b^{-1}(X,y)$$

Preuve : D'après le théorème de préparation 4.17, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}_1$ de $Z(\phi)$ tel que, pour tout $C_1 \in \mathcal{R}_1$, il existe une suite de transformations élémentaires b_1 concernant uniquement les variables X, quatre fonctions $(a,\theta,g,l) \in \mathcal{C}_n^3$, un entier d et une unité $U \in \mathcal{C}_{n+1}$ tels que, pour tout $(X,y) \in C_1$, nous ayons :

$$f(X,y) = (y - a \circ b_1^{-1}(X))^d \theta \circ b_1^{-1}(X) U\left(b_1^{-1}(X), \frac{y - a \circ b_1^{-1}(X)}{l \circ b_1^{-1}(X)}, \frac{g \circ b_1^{-1}(X)}{y - a \circ b_1^{-1}(X)}\right)$$

Nous notons $S_0 = b_1^{-1}(C_1)$ et nous définissons la fonction h_0 par :

$$\forall (X,y) \in S_0, \quad h_0(X,y) = h \circ b_1(X,y)$$

Nous obtenons :

$$\forall (X,y) \in S_0, \quad h_0(X,y) = \left[(y - a(X))^d \theta(X) U\left(X, \frac{y-a(X)}{l(X)}, \frac{g_1(X)}{y-a(X)}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

Nous considérons la fonction h_1 définie par :

$$\forall (X,y) \in S_1 = t^y_{-a}(S_0), \quad h_1(X,y) = h_0(X, y + a(X))$$

Nous avons alors :

$$\forall (X,y) \in S_1, \quad h_1(X,y) = \left[y^d \theta(X) U\left(X, \frac{y}{l(X)}, \frac{g(X)}{y}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

Nous définissons la fonction ϕ_1 par :

$$\forall (X,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \mathrm{Div}_u, \quad \phi_1(X,y) = \phi(X, y + a \circ b_1^{-1}(X))$$

Dans la démonstration de 6.12, nous avons vu que $S_1 \subset Z(\phi_1)$.
D'après la proposition 6.11, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}_2$ de $Z(\phi_1)$, donc de S_1, tel que, pour toute cellule $C_2 \in \mathcal{R}_2$, il existe b_2 une suite de transformations élémentaires préservant la verticalité de y et un monôme p tel que $y \sim p \circ b_2^{-1}(X)$ sur C_2.
Par définition de la relation d'équivalence, il existe $(k,K) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall (X,y) \in C_2, \quad k|p \circ b_2^{-1}(X)| \leq |y| \leq K|p \circ b_2^{-1}(X)|$$

Nous notons $S_2 = b_2^{-1}(C_2)$ et nous définissons la fonction h_2 par :

$$\forall (X,y) \in S_2, \quad h_2(X,y) = h_1 \circ b_2(X,y)$$

Soit $(X,y)\in S_2$. Il existe $(\overline{X},\overline{y})\in C_2$ tel que :

$$(X,y)=b_2^{-1}(\overline{X},\overline{y})\Leftrightarrow(\overline{X},\overline{y})=b_2(X,y)$$

Or, nous avons :

$$k|p\circ b_2^{-1}(X)|\leq|y|\leq K|p\circ b_2^{-1}(X)|$$

Nous obtenons :

$$k|p(\overline{X})\leq|\overline{y}|\leq K|p(\overline{X})|$$

Autrement dit, nous avons $y\sim p$ sur S_2.
D'après le lemme 5.4, il existe un recouvrement cellulaire fini $\mathcal{R}_3$ de S_2 tel que, pour tout cellule $C_3\in\mathcal{R}_3$, il existe un polyrayon $r\in]0;+\infty[^{n+1}$ et un réel $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tels que : $C_3=b_\lambda^{p,y}(I_r)$.
Nous notons $S_3=(b_\lambda^{p,y})^{-1}(C_3)$ et nous définissons la fonction h_3 par :

$$\forall(X,y)\in S_3,\quad h_3(X,y)=h_2\circ b_\lambda^{p,y}(X,y)$$

Nous avons alors :

$$\forall(X,y)\in S_3,\quad h_3(X,y)=\left[\left(p(X)(\lambda+y)\right)^d\theta\circ b_2(X)U\left(b_2(X),\frac{p(X)}{l\circ b_2(X)}(\lambda+y),\frac{g\circ b_2(X)}{p(X)(\lambda+y)}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

Nous remarquons que sur I_r, la fonction $V:y\mapsto\lambda+y$ est une unité. D'après la proposition 2.12, $V_1=V^{-1}$ et $V_2=(V^d)^{\frac{1}{p}}$ sont des unités. Nous avons alors :

$$\forall(X,y)\in S_3,\quad h_3(X,y)=\left[p(X)^dV_2(y)\theta\circ b_2(X)U\left(b_2(X),\frac{p(X)}{l\circ b_2(X)}V(y),\frac{g\circ b_2(X)}{p(X)}V_1(y)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

D'après le théorème 6.7 appliqué à la famille $\left((p^d\theta\circ b_2)^{\frac{1}{p}},\frac{g\circ b_2}{p},\frac{p}{l\circ b_2}\right)$, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}_4$ de S_3 tel que, pour toute cellule $C_4\in\mathcal{R}_4$, il existe b_4 une suite de transformations élémentaires concernant les variables X, trois fonctions f_1, f_2 et f_3 de $\mathcal{C}_n$ telles que :

$$\forall(X,y)\in C_4,\quad h_3(X,y)=f_1\circ b_4^{-1}(X)\left[V_2(y)U_1\left(b_2\circ b_4^{-1}(X),f_2\circ b_4^{-1}(X)V(y),f_3\circ b_4^{-1}(X)V_1(y)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

Nous définissons la fonction W par :

$$\forall(X,y)\in b_4^{-1}(C_4),\quad W(X,y)=\left[V_2(y)U_1\left(b_2(X),f_2(X)V(y),f_3(X)V_1(y)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

Comme toutes les fonctions qui composent W sont des éléments de $\mathcal{C}_{n+1}$, nous en déduisons que W appartient à $\mathcal{C}_{n+1}$. Par ailleurs, d'après la proposition 2.11, V_2, U_1 et U_2^{-1} sont des unités, alors W est une unité. Nous avons alors :

$$\forall(X,y)\in C_4,\quad h_3(X,y)=f_1\circ b_4^{-1}(X)W\circ b_4^{-1}(X,y)$$

Nous notons $S_4=b_4^{-1}(C_4)$ et nous définissons la fonction h_4 par :

$$\forall(X,y)\in S_4,\quad h_4=h_3\circ b_4(X,y)$$

Nous avons alors :

$$\forall(X,y)\in S_4,\quad h_4(X,y)=f_1(X,y)W(X,y)=(f_1\times W)(X,y)$$

La fonction $h_4=f_1\times W$ appartient à $\mathcal{C}_{n+1}$. Nous remarquons aussi que nous avons :

$$h_4=h\circ b_1\circ t_a^y\circ b_2\circ b_3\circ b_4$$

Pour conclure, il faut revenir à l'ensemble $Z(\phi)$ en suivant les différentes étapes. Nous avons :

$$\begin{aligned}
Z(\phi) &= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1} C_1 = \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1} b_1(S_0) \\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1} b_1\Big(t_a^y(S_1)\Big) \\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1} b_1 \circ t_a^y(S_1) \\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1} b_1 \circ t_a^y\Big(\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2} C_2\Big) \\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1}\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2} b_1 \circ t_a^y \circ b_2(S_2) \\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1}\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2} b_1 \circ t_a^y \circ b_2\Big(\bigcup_{C_3\in\mathcal{R}_3} C_3\Big) \\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1}\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2}\bigcup_{C_3\in\mathcal{R}_3} b_1 \circ t_a^y \circ b_2 \circ b_3(S_3) \\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1}\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2}\bigcup_{C_3\in\mathcal{R}_3} b_1 \circ t_a^y \circ b_2 \circ b_3\Big(\bigcup_{C_4\in\mathcal{R}_4} C_4\Big) \\
&= \bigcup_{C_1\in\mathcal{R}_1}\bigcup_{C_2\in\mathcal{R}_2}\bigcup_{C_3\in\mathcal{R}_3}\bigcup_{C_4\in\mathcal{R}_4} b_1 \circ t_a^y \circ b_2 \circ b_3 \circ b_4(S_4)
\end{aligned}$$

Nous voyons clairement dans cette suite d'égalités apparaître le fait que nous progressons par raffinement successif de nos recouvrements.
Pour tout $(X, y) \in F$, il existe une cellule $C_4 \in \mathcal{R}_4$ et $(\overline{X}, \overline{Y}) \in S_4$ tels que :

$$(X, y) = b_1 \circ t_a^y \circ b_2 \circ b_3 \circ b_4(\overline{X}, \overline{y}) \Leftrightarrow (\overline{X}, \overline{y}) = b_4^{-1} \circ b_3^{-1} \circ b_2^{-1} \circ t_{-a}^y \circ b_1^{-1}(X, y)$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
h(X, y) &= h \circ b_1 \circ t_a^y \circ b_2 \circ b_3 \circ b_4 \circ b_4^{-1} \circ b_3^{-1} \circ b_2^{-1} \circ t_{-a}^y \circ b_1^{-1}(X, y) \\
&= h \circ b_1 \circ t_a^y \circ b_2 \circ b_3 \circ b_4(\overline{X}, \overline{y}) \\
&= h_4(\overline{X}, \overline{y}) \\
&= h_4 \circ b_4^{-1} \circ b_3^{-1} \circ b_2^{-1} \circ t_{-a}^y \circ b_1^{-1}(X, y)
\end{aligned}$$

Nous avons donc construit une recouvrement fini de $Z(\phi)$ tel que, sur chaque cellule, la fonction présente la forme voulue. Il reste à remarquer que les transformations effectuées conservent toutes strictement la verticalité de y.$\diamond$

6.5.3 Réduction simulanée conservant la verticalité pour une famille ultra-simple

Théorème 6.14 *Soient ϕ une fonction définissable de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $(g_i)_{i\in\{1,\ldots p\}}$ une famille de termes ultra-simples de $n+1$ variables définie sur un ensemble $Z(\phi)$. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de $Z(\phi)$ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe une suite de transformations élémentaires b conservant la verticalité de y et une famille de fonctions $(f_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ de $\mathcal{C}_{n+1}$ telles que :*

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, \forall (X, y) \in C, \quad g_i(X, y) = f_i \circ b^{-1}(X, y)$$

Preuve : En utilisant les lemmes 6.12 et 6.13, la démonstration est identique à celle de la proposition 6.5. Il convient de remarquer que les transformations utilisées conservent toutes strictement la verticalité de y. Leur composition respecte donc aussi cette condition.$\diamond$

Chapitre 7

Résolution et conséquences

7.1 Résolution des équations

Théorème 7.1 *Soit g un terme admettant $n+1$ variables. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, nous avons l'une des possiblités suivantes :*

1. *Soit l'équation $g(X,y) = 0$ n'admet pas de solution sur C ;*
2. *Soit il existe un terme θ_C tel que, sur C, nous avons :*

$$g(X,y) = 0 \Leftrightarrow \theta_C(X) = 0$$

3. *Soit il existe un terme θ_C tel que, sur C, nous avons :*

$$g(X,y) = 0 \Leftrightarrow y = \theta_C(X)$$

Preuve : Nous allons effectuer un raisonnement par récurrence sur la hauteur du terme.

Initialisation : Nous supposons que $\mathrm{hau}(g) = 0$. Par définition, cela signifie que g est un élément de $\mathcal{C}_{n+1}$. Nous lui appliquons la proposition 6.2, ce qui nous permet de conclure.

Hérédité : Nous supposons le théorème vrai pour les termes de hauteur h. Nous considérons g un terme de hauteur $h+1$. Nous effectuons le premier recouvrement à l'aide des cellules suivantes :

$$E = \mathbb{R}^{n+1} \cap Z(g) \text{ et } F = \mathbb{R}^{n+1} \backslash Z(g)$$

Nous voyons que, sur F, l'équation n'admet pas de solution. Nous nous plaçons donc sur E. Par définition de la hauteur, cela signifie qu'il existe au moins une branche de longueur $h+1$ dans la description de g en arbre. Il existe donc t un terme de hauteur h, $(g_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ une famille de termes ultra-simples tels que :

$$\forall (X,y) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad g(X,y) = t\Big(g_1(X,y), ..., g_p(X,y)\Big)$$

D'après le théorème 6.14, il existe un recouvrement $\mathcal{R}_1$ de E tel que, pour toute cellule $C_1 \in \mathcal{R}_1$, il existe une suite de transformations élémentaires conservant b_1 la verticalité et une famille $(f_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_{n+1}$ telles que :

$$\forall (X,y) \in C_1, \quad g(X,y) = t\Big(f_1 \circ b_1^{-1}(X,y), ..., f_p \circ b_1^{-1}(X,y)\Big)$$

Nous notons $S_1 = b_1^{-1}(C_1)$ et nous définissons le terme t_1 par :

$$\forall (X,y) \in S_1, \quad t_1(X,y) = g \circ b_1(X,y)$$

Nous avons donc :

$$\forall (X,y) \in S_1, \quad t_1(X,y) = t\Big(f_1(X,y), ..., f_p(X,y)\Big)$$

Le terme t_1 est un terme de hauteur au plus h. Nous lui appliquons l'hypothèse de récurrence. Il existe donc un recouvrement fini $\mathcal{R}_2$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour toute cellule $C_2 \in \mathcal{R}_2$, nous avons :

1. Soit l'équation $t_1(X,y) = 0$ n'admet pas de solution sur C_2. Dans ce cas, l'équation $g(X,y) = 0$ n'admet pas de solution.
2. Soit il existe un terme θ_{C_2} défini sur C_2 tel que, sur C_2, nous avons :

   $$t_1(X,y) = 0 \Leftrightarrow \theta_{C_2}(X) = 0$$

   Nous avons :
   $$E = \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1} C_1 = \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1} b_1(S_1) = \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1} \bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} b_1(C_2)$$

   Nous en déduisons que, pour tout $(X,y) \in E$, il existe une cellule $C_2 \in \mathcal{R}_\in$ et $(\overline{X}, \overline{y}) \in C_2$ tels que :
   $$(X,y) = b_1(\overline{X}, \overline{y}) \Leftrightarrow (\overline{X}, \overline{y}) = b_1^{-1}(X,y)$$

   Nous avons alors :
   $$g(X,y) = 0 \Leftrightarrow \theta_{C_2}(\overline{X}) = 0$$

   Nous notons : $b_1(X,y) = (b_{1,X}(X,y), b_{1,y}(X,y))$. Comme b_1 conserve la verticalité de y, nous savons que $b_{1,X}$ ne dépend pas de y. Nous en concluons que :

   $$g(X,y) = 0 \Leftrightarrow \theta_{C_2} \circ b_{1,X}^{-1}(X) = 0$$

3. Soit il existe un terme θ_{C_2} défini sur C_2 tel que, sur C_2, nous avons :

   $$t_1(X,y) = 0 \Leftrightarrow y = \theta_{C_2}(X)$$

   Par ailleurs, nous avons :

   $$E = \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1} C_1 = \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1} b_1(S_1) = \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1} \bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} b_1(C_2)$$

   Nous en déduisons que, pour tout $(X,y) \in E$, il existe une cellule $C_2 \in \mathcal{R}_\in$ et $(\overline{X}, \overline{y}) \in C_2$ tels que :
   $$(X,y) = b_1(\overline{X}, \overline{y}) \Leftrightarrow (\overline{X}, \overline{y}) = b_1^{-1}(X,y)$$

   Nous avons alors :
   $$g(X,y) = 0 \Leftrightarrow t_1(\overline{X}, \overline{y}) = 0$$

   Nous avons donc : $\overline{y} = \theta_{C_2}(\overline{X})$. Nous notons : $b_1(X,y) = (b_{1,X}(X,y), b_{1,y}(X,y))$. Comme b_1 conserve la verticalité de y, nous savons que $b_{1,X}$ ne dépend pas de y. De plus, dans notre processus, nous n'effectuons sur la variable y que des transformations de type Tchirnhausen suivies par des éclatements $b_\lambda^{x_i,y}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, ..., n\}$. Il existe donc un entier $k \in \mathbb{N}$, une famille $(m_i)_{i \in \{1,...,k\}}$ de $\mathcal{C}_n$, une famille de réels $(\lambda_i)_{i \in \{1,...,k\}}$ et une fonction $\alpha \in \mathcal{C}_n$ tels que :

   $$y = m_1(\overline{X})\Bigg(\lambda_1 + m_2(\overline{X})\Bigg(\lambda_2 + ... + m_k(\overline{X})\Bigg(\lambda_k + \overline{y}\Bigg)...\Bigg) + \alpha(\overline{X})$$
   $$\Leftrightarrow \quad \overline{y} = \frac{y - \alpha(b_{1,X}^{-1}(X)) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \prod_{j=1}^{i} m_i(b_{1,X}^{-1}(X))}{\prod_{i=1}^{k} m_i(b_{1,X}^{-1}(X))}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\overline{y} = \theta_{C_2}(\overline{X}) \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{y - \alpha(b_{1,X}^{-1}(X)) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \prod_{j=1}^{i} m_i(b_{1,X}^{-1}(X))}{\prod_{i=1}^{k} m_i(b_{1,X}^{-1}(X))} = \theta_{C_2}(b_{1,X}^{-1}(X)) \\
& \Leftrightarrow \quad y = \theta_{C_2}(b_{1,X}^{-1}(X)) \prod_{i=1}^{k} m_i(b_{1,X}^{-1}(X)) + \alpha(b_{1,X}^{-1}(X)) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \prod_{j=1}^{i} m_i(b_{1,X}^{-1}(X))
\end{aligned}$$

Sur la cellule, y est égal à un terme des variables X.
La propriété est donc vraie au rang $h+1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, le théorème est vrai quelle que soit la hauteur du terme.$\diamond$

7.2 Démonstration du théorème A

Avant de commencer la démonstration, nous fixons une notation. Soit $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$ avec $i \leq j$, nous notons Π_i^j l'application définie par :

$$\forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \Pi_i^j(x_1,...,x_n) = (x_i,...,x_j)$$

Nous rappelons ce théorème :
Théorème A : *Les fonctions définissables sont, par morceaux, des termes. Autrement dit, pour toute fonction définissable ϕ admettant n variables, il existe un recouvrement cylindrique fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout cylindre $C \in \mathcal{R}$, il existe un terme g tel que :*

$$\forall X \in C, \quad \phi(X) = g(X)$$

7.2.1 Première version

Nous démontrons une première version du théorème dans laquelle nous ne précisons pas la nature cylindrique des éléments du recouvrement.

Théorème 7.2 *Soit ϕ une fonction définissable admettant n variables. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour toute cellule $C \in \mathcal{R}$, il existe un terme g tel que :*

$$\forall X \in C, \quad \phi(X) = g(X)$$

Preuve : La démonstration s'effectue par récurrence sur le nombre de variables.

Initialisation : L'initialisation correspond au lemme 5.13.

Hérédité : Nous supposons le théorème vrai pour toute fonction définissable d'au plus $N-1$ variables. Nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence lors de la démonstration de la proposition 6.10.

Soit ϕ une fonction définissable sur $\mathbb{R}^N$. D'après le corollaire 5.11, il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}_0$ du graphe Γ de ϕ tel que, pour toute cellule $C_0 \in \mathcal{R}_0$, il existe une famille $(a_i)_{i \in \{1,...,N+1\}}$ des fonctions de $\mathcal{C}_N$ telle que :

$$M(x_1,...,x_N) \in C_0 \Leftrightarrow \exists (u_1,...,u_N) \in \mathbb{R}^N, \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1,...,N\}, \quad x_i = a_i(u_1,...,u_N) \\ \phi(X) = a_{N+1}(u_1,...,u_N) \end{array} \right.$$

Comme les fonctions de $\mathcal{C}_N$ sont identiquement nulles en dehors d'un pavé, nous pouvons supposer que les paramètres $(u_1, ..., u_N)$ appartiennent à un pavé B.

Soit $C_0 \in \mathcal{R}_0$. Pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, nous définissons les termes suivants :

$$\forall (x_j, u_1, ..., u_N) \in \Pi_j(C_0) \times B, \quad g_j(x_j, u_1, ..., u_N) = x_j - a_j^1(u_1, ..., u_N)$$

Nous avons :

$$\forall (x_1, u_1, ..., u_N) \in \Pi_1(C_0) \times B, \quad g_1(x_1, u_1, ..., u_N) = x_1 - a_1^1(u_1, ..., u_N)$$

Nous appliquons le théorème 7.1 à ce terme. Il existe donc un recouvrement fini $\mathcal{R}_1$ de $\Pi_1(C_0) \times B$ tel que, pour toute cellule $C_1 \in \mathcal{R}_1$, nous avons :

1. Soit l'équation $g_1(X, y) = 0$ n'admet pas de solution sur C_1.
2. Soit il existe un terme $\theta_{1,1}$ défini sur C_1 tel que, sur C_1, nous avons :

$$u_1 = \theta_{1,1}(x_1, u_2, ..., u_{N-1})$$

Nous notons $\mathcal{R}_1^-$ l'ensemble des cellules correspondant au premier cas et $\mathcal{R}_1^+$ celui des cellules correspondant au second cas.
Pour tout $i \in \{2, ..., N\}$, nous allons construire par récurrence les ensembles $\mathcal{R}_i^+$ et $\mathcal{R}_i^-$ de la manière suivante :
Soit $C \in \mathcal{R}_{i-1}^+$. Il existe un recouvrement $\mathcal{R}_i$ de $\Pi_1^{i-1}(C) \times \Pi_i^i(C_0) \times \Pi_i^{N+i-1}(C)$ tel que, pour toute cellule $C_i \in \mathcal{R}_i$, nous avons :

1. Soit l'équation $g_i(x_i, u_1, ..., u_N) = 0$ n'admet pas de solution sur C_i ;
2. Soit il existe un terme $\theta_{i,i}$ tel que, sur C_i, nous avons :

$$u_i = \theta_{i,i}(x_1, ..., x_i, u_{i+1}, ..., u_N)$$

Nous noterons $\mathcal{R}_i^-$ l'ensemble des cellules correspondant au premier cas et $\mathcal{R}_i^+$ celles correspondant au second cas.
Par ailleurs, il existe une famille $(\theta_{i,j})_{j \in \{1,...,i-1\}}$ de termes telle que, sur C_i, nous avons :

$$u_j = \theta_{i,j}(x_1, ..., x_i, u_{i+1}, ..., u_N)$$

Nous avons effectué ci-dessus la construction de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_1^+$ et $\mathcal{R}_1^-$.
Soit $i \in \{2, ..., N\}$. Nous supposons que nous avons construit $\mathcal{R}_{i-1}$.
Soient $C \in \mathcal{R}_{i-1}^+$ et $(x_1, ..., x_i, u_1, ..., u_N) \in \Pi_1^{i-1}(C) \times \Pi_i^i(C_0) \times \Pi_i^{N+i-1}(C)$. Nous avons :

$$(x_1, ..., x_{i-1}, u_1, ..., u_N) \in C$$

Nous en déduisons que :

$$\forall j \in \{1, ..., i-1\}, \quad u_j = \theta_{i-1,j}(x_1, ..., x_{i-1}, u_i, ..., u_N) \tag{7.1}$$

Pour tout $(x_1, ..., x_i, u_i, ..., u_N) \in \Pi_1^{i-1}(C) \times \Pi_2^2(C_0) \times \Pi_{2i-1}^{N+i-1}(C)$, nous définissons la valeur du terme $\overline{g}_2$ en ce point par :

$$\overline{g}_2(x_1, ..., x_i, u_i, ..., u_n) = g_2(x_i, \theta_{i-1,1}(x_1, ..., x_{i-1}, u_i, ..., u_N), ..., \theta_{i-1,i-1}(x_1, ..., x_{i-1}, u_i, ..., u_N), u_i, ..., u_N)$$

D'après le théorème 7.1, il existe $\overline{\mathcal{R}_i}$ un recouvrement fini de $\Pi_1^{i-1}(C) \times \Pi_2^2(C_0) \times \Pi_{2i-1}^{N+i-1}(C)$ tel que, pour toute cellule $\overline{C}_i \in \overline{\mathcal{R}_i}$, nous avons :

1. Soit l'équation $\overline{g}_2(x_1, ..., x_i, u_i, ..., u_N) = 0$ n'admet pas de solution sur $\overline{C}_i$;

2. Soit il existe un terme $\theta_{i,i}$ tel que, sur $\overline{C}_i$, nous avons :

$$u_i = \theta_{i,i}(x_1, ..., x_i, u_{i+1}, ..., u_N)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\Pi_1^{i-1}(C) \times \Pi_2^2(C_0) \times \Pi_i^{N+i-1}(C) &= \Pi_1^{i-1}(C) \times \Pi_2^2(C_0) \times \Pi_i^{2i-2}(C) \times \Pi_{2i-1}^{N+i-1}(C) \\
&= \bigcup_{\overline{C}_i \in \overline{\mathcal{R}_i}} \Pi_1^i(\overline{C}_i) \times \Pi_i^{2i-2}(C) \times \Pi_{2i-1}^{N+i-1}(\overline{C}_2)
\end{aligned}$$

Nous définissons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}_i = \left\{ \Pi_1^i(\overline{C}_i) \times \Pi_i^{2i-2}(C) \times \Pi_{2i-1}^{N+i-1}(\overline{C}_i); \overline{C}_i \in \overline{\mathcal{R}_i} \right\}$$

Nous obtenons :

$$\Pi_1^{i-1}(C) \times \Pi_i^i(C_0) \times \Pi_i^{N+i-1}(C) = \bigcup_{C_i \in \mathcal{R}_i} C_i$$

Autrement dit, nous avons construit un recouvrement fini de notre ensemble. Par ailleurs, grâce aux égalités (7.1), nous remarquons que nous avons l'équivalence suivante :

$$g_2(x_2, u_1, ..., u_N) = 0 \Leftrightarrow \overline{g}_2(x_1, ..., x_i, u_i, ..., u_N) = 0$$

Sur certaines cellules, l'équation n'admet donc pas de solution et nous notons $\mathcal{R}_i^-$ l'ensemble de ces cellules. Tandis que sur les autres, dont l'ensemble est noté $\mathcal{R}_i^+$, nous avons :

$$u_i = \theta_{i,i}(x_1, ..., x_i, u_{i+1}, ..., u_N)$$

Soit $C_i \in \mathcal{R}_i^+$ et $j \in \{1, ..., i-1\}$. Pour tout $(x_1, ..., x_i, u_2, u_{i+1}, ..., u_N) \in \Pi_1^i(C_2) \times \Pi_{2i+1,N+i}(C_2)$, nous définissons $\theta_{i,j}$ le terme suivant, :

$$\theta_{i,j}(x_1, ..., x_i, u_{i+1}, ..., u_N) = \theta_{i-1,j}(x_1, ..., x_{i-1}, \theta_{i,i}(x_1, ..., x_i, u_{i+1}, ..., u_N), u_{i+1}, ..., u_N)$$

Sur C_2, nous avons alors :

$$u_j = \theta_{i,j}(x_1, ..., x_i, u_{i+1}, ..., u_N)$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
C_0 \times B &= \Pi_1^1(C_0) \times ... \times \Pi_N^N(C_0) \times B \\
&= \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1} \Pi_1(C_1) \times \Pi_2^2(C_0) \times ... \times \Pi_N^N(C_0) \times \Pi_2^{N+1}(C_1) \\
&= \left(\bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1^+} \Pi_1(C_1) \times \Pi_2^2(C_0) \times ... \times \Pi_N^N(C_0) \times \Pi_2^{N+1}(C_1) \right) \\
&\cup \left(\bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1^-} \Pi_1(C_1) \times \Pi_2^2(C_0) \times ... \times \Pi_N^N(C_0) \times \Pi_2^{N+1}(C_1) \right) \\
&= \left(\bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1^+} \bigcup_{C_2 \in \mathcal{R}_2} \Pi_1^2(C_1) \times \Pi_3^3(C_0) \times ... \times \Pi_N^N(C_0) \times \Pi_2^{N+2}(C_1) \right) \\
&\cup \left(\bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1^-} \Pi_1(C_1) \times \Pi_2^2(C_0) \times ... \times \Pi_N^N(C_0) \times \Pi_2^{N+1}(C_1) \right) \\
&= \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1^+} ... \bigcup_{C_N \in \mathcal{R}_N^+} \Pi_1^N(C_i) \times \Pi_{N+1}^{2N}(C_i) \\
\bigcup_{i=1}^N & \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1^+} ... \bigcup_{C_{i-1} \in \mathcal{R}_{i-1}^+} \bigcup_{C_i \in \mathcal{R}_i^-} \Pi_1^i(C_i) \times \Pi_{i+1}^{i+1}(C_0) \times ... \Pi_N^N(C_0) \times \Pi_{i+1}^{N+i}(C_i)
\end{aligned}$$

Nous avons construit un recouvrement fini $\mathcal{R}_{C_0}$ de $C_0 \times B$.
Nous remarquons que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^N &= \bigcup_{C_0 \in \mathcal{R}_0} C_0 \\
&= \bigcup_{C_0 \in \mathcal{R}_0} \Pi_1^N(C_0 \times B) \\
&= \bigcup_{C_0 \in \mathcal{R}_0} \Pi_1^N\Big(\bigcup_{C \in \mathcal{R}_{C_0}} C\Big) \\
&= \bigcup_{C_0 \in \mathcal{R}_0} \bigcup_{C \in \mathcal{R}_{C_0}} \Pi_1^N(C)
\end{aligned}$$

Nous avons donc construit un recouvrement fini de $\mathbb{R}^N$.
Soit $X \in \mathbb{R}^N$. Comme $(X, \phi(X)) \in \Gamma$, il existe donc $C_0 \in \mathcal{R}_0$ et $U \in B$ tels que :

$$\begin{aligned}
\forall i \in \{1, ..., N\}, \qquad & x_i = a_i(U) \\
& \phi(X) = a_{N+1}(U)
\end{aligned}$$

En utilisant le recouvrement que nous venons de construire, il existe une cellule C de ce recouvrement telle que $(X, U) \in C$. Nous effectuons un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe $j \in \{1, ..., N\}$ tel que :

$$(X, U) \in \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1^+} ... \bigcup_{C_{i-1} \in \mathcal{R}_{i-1}^+} \bigcup_{C_j \in \mathcal{R}_j^-} \Pi_1^j(C_j) \times \Pi_{j+1}^{j+1}(C_0) \times ...\Pi_N^N(C_0) \times \Pi_{j+1}^{N+j}(C_j)$$

Or, par construction de $\mathcal{R}_j^-$, l'équation $g_j(x_1, u_1, ..., u_n) = 0$ n'admet pas de solution sur la cellule, ce qui est en contradiction avec $(X, \phi(X)) \in \Gamma$.
Nous en concluons que $(X, U) \in \bigcup_{C_1 \in \mathcal{R}_1^+} ... \bigcup_{C_N \in \mathcal{R}_N^+} \Pi_1^N(C_i) \times \Pi_{N+1}^{2N}(C_i)$. Par construction de $\mathcal{R}_N^+$, nous savons qu'il existe une famille $(\theta_{N,i})_{i \in \{1,...,N\}}$ de termes telle que, sur la cellule, nous avons :

$$\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad u_i = \theta_{N,i}(x_1, ..., x_N)$$

Nous en déduisons que :

$$\phi(X) = a_{N+1}(u_1, ..., u_N) = a_{N+1}\Big(\theta_{N,1}(x_1, ..., x_N), ..., \theta_{N,N}(x_1, ..., x_N)\Big)$$

Nous avons donc montré qu'il existe un recouvrement de $\mathbb{R}^N$ tel que, sur chaque cellule, la fonction ϕ est un terme.
Le théorème est donc vrai pour une fonction définissable de N variables.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, le théorème est vrai pour toute fonction définissable.$\diamond$

7.2.2 Recouvrement cylindrique

Dans la définition 2.2, les $\mathcal{C}_n$-cylindres sont construits à partir des $\mathcal{C}_n$-ensembles. Nous avons généralisé cette définition 2.19 pour obtenir les $\mathcal{T}_n$-cylindres. Il convient de faire quelques remarques préliminaires.

Tout d'abord, comme le remarquent P. Speisseger et L. Van den Dries dans l'article [15], les unions finies de $\mathcal{T}_n$-cylindres forment une algèbre booléenne de sous-ensembles de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Autrement dit, l'intersection des deux $\mathcal{T}_n$-cylindres est une union finie de $\mathcal{T}_n$-cylindres, ainsi que le complémentaire dans $\mathbb{R}^{n+1}$ d'un $\mathcal{T}_n$-cylindre.

Par ailleurs, comme le fait remarquer D.J. Miller dans le lemme 6-6 de l'article [28], l'image que l'on peut obtenir d'un $\mathcal{T}_n$-cylindre par une suite de transformations conservant strictement la verticalité est une union finie de $\mathcal{T}_n$-cylindres. Ce résultat est aussi valable pour l'image réciproque.

Dès lors, si b est une suite de transformations élémentaires conservant strictement la verticalité, les deux remarques ci-dessus nous permettent de conclure que $\mathrm{Div}(b)$ est une union finie de $\mathcal{T}_n$-cylindres.

En combinant ce résultat avec la proposition 2.9 nous en déduisons que les cellules du recouvrement du théorème 4.17 sont des $\mathcal{T}_n$-cylindres. Comme ce résultat nous sert de base pour les théorèmes de résolution des équations et de redressement de la verticalité, nous pouvons affirmer que les cellules sont bien des $\mathcal{T}_n$-cylindres.

Il reste un point à éclaircir concernant l'utilisation du théorème de préparation dû à P. Speisseger et L. Van den Dries. Lors de la démonstration de la proposition 6.11, nous réalisons un recouvrement à l'aide de ce théorème. Or, ce recouvrement nous sert à démontrer la proposition 6.11. Par définition de la relation d'équivalence, dire que $y \sim p(X)$ se traduit géométriquement par l'appartenance à un $\mathcal{T}_n$-cylindre.

Nous pouvons donc remplacer le mot "cellule" dans le théorème 7.2 par le mot "cylindre". Nous obtenons alors le théorème A.

7.3 Elimination des quantificateurs

Nous allons, dans la suite, déduire du théorème A différents résultats. Nous commençons par démontrer le théorème B.

7.3.1 Démonstration du théorème B

Nous rappelons ce théorème :

Théorème B : *La structure quasianalytique $\mathbb{R}_\mathcal{C}$ admet l'élimination des quantificateurs.*

Preuve : Nous considérons deux familles $(f_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ et $(g_j)_{j\in\{1,\dots,m\}}$ de termes de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nous considérons la formule ϕ sans quantificateurs donnée par :

$$\phi(X,y) := \bigwedge_{i=1}^{p} f_i(X,y) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} g_j(X,y) > 0$$

Pour justifier l'élimination des quantificateurs, il suffit de montrer que l'ensemble $E = \{X \in \mathbb{R}^n; \exists y \in \mathbb{R}, \phi(X,y)\}$ est défini sans quantificateurs.
Nous notons 1_E la fonction caractéristique associée à l'ensemble E. Comme E est un ensemble définissable, nous savons que 1_E est une fonction définissable. D'après le théorème A, il existe un recouvrement cylindrique $\mathcal{R}$ de R^n tel que, pour tout cylindre $C \in \mathcal{R}$, il existe un terme g_C tel que :

$$\forall X \in C, \quad 1_E(X) = g_C(X)$$

Nous notons t_c le terme défini par $t_C = g_C - 1$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} E &= \left\{X \in \mathbb{R}^n ; \exists y \in \mathbb{R}, \phi(X,y) = 0\right\} \\ &= \left\{X \in \mathbb{R}^n ; 1_E(X) = 1\right\} \\ &= \bigcup_{C \in \mathcal{R}} \left\{X \in C ; 1_E(X) = 1\right\} \\ &= \bigcup_{C \in \mathcal{R}} \left\{X \in C ; t_C(X) = 0\right\} \\ &= \bigcup_{C \in \mathcal{R}} \left(\left\{X \in \mathbb{R}^n ; t_C(X) = 0\right\} \cap C\right) \end{aligned}$$

Comme tout $\mathcal{T}_n$-cylindre est un $\mathcal{T}_n$-ensemble, nous savons que C est un $\mathcal{T}_n$-ensemble. Nous en déduisons que E est un $\mathcal{T}_n$-ensemble. Il est donc sans quantificateurs.$\diamond$

7.3.2 Résolution des équations définissables

Nous allons démontrer un résultat similaire au théorème 7.1 dans le cadre des équations définies à l'aide d'une fonction définissable.

Théorème 7.3 *Soit ϕ une fonction définissable admettant $n+1$ variables. Il existe un recouvrement cylindrique fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout cylindre $C \in \mathcal{R}$, nous avons l'une des possibilités suivantes :*

1. *Soit l'équation $\phi(X,y) = 0$ d'inconnue y n'admet pas de solution sur C ;*
2. *Soit il existe un terme θ de n variables tel que :*
$$\phi(X,y) = 0 \Leftrightarrow \theta(X) = 0$$
3. *Soit il existe un terme θ de n variables tel que :*
$$\phi(X,y) = 0 \Leftrightarrow y = \theta(X)$$

Preuve : Soit ϕ une fonction définissable de $n+1$ variables. Nous lui appliquons le théorème A. Il existe donc un recouvrement cylindrique fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout cylindre $C \in \mathcal{R}$, il existe un terme t_C tel que :

$$\forall (X,y) \in C, \quad \phi(X,y) = t_C(X,y)$$

Nous avons sur C :

$$t_C(X,y) = 0$$

Nous appliquons le théorème 7.1 au terme t_C sur le cylindre C. Il existe donc un recouvrement fini $\mathcal{R}_C$ de C tel que, pour tout cylindre $C_C \in \mathcal{R}_C$, nous avons :

1. Soit l'équation $t_C(X,y) = 0$ n'admet pas de solution sur C_C. Il en est de même pour l'équation $\phi(X,y) = 0$.
2. Soit il existe un terme θ_{C_C} tel que :
$$\phi(X,y) = 0 \Leftrightarrow t_C(X,y) = 0 \Leftrightarrow \theta_{C_C}(X) = 0$$
3. Soit il existe un terme θ_{C_C} tel que :
$$\phi(X,y) = 0 \Leftrightarrow t_C(X,y) = 0 \Leftrightarrow y = \theta_{C_C}(X)$$

Pour conclure, il faut remarquer que :

$$\mathbb{R}^{n+1} = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} C = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} \bigcup_{C_C \in \mathcal{R}_C} C_C$$

Nous avons donc un recouvrement fini de $\mathbb{R}^{n+1}$.$\diamond$

7.3.3 Décomposition cylindrique

Nous allons justifier le fait que tout ensemble définissable est une union finie de $\mathcal{T}_n$-cylindres.

Théorème 7.4 *Soit E un ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$. Il existe une famille $(C_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ de $\mathcal{T}_n$-cylindres telle que :*

$$E = \bigcup_{i=1}^{p} C_i$$

Preuve : Nous allons raisonner sur le nombre de variables.

Initialisation : Soit E un ensemble définissable de $\mathbb{R}$. Comme la structure est o-minimale, E est une union finie d'intervalles et de singletons. Il s'agit donc d'une union finie de cylindres.

Hérédité : Nous supposons que le théorème est vrai dans $\mathbb{R}^n$.
Soit E un ensemble définissable de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nous notons 1_E la fonction caractéristique associée à l'ensemble E. Comme E est un ensemble définissable, nous savons que 1_E est une fonction définissable. D'après le théorème A, il existe un recouvrement cylindrique $\mathcal{R}$ de R^n tel que, pour tout cylindre $C \in \mathcal{R}$, il existe un terme g_C tel que :

$$\forall X \in C, \quad 1_E(X) = g_C(X)$$

Nous notons t_c le terme défini par $t_C = g_C - 1$. Nous avons alors :

$$E = \bigcup_{C\in\mathcal{R}} \left\{(X,y) \in C; t_C(X,y) = 0\right\}$$

Soit $C \in \mathcal{R}$. Nous appliquons le théorème 7.1 de résolution des équations à la fonction t_C. Il existe donc un recouvrement cylindrique fini $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout cylindre $C_C \in \mathcal{R}_C$, nous avons :

– Soit l'équation $t_C(X,y) = 0$ n'admet pas de solution sur C_C ;
– Soit il existe un terme θ_C tel que, sur C_C, nous avons :

$$t_C(X,y) = 0 \Leftrightarrow \theta_C(X) = 0$$

– Soit il existe un terme θ_C tel que, sur C_C, nous avons :

$$t_C(X,y) = 0 \Leftrightarrow y = \theta_C(X)$$

Nous notons $\mathcal{R}^0_C$ l'ensemble des cylindres correspondant au second cas et $\mathcal{R}^+_C$ ceux du dernier cas. Nous avons :

$$E = \bigcup_{C\in\mathcal{R}}^{p} \left[\bigcup_{C_C\in\mathcal{R}^0_C} \left\{(X,y) \in C_C; \theta_C(X) = 0\right\} \cup \bigcup_{C_C\in\mathcal{R}^+_C} \left\{(X,y) \in C_C; y = \theta_C(X)\right\}\right]$$

Nous notons $\Pi_n(C_C)$ le projeté de C_C sur les n premières variables. Il s'agit d'un ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il s'agit d'un $\mathcal{T}_n$-ensemble. Nous distinguons les cas :

- Pour $C_C \in \mathcal{R}^0_C$, nous définissons l'ensemble B_C par :

$$B_C = \{X \in \Pi_n(C_C); \theta_C(X) = 0\}$$

  Il s'agit d'un ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$. D'après l'hypothèse de récurrence, B_C est un $\mathcal{T}_n$-ensemble.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\Big\{(X,y)\in C_C;\theta_C(X)=0\Big\} &= \Big\{(X,y)\in\mathbb{R}^{n+1};X\in B_C \text{ et } y=0\Big\}\\ &\cup\ \Big\{(X,y)\in\mathbb{R}^{n+1};X\in B_C \text{ et } y>0\Big\}\\ &\cup\ \Big\{(X,y)\in\mathbb{R}^{n+1};X\in B_C \text{ et } y<0\Big\}\end{aligned}$$

Il s'agit d'une union finie de $\mathcal{T}_n$-cylindres.

- Pour tout $C_i \in \mathcal{R}_i^+$, nous avons :

$$\Big\{(X,y)\in C_C; y=\theta_C(X)\Big\} = \Big\{(X,y)\in\mathbb{R}^{n+1};X\in\Pi_n(C_C) \text{ et } y=\theta_C(X)\Big\}$$

Il s'agit d'un $\mathcal{T}_n$-cylindre.

En regroupant les cas, nous en déduisons que E est une union finie de $\mathcal{T}_n$-cylindres. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, le théorème est vrai quel que soit le nombre de variables.$\diamond$

7.4 Théorème de préparation pour les fonctions définissables

Dans le lemme 3.7 de l'article [28], D.J. Miller obtient l'élimination des quantificateurs à partir d'un théorème de préparation. Cette version sur laquelle se fonde le raisonnement de D.J. Miller est une transposition, dans le cadre des systèmes de Weierstrass, du théorème de préparation dû à J.M. Lion et J.P. Rolin dans l'article [26]. Nous avions remarqué à la fin du chapitre 4 que notre théorème 4.17 de préparation pour les fonctions de l'algèbre présentait une forme similaire.

Le théorème de préparation dû à P. Speisseger et L. Van den Dries dans le cadre des structures polynomialement bornées de l'article [15] est valide dans le cadre de $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. Pourtant, le raisonnement suivi par D.J. Miller ne peut pas être repris ici. Il convient de comprendre ce qui ne nous permet pas de conclure.

Tout d'abord les fonctions qui apparaissent sont des fonctions définissables et donc, a priori, ce ne sont pas des termes. Ensuite, les cellules du recouvrement ne sont pas données comme des cylindres. Or, pour être en mesure d'éliminer les quantificateurs à partir d'un théorème de préparation, il est nécessaire de préciser la nature des objets qui apparaissent.

En utilisant le théorème de préparation dû à P. Speisseger et L. Van den Dries, et les théorème A et B, nous pouvons obtenir le théorème de préparation suivant :

Théorème 7.5 *Soit ϕ une fonction définissable définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Il existe un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout cellule $C\in\mathcal{R}$, il existe λ un rationnel, deux termes a et θ et un terme unité U tels que :*

$$\forall (X,y)\in C,\quad \phi(X) = |y-a(X)|^{\lambda}\theta(X)U(X,y)$$

Preuve : Nous appliquons le théorème 6.8 à la fonction ϕ. Il existe donc un recouvrement fini $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par des ensembles définissables, et pour chaque $C\in\mathcal{C}$, il existe un rationnel λ et deux fonctions θ et a définissables admettant n variables et U une fonction définissable admettant $n+1$ variables tels que le graphe de a est disjoint de C et, pour tout $(X,y)\in C$, nous avons :

$$\phi(X,y) = |y-a(X)|^{\lambda}\theta(X)U(X,y) \text{ et } |U(X,y)-1| \le \frac{1}{2}$$

D'après le théorème 7.4, les ensembles définissables $C \in \mathcal{C}$ sont des unions finies de cylindres. Nous pouvons donc supposer que chaque cellule du recouvrement est un cylindre.
Par ailleurs, nous appliquons le théorème A aux fonctions a, θ et U. En affinant le recouvrement, nous obtenons que les fonctions sont des termes.$\diamond$

Chapitre 8

Conclusions et perspectives

Nos résultats et méthodes suggèrent quelques questions et possibles directions de recherche. En voici quatre.

a) Nous avons noté que, alors que Denef et van den Dries obtiennent leur résultat d'élimination des quantificateurs en étendant le langage naturel de $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ par la fonction $x \mapsto x^{-1}$, nous obtenons le même résultat pour la structure $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, mais au prix supplémentaire de l'extension du langage par les fonctions $x \mapsto x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il est donc naturel de se demander si l'extension par les fonctions racines n-ièmes est strictement indispensable. Elle résulte chez nous de la méthode choisie : faute de disposer de théorème de Weierstrass (puis d'élimination à la Tarski-Seidenberg), nous avons adopté une stratégie de résolutions des systèmes d'équations quasianalytiques. Nous pensons fortement que l'introduction des racines n-ièmes est liée au défaut de théorème de Weierstrass, mais nous n'en avons pas la certitude absolue. Ce point devrait donc être clarifié.

b) L'outil fondamental par lequel nous remplaçons le théorème de préparation de Weierstrass est le théorème de préparation o-minimal de L. van den Dries et P. Speissegger. Nous pensons que cette stratégie devrait être améliorée, pour la raison suivante. La preuve du théorème de préparation o-minimal est non constructive. Ce théorème est en fait valide dans un cadre o-minimal très vaste, bien plus large que notre contexte quasianalytique. Il repose sur l'analyse valuative des différents modèles d'une *théorie* donnée T, supposée o-minimale et polynomialement bornée. Il nous paraît raisonnable de penser que, dans le cadre quasianalytique qui associe à tout germe non nul une série formelle non nulle, cette analyse valuative pourrait être menée constructivement, sans qu'il soit nécessaire de considérer plusieurs modèles de la théorie de $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$.

c) Il y a un autre point de comparaison entre notre méthode et le théorème d'élimination de Denef et van den Dries. On déduit immédiatement de leur résultat le théorème du complémentaire des sous-ensembles sous-analytiques de Gabrielov et l'o-minimalité de la structure $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$. En revanche, pour les structures quasianalytiques $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ que nous considérons, c'est le chemin inverse qui est suivi :

1. On prouve dans un premier temps la normalisation des germes quasianalytiques, dont on déduit, à l'aide d'une version quasianalytique du *fiber cutting lemma*, le théorème du complémentaire dans le cadre quasianalytique, ainsi que l'o-minimalité de $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ et le fait que $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ soit polynomialement bornée [32] .
2. On déduit de la nature polynomialement bornée de $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ le *théorème de préparation o-minimal*, qui donne une *partie principale* aux fonctions définissables dans $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ [15].
3. L'existence de cette partie principale permet de résoudre les systèmes d'équations quasianalytiques, et d'en déduire l'élimination des quantificateurs (*cf* notre travail) .

Il paraît donc naturel de se demander si l'on peut procéder de façon plus directe. Il nous semble difficile d'aboutir à l'élimination des quantificateurs sans passer par la résolution des systèmes, et donc des équations en termes. En revanche, il n'est pas impossible que la recherche des parties principales des solutions de ces équations puisse se mener par des méthodes classiques, telle que l'analyse du *polyèdre de Newton* des développements de Taylor des germes quasianalytiques.

d) Nous avons signalé durant ce travail, et notamment dans la dernière partie, les divergences entre les différentes versions du théorème de préparation. Nous avons expliqué pourquoi celle due à P. Speisseger et L. Van den Dries ne nous permet pas d'obtenir l'élimination des quantificateurs. La version à laquelle nous aboutissons dans le théorème 7.5 diffère de celle de J.M. Lion et J.P. Rolin par la forme de l'unité. Tandis que notre unité est un terme borné, celle obtenue dans l'article [26] est la composition d'une unité de l'algèbre avec un morphisme de réduction $\psi = \left(\phi_1, ..., \phi_s, \left(\frac{y-\theta}{a}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{b}{y-\theta}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$. Ce degré supplémentaire de précision permet dans la suite de l'article [26] de justifier un théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles. D'autre part, préciser la forme de notre unité dans le théorème 4.17 de préparation des fonctions de l'algèbre nous a permis de construire un processus de réduction des termes à proximité des racines. Ces deux arguments nous incitent à penser qu'il serait pertinent d'obtenir, pour les fonctions définissables, un théorème de préparation précisant la nature de l'unité.

Bibliographie

[1] E. Bierstone and P. D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1988), no. 67, 5–42.

[2] E. Borel, *Sur la généralisation du prolongement analytique*, C. R. Acad. Sci. **130** (1900), 1115–1118.

[3] ———, *Sur les séries de polynômes et de fractions rationnelles*, Acta Math. **24** (1901), 309–387.

[4] Bourbaki, *Livre II : Algèbre*, Chapitre IV : appendice séries formelles

[5] T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthier Villars, 1926.

[6] C. L. Childress, *Weierstrass division in quasianalytic local rings*, Canad. J. Math. **28** (1976), no. 5, 938–953.

[7] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, Dip. Mat. Univ. Pisa, Dottorato di Ricerca in Matematica, 2000, Dipartimento di Matematica Dell'Universita di Pisa.

[8] J. Denef and L. van den Dries, *p-adic and real subanalytic sets*, Ann. of Math. (2) **128** (1988), no. 1, 79–138.

[9] A. Denjoy, *Sur les fonctions quasi-analytiques de la variable réelle*, C. R. Acad. Sci. Paris **123** (1921), 1320–1322.

[10] L. van den Dries, *Remarks on Tarski's problem concerning* ($\mathbf{R}, +, \cdot$, exp), Logic colloquium '82 (Florence, 1982), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 97–121.

[11] ———, *A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem and some nondefinability results*, Bulletin of the American Mathematical Society (1986), no. 15, 189–193

[12] ———, *Tame topology and o-minimal structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[13] L. van den Dries, A. Macintyre, and D. Marker, *The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), no. 1, 183–205.

[14] L. van den Dries and P. Speissegger, *The field of reals with multisummable series and the exponential function*, Proc. London Math. Soc. (3) **81** (2000), no. 3, 513–565.

[15] ———, *O-minimal preparation theorems*, Model theory and applications, Quad. Mat., vol. 11, Aracne, Rome, 2002, pp. 87–116. MR 2159715 (2006m :03063)

[16] ———, *The real field with convergent generalized power series*, Transactions of the american mathematical society (1998), no. 350, 4377–4421

[17] A. Gabrielov, *Complements of subanalytic sets and existential formulas for analytic functions*, Invent. Math. **125** (1996), no. 1, 1–12.

[18] ———, *Projections of semianalytics sets*, Functional Analysis and its Applications (1968), no. 2,282–291

[19] O. Le Gal, *Modèle complétude des structures o-minimales polynomialement bornées*, 2006, Université de Rennes 1

[20] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, Geometric Galois actions, 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, With an English translation on pp. 243–283, pp. 5–48.

[21] J. Hadamard, *Sur la generalisation de la notion de fonction analytique*, Bull. Soc. Math. France **40** (1912), 28–29.

[22] H. Hironaka, *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Istituto Matematico "L. Tonelli", Pisa, 1973.

[23] A. G. Khovanskiĭ, *Real analytic manifolds with the property of finiteness, and complex abelian integrals*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **18** (1984), no. 2, 40–50.

[24] ———, *Fewnomials*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, Translated from the Russian by Smilka Zdravkovska.

[25] J.-M. Lion and J.-P. Rolin, *Volumes, feuilles de Rolle de feuilletages analytiques et théorème de Wilkie*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **7** (1998), no. 1, 93–112.

[26] ———, *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles*, Annales de l'institut Fourier (1997), no. 47, 859–884"

[27] ———, *Intégration des fonctions sous-analytiques et volumes des sous-ensembles sous-analytiques*, Annales de l'institut Fourier (1998), no. 48, 755–767

[28] D.J. Miller, *A Preparation Theorem for Weierstrass Systems*, Transactions of the american mathematical society **358** (2006), no. 10, 4393–4439

[29] R. Moussu and C. Roche, *Théorèmes de finitude pour les variétés pfaffiennes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), no. 1-2, 393–420.

[30] William F. Osgood, *On functions of several complex variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), no. 1, 1–8.

[31] A. Rambaud, *Quasi-analycité, o-minimalité et élimination des quantificateurs* , Thèse de l'Université Paris 7(2005).

[32] J.-P. Rolin, P. Speissegger, and A. J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 4, 751–777.

[33] A. Seidenberg, *A new decision method for elementary algebra*, Ann. of Math. (2) **60** (1954), 365–374.

[34] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., 1951, 2nd ed.

[35] A. J. Wilkie, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 4, 1051–1094.

[36] ———, *A theorem of the complement and some new o-minimal structures*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), no. 4, 397–421.