

**UBFC**

UNIVERSITÉ  
BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ



**Thèse de doctorat de l'établissement Université Bourgogne Franche-Comté  
préparée au Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne**

École Doctorale n° 553  
École Doctorale Carnot Pasteur

**Doctorat de Physique**

Par

**Kilian Baudin**

**Dynamique et turbulence d'ondes dans les systèmes  
optiques multimodes**

Thèse présentée et soutenue à Dijon, le 17 Décembre 2021, devant le jury composé de :

|                              |  |                       |
|------------------------------|--|-----------------------|
| <b>M. Abdelmajid Taki</b>    | Professeur (Université de Lille)                             | Président, Rapporteur |
| <b>M. Alessandro Tonello</b> | Maître de Conférence (Université de Limoges)                 | Rapporteur            |
| <b>M. Josselin Garnier</b>   | Professeur (École Polytechnique, Palaiseau)                  | Examineur             |
| <b>Mme. Katarzyna Krupa</b>  | Chargée de Recherche (Institut de Physique Chimie, Varsovie) | Examinatrice          |
| <b>Mme. Claire Michel</b>    | Maître de Conférence (Université Côte d'Azur, Nice)          | Examinatrice          |
| <b>M. Iacopo Carusotto</b>   | Directeur de Recherche CNR (Université de Trento)            | Examineur             |
| <b>M. Guy Millot</b>         | Professeur (Université Bourgogne Franche-Comté)              | Directeur de thèse    |
| <b>M. Antonio Picozzi</b>    | Directeur de Recherche (Université Bourgogne Franche-Comté)  | Co-directeur de thèse |

Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne,  
UMR 6303 CNRS-Université Bourgogne Franche-Comté,  
9 Avenue Alain Savary, BP 47870,  
F-21078 DIJON Cedex, FRANCE



*Why couldn't you beat a richer club? I've never seen a bag of money score a goal.*

Johan Cruyff

Pour toi, Asmaa.

# Remerciements

Cette thèse n'a pas commencé en octobre 2018 mais quelques mois plus tôt, en avril, alors que j'étais stagiaire au CEA de Valduc ne sachant pas ce que j'allais faire plus tard. Pendant la pause du midi, je consultais mes mails sur un des rares ordinateurs connectés à internet, l'un d'eux intitulé «Offre thèse i-site» fit basculer ma vie. L'expéditeur n'était autre que Guy Millot, avec qui nous convenions d'un rendez-vous à son bureau. Au bout d'une demi-heure à parler du sujet de thèse, Guy me lance *«j'ai vu d'ailleurs que tu aimais le foot... tu préfères qui entre Messi et Ronaldo ? - Messi - Ah... moi aussi»* avec un sourire. Il s'en suivit alors une conversation de plus d'une heure sur le football où je me revois sortir mon iPhone pour montrer le deuxième but de Messi face au Bayern Munich en 2015. J'ai ensuite rencontré mon futur co-directeur de thèse Antonio Picozzi, je reconnais que je fus happé par l'immensité du monde qu'il me présentait, le tout en prononçant une phrase qui restera un principe dans ma vie : *«plus tu apprends des choses, plus tu deviens humble»*. Je peux dire très sincèrement que je n'aurais pu avoir de meilleurs directeurs de thèse, à la fois pourvus d'un soutien salubre mais également d'une exigence nécessaire. Cette thèse fut bien sûr bâtie à partir d'un humble travail, mais ce dernier a été valorisé, sublimé, et perfectionné par vos soins, je vous dois donc mes premiers remerciements.

Il est naturel ensuite de remercier le jury de ma soutenance de thèse pour la qualité et la richesse des échanges, où il a été principalement demandé mon expertise sur de futurs projets plutôt que des justifications sur d'éventuelles faiblesses dans mes travaux. Je garderai ainsi un souvenir fort de cette journée, comme un passage en tant que docteur non seulement par le titre mais aussi par la considération de mes pairs. Plus spécialement, je remercie Alessandro Tonello d'avoir été rapporteur, à la fois de mon comité de suivi de thèse mais aussi lors de ma soutenance, je garderai précieusement votre rapport élogieux dont la première lecture me laissa sans voix. Je remercie chaleureusement Abdelmajid Taki d'avoir été dans des circonstances exceptionnelles, à la fois rapporteur et président de mon jury de thèse. Je me souviendrai toujours avec émotion du moment solennel où vous me décernez le titre de docteur, ce fut un grand honneur de recevoir vos félicitations.

Mes années d'études à la Faculté des Sciences et Techniques de Dijon n'auraient pas été aussi enrichissantes sans les qualités humaines et pédagogiques des professeurs. Je pense tout d'abord à Frédéric Chaussard pour son dévouement en cours ainsi qu'en travaux pratiques, mais également pour son grand soin apporté à la direction de notre master. Il faut associer Edouard Hertz dont la pédagogie nous a permis de comprendre beaucoup plus facilement des mécanismes complexes en optique. Je garderai toujours un excellent souvenir des cours de chimie avec Christine Gautheron en L1, qui ont failli m'amener à poursuivre mes études dans cette discipline. Heureusement, les cours de chimie avec d'autres professeurs en L2 m'ont rapidement ramené à la raison. Je remercie Christophe Finot pour m'avoir encadré en stage de Master 1. Enfin bien sûr, je me dois de remercier Guy Millot en tant que professeur, dont je résumerais les qualités par une phrase prémonitrice que j'ai prononcée en L3 : *«ça doit vraiment être cool de faire une thèse avec lui»*.

Je tiens à remercier les doctorants et post-doctorants avec qui j'ai pu échanger, toujours dans une bonne ambiance : Karolina, Anastasiia, Jérémie, Adrien, Alexandre, Émilien,

Manon, Alix, Moïse, Gang. Mais également les permanents pour des discussions toujours riches : Pierre, Julien, Frédéric. Ainsi que le personnel administratif du laboratoire ICB pour leur travail qui a grandement facilité le mien : Ibtissam, Claire, Émeline, Karine. Mais je dois surtout remercier Nicolas, avec qui j'ai eu la chance de travailler pendant une année dans des expériences diverses et variées, pas toujours dans la réussite mais constamment dans la bonne humeur. Je pense très sincèrement que ma dernière année de doctorat n'aurait pas été aussi agréable sans tous nos échanges, qu'ils soient scientifiques ou non, surtout lorsque comme dit le proverbe de notre équipe, « *c'est bon pour ta carrière* ».

Un passage important dans ma vie, tant sur le plan professionnel que personnel, fut mon stage de Master 2 au CEA de Valduc. Il me revient alors de remercier Isabelle pour avoir dirigé mon stage en faisant toujours preuve de bienveillance à mon égard. Je dois également saluer Rémy pour ses précieux conseils sur les lasers femtosecondes, grâce auxquels j'ai gagné un temps précieux dans mes expériences. J'ai aussi pensé pour Cédric qui m'a toujours soutenu, ainsi que pour les personnes avec lesquelles j'ai pu échanger, toujours avec une bonne humeur : Marc, Sandrine, Romain, Léa, Julien, Frédéric, Sylvère, Alexis, Grégory. Mais surtout, moi qui suis fils unique, j'ai eu la chance d'avoir une personne qui fut comme une grande soeur pour m'épauler durant ces quelques mois. Je vais ainsi citer mon rapport de stage : j'ai le souvenir de mille bons moments, alors mille merci, Manon.

De la première année de licence jusqu'au doctorat, j'ai eu l'immense privilège d'avoir un ami sur lequel j'ai pu compter et avec qui j'ai partagé bon nombre de moments de joie. Parmi eux, les soirées légendaires chez papa Thibaut où l'on refaisait le monde, mais aussi les fous rires en cours, pour tout et surtout pour n'importe quoi. Durant toutes ces années à Mirande, de la BU aux amphis en passant par les salles de TP, des amis sont venus et partis : Julien, Aldric, Emrick. Mais seuls nous deux étions assez fous pour aller jusqu'au doctorat, la vie a fait que tu es parti avant de l'avoir fini. Mais je considère que sans toi, jamais je n'aurais écrit ces lignes, cette thèse est donc en partie la tienne, Jérémy.

Ces trois années de thèse furent une période propice à de magnifiques rencontres, notamment avec des docteurs et doctorants de disciplines très éloignées de la mienne. De ces rencontres sont nées de fortes amitiés, où la thèse n'est qu'un trait d'union parmi l'entraide et les valeurs communes. Tous les moments que l'on a partagé m'ont profondément enrichi, des discussions sérieuses aux parties de bowling, des anniversaires «surprises» à la célébration de 2-3 mariages. Tout cela m'a grandement aidé durant les derniers mois de la thèse, je vous dois donc de sincères remerciements en vous souhaitant le meilleur : Alper, Sonia, Aboubakar, Rawaa, Mohammed, Andréa, Matthieu, Adil, Wafaa, Thibaut.

Il y a des amitiés nouées pendant cette thèse mais il y a également celles qui m'ont amenées à aller aussi loin, depuis maintenant 10 ans. Forgé depuis le lycée, ce lien n'a eu de cesse de s'agrandir au fil des événements mémorables que nous avons vécus. En commençant par les parties de «football» (ou du «mur») dans les couloirs du lycée avec une balle de tennis, ou bien une balle faite à partir de nos contrôles d'anglais, le tout enroulé par du scotch volé en SI. Il faut évidemment ajouter les parties de cartes, souvent entachées d'irrégularités dont les coupables ne seront pas dénoncés. Tout cela s'inscrit dans une longue lignée remplie de moments magiques qui certes se sont raréfiés avec le temps, mais qui resurgissent à chaque fois que l'on se retrouve, même si je dois me marier pour que cela arrive. Nous pouvons être fier de ce que nous avons accompli, c'est un honneur pour moi d'être votre ami, alors un très grand merci : Mathis, Julien, Thibaut, Mickaël.

Au-delà de l'amitié, il y a l'amour, et je suis être extrêmement chanceux d'être né dans une famille qui en possède à foison. Je suis reconnaissant envers mes parents de m'avoir enseigné la valeur du travail et d'avoir veillé à ce que l'enfant timide que j'étais puisse s'épanouir afin de devenir l'homme que je suis. Au fil du temps, je réalise le bonheur dans lequel j'ai grandi, ce qui est un privilège réservé à peu. Je me dois de rester humble car si je suis devenu docteur aujourd'hui, c'est principalement dû au fait que mes parents ont entièrement financé mes études, m'octroyant le luxe de devoir uniquement me focaliser sur mon travail. Et malgré tout cela, vous continuez encore de me dire que vous êtes pour peu dans ma réussite. Mais je vous le répéterai toujours, Maman, Papa, infiniment merci.

Je tiens enfin à remercier celle qui fut ma plus fidèle supportrice durant la majeure partie de cette thèse, et qui a dit oui pour le rester toute ma vie. De notre rencontre improbable en formation doctorale où je fus immédiatement transporté par le son de ta voix jusqu'au moment où j'écris ces lignes, tu n'auras eu de cesse de nous bâtir un bonheur dont je n'aurais osé rêver. Tu m'accordes le privilège de n'avoir à regretter aucun de mes choix en 26 ans, car ils m'auront amené jusqu'à toi, jusqu'à nous comme une évidence. Chaque jour tu me donnes la force de réaliser des choses qui me semblaient impossibles (et insensées), le meilleur exemple étant notre mariage pendant nos doctorats en plein milieu d'une crise sanitaire. Mais si chaque personne remerciée ici a contribué de près ou de loin à ma réussite, à l'image de notre union, tu as fait de ma thèse une fête. Je te remercierai éternellement pour ton soutien qui peut se résumer en une citation : «*mais chéri, tu l'auras ta courbe de conversation (condensation)*», oui je l'ai eue, mais tu m'as donné tellement plus, Asmaa.

Auguste Comte disait «les morts gouvernent les vivants» et Raymond Aron ajoutait «l'histoire est tragique». Par ces citations, j'aimerais remercier ceux qui sont malheureusement partis trop tôt pour me voir devenir docteur. J'ai une pensée toute particulière pour mes deux grands parents Marie et Paul auprès de qui j'ai passé une partie de mon enfance, le jus de raisin en brique devenant ma propre madeleine de Proust. J'ai le souvenir poignant juste après mon bac de ma grand-mère me montrant un article de journal prémonitoire, qui brossait le portrait d'un docteur en physique fraîchement diplômé et provenant de mon lycée. Il y aura toujours dans mon cœur Mixou, un petit être ronronnant qui m'a accompagné pendant 15 ans, de l'école primaire jusqu'au doctorat. À ses côtés se tient Brutus qui l'a rejoint, ils ne sont pas connus ici-bas mais l'idée qu'ils soient ensemble m'apaise. Qu'ils soient récompensés pour tout l'amour et le bonheur qu'ils ont apportés à la maison.

Ceux qui me connaissent savent qu'il m'est impossible de ne pas évoquer mon idole, «*le seul, l'unique, celui qui ne se répétera jamais*» (Omar Da Fonseca) : Lionel Messi. Je suis béni non seulement de grandir avec ses exploits sportifs, mais aussi d'avoir pu le voir jouer au Camp Nou 5 fois (et évidemment marquer 5 buts). Il peut sembler étrange de remercier un joueur de football, mais ce sentiment est vite balayé lorsque vous faites partie des 90 000 personnes à scander son nom après son but lors d'un match de ligue des champions face au Borussia Dortmund. Il m'est difficile d'avoir les mots pour décrire sa magnificence alors je vais citer le commentateur américain Ray Hudson : «He knows the laws of physics mais but they don't know him. If Issac Newton was watching this man, he would be saying "boy, was I wrong?".». Mon père m'a transmis l'amour du FC Barcelone, alors il est tout naturel de finir ces remerciements par : *Visca el Barça i visca Catalunya!*



---

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Turbulence d'ondes optiques . . . . .   | 1         |
| 1.2      | Equation cinétique de turbulence d'ondes : Condensation et thermalisation   | 2         |
| 1.3      | Impact d'une réponse non-locale dans l'espace : Formalisme de Vlasov . . .  | 3         |
| 1.4      | Impact d'une réponse non-instantanée en temps : Turbulence faible de Langmuir . . . . .                             | 5         |
| 1.5      | Observation de la diffusion Raman stimulée : utilisation des fibres à coeur creux . . . . .                         | 6         |
| <b>2</b> | <b>Thermalisation et condensation d'ondes optiques : Description théorique</b>                                      | <b>9</b>  |
| 2.1      | Introduction et motivation . . . . .  | 10        |
| 2.2      | Thermalisation et condensation d'ondes en milieu homogène . . . . .   | 11        |
| 2.3      | Thermalisation et condensation en fibre optique à gradient d'indice . . . .   | 14        |
| 2.4      | Équations cinétiques avec désordre et simulations . . . . .   | 18        |
| 2.5      | Turbulence d'ondes et impact du désordre . . . . .  | 22        |
| 2.6      | Désordre corrélé et partiellement corrélé . . . . .   | 29        |
| 2.7      | Régime mixte cohérent-incohérent correspondant aux expériences . . . . .  | 31        |
| 2.8      | Gel et ralentissement du processus de condensation . . . . .  | 36        |
| 2.9      | Conclusion . . . . .  | 40        |
| <b>3</b> | <b>Thermalisation et condensation d'ondes optiques : Observation en fibre optique multimode à gradient d'indice</b> | <b>43</b> |
| 3.1      | Introduction de l'expérience . . . . .  | 44        |
| 3.2      | Description de l'expérience . . . . .   | 44        |
| 3.3      | Observation de la thermalisation vers Rayleigh-Jeans . . . . .  | 49        |
| 3.4      | Observation de la transition de phase de condensation . . . . .   | 56        |
| 3.5      | Propriétés thermodynamiques de la condensation d'ondes classiques . . . .   | 61        |
| 3.6      | Conclusion et perspectives . . . . .  | 64        |
|          | Appendice A : Stabilité du condensat en fibre optique multimode . . . . .   | 66        |
| <b>4</b> | <b>Formation de solitons «cachés» dans des structures gravitationnelles incohérentes</b>                            | <b>69</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .  | 71        |
| 4.2      | Equation de Newton-Schrödinger . . . . .  | 73        |
| 4.3      | Mise en évidence du soliton dans l'espace des phases . . . . .  | 75        |
| 4.4      | Formalisme couplé cohérent-incohérent . . . . .   | 82        |
| 4.5      | Soliton piégé par la structure incohérente localisée . . . . .  | 85        |
| 4.6      | Stabilisation du soliton par la structure incohérente . . . . .   | 92        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.7      | Conclusion et perspectives . . . . .   | 94         |
|          | Appendice A : Simulation de Newton-Schrödinger dans une boîte finie . . . . .                                | 101        |
|          | Appendice B : Transformation d'échelle pour les équations couplées Newton-Schrödinger et WT-Vlasov . . . . . | 101        |
|          | Appendice C : Soliton binaire, dynamique 3D . . . . .  | 104        |
|          | Appendice D : Le théorème du viriel pour l'équation WT-Vlasov en dimension spatiale $d$ . . . . .            | 108        |
|          | Appendice E : La structure incohérente pour $d = 1$ et $d = 3$ . . . . .                                     | 109        |
| <b>5</b> | <b>Diffusion Raman stimulée en fibre à coeur creux remplie de CO<sub>2</sub></b>                             | <b>115</b> |
| 5.1      | Introduction et motivation . . . . .   | 116        |
| 5.2      | Description de l'expérience . . . . .  | 117        |
| 5.3      | Observation de la diffusion Raman stimulée en fibre HC-PCF remplie de CO <sub>2</sub> . . . . .              | 120        |
| 5.4      | Simulations numériques de l'équation de Schrödinger non linéaire . . . . .                                   | 125        |
| 5.5      | Conclusion . . . . .   | 127        |
| <b>6</b> | <b>Conclusion et perspectives</b>  | <b>129</b> |
| 6.1      | Conclusion . . . . .   | 129        |
| 6.2      | Perspectives . . . . .   | 131        |
|          | <b>Annexe A Turbulence faible de Langmuir dans les fibres optiques multi-modes désordonnées</b>              | <b>141</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>159</b> |
|          | <b>Publications et conférences</b>   | <b>175</b> |
|          | <b>Résumé &amp; Abstract</b>   | <b>177</b> |

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Turbulence d'ondes optiques

Dans son sens le plus large, la turbulence d'ondes optique désigne l'étude de la propagation d'ondes optiques partiellement cohérentes dans des milieux non linéaires. De nos jours, l'optique non linéaire avec des ondes incohérentes recouvre de nombreux domaines de recherches, comme la génération de supercontinuum dans les fibres à cristaux photoniques [1], la superfluidité [2–4], les lasers aléatoires [5], la filamentation [6], la thermalisation de lumière [7], ou encore la formation de vagues d'amplitudes extrêmes («vagues scélérates») dans un environnement d'ondes aléatoires [8–11]. On peut souligner que l'étude de l'optique non linéaire avec des ondes incohérentes peut être considérée comme une branche particulière de la turbulence développée [7, 12–15].

On rencontre la turbulence d'ondes dans de très nombreux systèmes : aux petites échelles dans les condensats de Bose-Einstein, ou bien en hydrodynamique aux échelles intermédiaires, ou encore en astrophysique aux très grandes échelles. Il est intéressant de remarquer que l'optique (linéaire) statistique d'une part et l'optique non linéaire avec des sources lasers cohérentes d'autre part, se sont développées indépendamment l'une de l'autre. On note à ce propos l'absence de livres traitant de «l'optique non linéaire statistique». La théorie de turbulence d'ondes offrirait un cadre théorique approprié pour le développement d'une formulation de l'optique non linéaire statistique.

Dans cette introduction nous allons donner un panorama simplifié de différents régimes de turbulence d'ondes qui sont rencontrés et étudiés en optique. Les simulations numériques de l'équation décrivant la propagation du champ optique dans un milieu non linéaire (typiquement une version généralisée de l'équation de Schrödinger non linéaire) révèlent des comportements variés suivant que l'on considère une réponse du milieu non linéaire qui peut être non-locale dans l'espace ou non-instantanée en temps, ou bien suivant les propriétés des fluctuations du champ qui peuvent être statistiquement homogènes ou inhomogènes dans l'espace ou le temps (i.e. statistique stationnaire ou non-stationnaire) [7]. Dans le cadre de la théorie de turbulence d'ondes on peut dériver différentes formes d'équations cinétiques, lesquelles permettent de capturer les propriétés essentielles des différents régimes mis en évidence par simulations numériques, comme par exemple l'effet de thermalisation, la formation de structures incohérentes stables à grande échelle loin de l'équilibre thermodynamique, ou encore la génération de structures solitoniques constituées de champs optiques incohérents.

## 1.2 Equation cinétique de turbulence d'ondes : Condensation et thermalisation

La théorie de turbulence d'ondes fournit une description détaillée de l'évolution de systèmes d'ondes aléatoires dispersives dans un régime où les effets linéaires de dispersion dominant les effets non linéaires. Ceci est clairement illustré par le processus de thermalisation d'une onde lors de sa propagation dans un milieu non linéaire de type Kerr. Pour présenter ce phénomène on peut considérer dans un premier temps la situation la plus simple dans laquelle une onde partiellement incohérente (e.g., speckle monochromatique) se propage dans le milieu Kerr pour lequel on peut supposer la réponse locale et instantanée. Bien que la propagation de l'onde soit formellement réversible (comme illustré par l'effet de conjugaison de phase), l'onde optique va néanmoins évoluer irréversiblement vers l'état d'équilibre thermodynamique au cours de sa propagation. Ce processus de thermalisation peut être interprété en analogie avec celui bien connu en théorie cinétique des gaz, où les collisions des particules sont responsables d'un processus de thermalisation vers l'état d'équilibre, voir Figure 1.1. Cette analogie apparaît de façon claire dans le régime faiblement non-linéaire («gaz dilué») où les effets de dispersion (diffraction) linéaires dominant l'effet Kerr non linéaire. Dans ce cadre, la théorie de turbulence d'ondes permet de dériver une équation cinétique décrivant l'évolution du spectre de l'onde au cours de sa propagation [12, 14, 15]. Cette équation cinétique a la même structure que l'équation cinétique de Boltzmann pour un gaz dilué. En particulier, l'irréversibilité formelle de l'équation cinétique s'exprime mathématiquement par un théorème  $H$  de croissance monotone de l'entropie, ce qui décrit une augmentation de «désordre» de l'onde jusqu'à ce que l'état d'équilibre soit atteint (état le plus «désordonné»).

Pour un système d'ondes classiques, l'état d'équilibre thermodynamique qui réalise le maximum d'entropie correspond au spectre de Rayleigh-Jeans. Un aspect important à souligner est que, contrairement à la distribution d'équilibre de Boltzmann pour un gaz classique, la distribution de Rayleigh-Jeans exhibe une singularité pour le mode fondamental du système. Cette singularité trouve son origine dans la singularité de la distribution de Bose, laquelle est responsable de l'effet de condensation de Bose-Einstein de particules quantiques. L'analyse de cette singularité révèle qu'un système d'ondes classiques exhibe un effet de condensation dont les propriétés thermodynamiques sont en fait analogues à celles d'un gaz de Bosons dilué et homogène [16]. Cet effet de condensation d'ondes classiques se traduit par la formation d'une onde homogène cohérente («condensat»), laquelle reste immergée dans une mer de fluctuations d'ondes incohérentes («particules non condensées»). Il est en fait thermodynamiquement avantageux pour le système de générer cette onde homogène, car ceci permet d'augmenter la quantité de désordre (entropie) au sein du système.

Il est important de rappeler que, contrairement à un système quantique, un système d'ondes classiques nécessite l'introduction d'une fréquence de coupure afin de régulariser la catastrophe ultraviolette propre à un champ classique, laquelle se traduit par la divergence de la puissance et de l'énergie cinétique de l'onde à l'équilibre. Ce problème peut être contourné en considérant une configuration guidée du champ optique, laquelle introduit naturellement une fréquence de coupure effective pour le champ optique [17]. On peut considérer par exemple une fibre optique multimode, dont le nombre fini de modes guidés

introduit une fréquence de coupure qui régularise la catastrophe ultraviolette inhérente au champ classique. C'est précisément dans ce cadre qu'un processus remarquable de «nettoyage de faisceau optique» a été récemment découvert dans les fibres optiques multimodes à gradient d'indice [18–20]. Différentes explications possibles de cette découverte ont été proposées et sa compréhension reste toujours débattue à l'heure actuelle [21–27]. D'un point de vue théorique, le lien entre cet effet de nettoyage de faisceau optique et le processus de condensation d'ondes a fait partie intégrante de la thèse de A. Fusaro [28]. Dans ce cadre, il a été montré en collaborant avec J. Garnier (Ecole Polytechnique, Palaiseau) que l'effet de désordre qui caractérise la propagation de la lumière dans une fibre optique multimode est responsable d'une accélération significative du processus de thermalisation et condensation d'ondes [21, 22]. Ce résultat peut aider à comprendre certains régimes du phénomène de «nettoyage de faisceau optique», aspect qui sera discuté en détail au Chapitre 2 de ce manuscrit. Un résultat majeur de mon travail de thèse a été de mettre en évidence expérimentalement l'effet de condensation d'ondes optiques et le phénomène associé de thermalisation vers la distribution de Rayleigh-Jeans lors de la propagation du champ en fibre optique multimode. Plus précisément, j'ai pu mettre en évidence expérimentalement la transition de phase vers l'état condensée de la lumière qui se caractérise par une population macroscopique du mode fondamental de la fibre optique [26, 27]. Ce travail expérimental réalisé à l'ICB en collaboration avec K. Krupa sera présenté en Chapitre 3 de ce manuscrit. Dans ce cadre, nous avons également clarifié en collaboration avec S. Rica (Un. A. Ibañez, Chili) les propriétés thermodynamiques de la condensation d'ondes classiques, ainsi que leurs différences avec la condensation de Bose-Einstein quantique. Notons enfin que cet effet de condensation a lieu dans un système conservatif, il est donc de nature différente des effets de condensation de photons mis en évidence dans des cavités optiques en présence de thermostats [29–32], voir en particulier le récent article revue [33].

### 1.3 Impact d'une réponse non-locale dans l'espace : Formalisme de Vlasov

Comme discuté avec l'exemple de condensation d'ondes ci-dessus, l'évolution d'un système d'ondes turbulent peut être caractérisé par la formation d'une structure cohérente. On peut noter que, dans certains régimes, la génération spontanée d'un soliton cohérent dans un régime turbulent peut être également interprétée comme un effet de «condensation» d'ondes [15, 34]. Une idée importante communément admise pour les systèmes non intégrables est que la formation d'un état solitonique cohérent joue le rôle d'un «attracteur statistique» pour le système conservatif Hamiltonien : il est thermodynamiquement avantageux de générer un soliton, car cela permet au système d'augmenter la quantité de désordre («entropie») sous la forme de fluctuations aux petites échelles [35–39]. En effet, la solution soliton déploie le minimum d'énergie (Hamiltonien), de sorte qu'en générant un soliton, le système peut stocker le maximum de «désordre» en générant des fluctuations rapides aux petites échelles. Ce scénario de thermalisation en présence d'un soliton est clairement visible dans les simulations de l'équation de Schrödinger non linéaire focalisante. Partant d'un état homogène, l'onde développe l'instabilité modulationnelle (de Benjamin-Feir) suivie par la formation de plusieurs solitons, qui finissent par fusionner en un seul soliton cohérent de grande amplitude qui reste immergé dans une mer de fluctua-

tions aux petites échelles qui thermalisent vers l'équilibre [35–40].

Ce scénario physique devient plus complexe si l'on considère un système non linéaire caractérisé par une interaction non locale dans l'espace. Une interaction non locale signifie que la réponse non linéaire en un point de l'espace n'est pas déterminée uniquement par l'intensité en ce point, mais dépend également de l'intensité au voisinage de ce point. Une interaction non locale constitue donc une propriété générique d'un grand nombre de systèmes non linéaires, comme les condensats dipolaires [41], les vapeurs atomiques [42, 43], les cristaux liquides [39, 44], les liquides thermiques [45], des verres [46], ou les plasmas [47]. En raison de l'interaction non linéaire à longue portée, l'effet de thermalisation ralentit de façon dramatique et une compréhension détaillée de ce processus reste encore un problème ouvert, en relation avec des propriétés importantes comme l'effet de «relaxation violente», la chaleur spécifique négative et la non-équivalence des ensembles thermodynamiques [48, 49]. Le système exhibe alors un comportement collectif à grande échelle décrit par un formalisme analogue à celui décrit par l'équation de Vlasov à longue portée, voir Figure 1.1. Dans ce cadre, le système exhibe un processus de «turbulence de solitons incohérents», dans le sens où il est thermodynamiquement avantageux pour le système de s'organiser en une structure incohérente à grande échelle localisée dans l'espace [50].

Il est intéressant de faire le lien entre cette phénoménologie et l'observation de solitons incohérents en optique dans les matériaux photoréfractifs [51, 52]. Ces structures incohérentes résultent d'un effet d'auto-piégeage spatial de lumière incohérente dans un milieu dont la réponse non linéaire est extrêmement lente, c-a-d, le temps de réponse non-linéaire est beaucoup plus grand que le temps de cohérence de la lumière [53, 54]. Ce type d'expériences dans les systèmes photoréfractifs a stimulé l'étude de la propagation d'ondes optiques non-linéaires partiellement cohérentes, comme l'instabilité modulationnelle induite par des ondes incohérentes ou les solitons «noirs» incohérents [53–55]. Le mécanisme responsable de la formation d'un soliton incohérent provient de l'existence d'un potentiel auto-consistant analogue à celui rencontré dans le cadre du formalisme de Vlasov en physique des plasmas [56–58].

Dans ce travail de thèse, je me suis intéressé à la formation de solitons en partant d'un état homogène en présence d'interactions (gravitationnelles) à longue portée. Nous avons considéré ce problème dans le cadre de l'équation de Schrödinger-Poisson (ou Newton-Schrödinger) qui a aussi fait l'objet de différentes études expérimentales en optique non linéaire [59, 60]. A la différence des travaux antérieurs [50, 61], nous considérons ici le potentiel non-local gravitationnel. La décroissance de ce potentiel étant algébrique, il n'y a pas d'échelle de longueur qui caractérise cette décroissance, ce qui laisse plus de liberté au système. En collaboration avec J. Garnier (Ecole Polytechnique, Palaiseau), nous avons mis en évidence un nouveau régime qui se caractérise par la formation de solitons «cachés» dans le sens où ils sont immergés dans les fluctuations environnantes du champ incohérent. Ces solitons cohérents sont donc difficilement identifiés dans l'évolution spatio-temporelle du champ, alors que leur existence peut être dévoilée dans l'espace des phases. Sur la base d'un formalisme de Vlasov de turbulence d'ondes, nous avons pu montrer que les solitons cohérents sont piégés et stabilisés par les fluctuations incohérentes environnantes [62]. Ce travail sera présenté en Chapitre 4 de ce manuscrit.

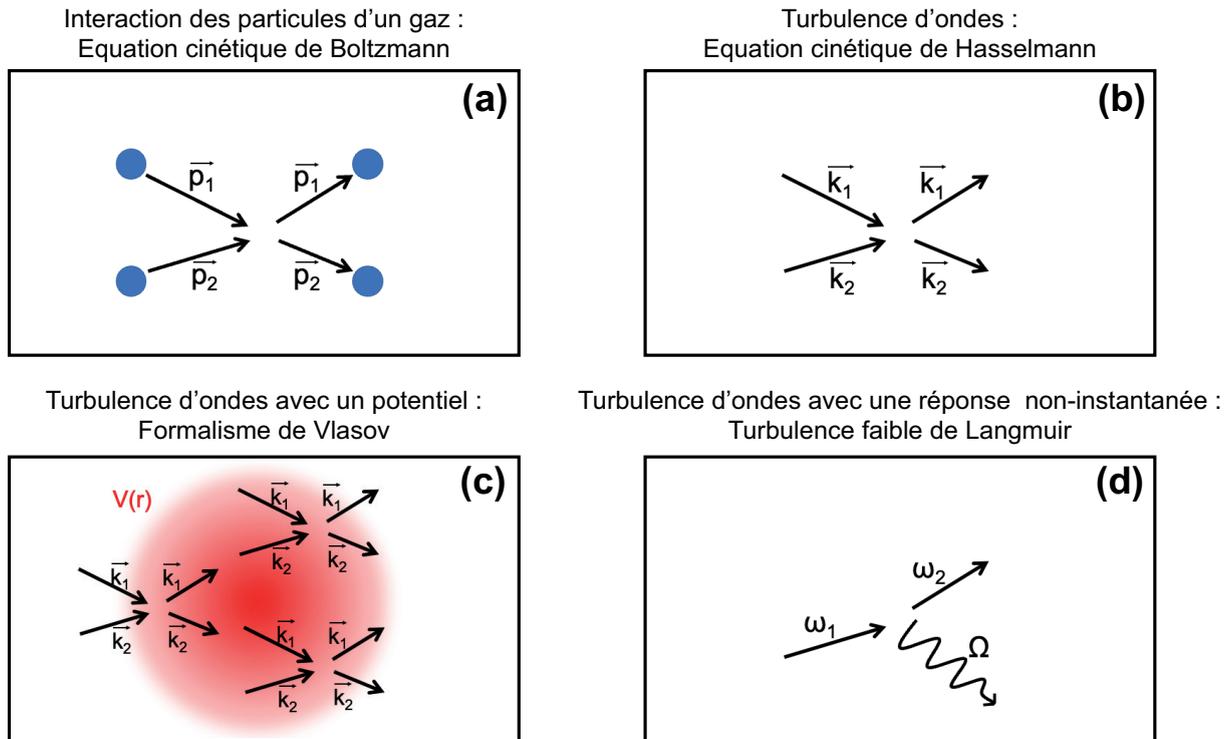


FIGURE 1.1 – Analogie entre un gaz de particules classique et la propagation d'une onde incohérente dans un milieu non-linéaire Kerr. (a) Les collisions de particules sont responsables d'une évolution irréversible du gaz vers un état d'équilibre thermodynamique, comme décrit par l'équation de Boltzmann en théorie cinétique des gaz. (b) D'une façon analogue, l'équation cinétique de turbulence d'ondes et le mélange à quatre ondes sous-jacent à l'effet Kerr décrivent une évolution irréversible de l'onde incohérente vers un état d'équilibre caractérisé par le spectre de Rayleigh-Jeans. (c) En présence d'une réponse non-locale de la non-linéarité, la dynamique du champ est dominée par un potentiel effectif auto-consistant à longue portée, lequel inhibe le processus de thermalisation. Le champ turbulent est décrit par un formalisme de type Vlasov longue-portée analogue à celui utilisé pour décrire les systèmes gravitationnels. (d) En présence d'une réponse non-instantanée, la propriété de causalité de la fonction réponse modifie les interactions : l'effet non-linéaire s'accompagne d'une excitation matérielle (vibration moléculaire dans l'exemple de l'effet Raman). La dynamique est alors décrite par un formalisme cinétique de même forme que celui développé pour décrire la turbulence faible de Langmuir dans les plasmas.

## 1.4 Impact d'une réponse non-instantanée en temps : Turbulence faible de Langmuir

Nous avons considéré dans le paragraphe précédent une réponse non linéaire qui n'est pas locale dans l'espace. D'une façon analogue on peut considérer une réponse non linéaire qui n'est pas locale en « temps », c'est à dire une réponse non-instantanée. En toute rigueur une réponse non linéaire est toujours caractérisée par un certain temps de réponse caractéristique. Ce temps de réponse doit alors être pris en compte dans le modèle de propagation de l'onde si celui-ci n'est pas négligeable par rapport aux temps qui caractérisent les effets non linéaires ou de dispersion linéaire. Un exemple bien connu dans les

fibres optiques est l'effet de diffusion Raman stimulée [63]. Dans ce cadre il a été montré que la propagation d'une onde incohérente est fortement affectée par le caractère non-instantané de la réponse non linéaire, et plus précisément par la propriété de causalité de la fonction réponse. La théorie de turbulence d'ondes peut être appliquée dans ce cas, ce qui révèle que la propagation de l'onde est décrite par une équation cinétique dont la forme est très différente de celle rencontrée pour une réponse non linéaire instantanée ou non locale, voir Figure 1.1. L'évolution de l'onde est dans ce cas décrite par une équation cinétique dont la structure est analogue à celle dérivée en physique des plasmas pour décrire le régime de turbulence faible de Langmuir [64]. Ce formalisme prédit en particulier l'existence de solitons et d'ondes de chocs incohérentes qui ne sont pas identifiées dans le domaine spatio-temporel, mais uniquement dans le domaine spectral [65, 66]. De plus l'équation cinétique est formellement réversible en «temps», de sorte qu'elle ne prédit pas de processus de thermalisation vers l'état d'équilibre thermodynamique. Ce formalisme prédit en fait que l'onde incohérente s'organise à long terme en solitons spectraux incohérents, lesquels peuvent donc être considérés comme des solutions hors-équilibre stables du champ incohérent.

Dans le cadre de mon travail de thèse, nous avons étendu le formalisme de turbulence faible de Langmuir à la propagation d'ondes optiques dans les fibres multimodes. En d'autres termes, à la différence du régime de thermalisation et condensation d'ondes discuté ci-dessus où les effets d'incohérence temporelle des ondes sont supposés négligeables, on s'intéresse ici à la propagation d'ondes dans les fibres multimodes qui sont temporellement incohérentes. L'originalité essentielle de ce travail a été de prendre en considération les effets de désordre (couplage de modes aléatoires) inhérents à la propagation de la lumière dans la fibre optique multimode. La théorie et les simulations numériques révèlent que la propagation de l'onde en fibre peut être décrite par une équation cinétique de Langmuir remarquablement simple. Ce travail réalisé en collaboration avec J. Garnier (Ecole Polytechnique, Palaiseau) est reporté en Annexe A de ce manuscrit.

## 1.5 Observation de la diffusion Raman stimulée : utilisation des fibres à coeur creux

Le champ d'optique non linéaire basée sur les gaz, fut profondément changé par le développement des fibres à cristaux photoniques à coeur creux (HC-PCF) [67]. Ces dernières ont permis non seulement l'observation de nombreux phénomènes intéressants et inédits [68–70] mais également l'amplification des phénomènes déjà connus comme la diffusion Raman stimulée. En effet, les techniques utilisant des cellules de gaz nécessitent des niveaux de puissance crête de l'ordre du gigawatt pour générer de la diffusion Raman stimulée basée sur les spectres optiques en forme de peigne [71, 72]. Les HC-PCF permettent de réduire fortement ces niveaux de puissances à l'ordre de quelques dizaines de kilowatt grâce à leurs propriétés uniques. En effet, le gaz ainsi que la pompe laser sont confinés au sein de la fibre et guidés sur plusieurs mètres, ce qui augmente considérablement leur longueur d'interaction. La génération de peignes de fréquences ultra-larges par la diffusion Raman stimulée a été largement étudiée dans le cadre du gaz d'hydrogène en HC-PCF, offrant ainsi un seuil Raman très bas [71, 73–78]. Cependant, la perméabilité de la silice avec l'hydrogène nécessite des précautions particulières, notamment lors de l'observation

de la diffusion Raman stimulée à partir de photons Raman spontanés où les pressions sont relativement élevées.

L'alternative intéressante est d'utiliser un gaz de  $\text{CO}_2$  à la place de l'hydrogène dans une HC-PCF, notamment pour étudier la bande rovibrationnelle  $\nu_1$  de la résonance de Fermi  $\nu_1/2\nu_2$  à travers la diffusion Raman stimulée. La branche Q rovibrationnelle de la branche  $\nu_1$  est d'un intérêt fondamental de par sa largeur spectrale extrêmement étroite due aux effets combinés du rétrécissement de Dicke et du mélange collisionnel des raies, ce qui la rend très intense [79–81]. Nous avons donc mis en évidence la génération de façon spontanée d'un spectre Raman en utilisant une HC-PCF remplie de  $\text{CO}_2$  avec une pression n'excédant pas 6 bars et pompée par un seul laser avec une puissance crête ne dépassant pas 40 kW. Ce travail sera présenté en Chapitre 5 de ce manuscrit.



## Chapitre 2

# Thermalisation et condensation d'ondes optiques : Description théorique

*Dans ce chapitre nous allons décrire théoriquement et numériquement les effets de thermalisation et condensation d'une onde optique se propageant dans une fibre optique multimode à gradient d'indice. Nous considérons l'impact du désordre du milieu en prenant en compte l'effet dominant des fluctuations aléatoires des polarisations lors de la propagation de l'onde dans la fibre optique. Nous montrons que la turbulence optique dans les fibres multimodes est décrite par une approche discrète de la théorie de turbulence d'ondes qui ne prends en compte que les résonances exactes. Une équation cinétique prenant en compte l'impact du désordre est dérivée, laquelle révèle que le désordre induit une accélération significative du processus de thermalisation et condensation de l'onde optique. Cet effet de condensation se manifeste par une population macroscopique et stable du mode fondamental de la fibre. Ce phénomène permet de mieux comprendre certains régimes de «nettoyage de faisceau optique» récemment découverts dans les fibres optiques multimodes à gradient d'indice. La nature discrète de la turbulence dans les fibres optiques permettrait également de comprendre la raison pour laquelle l'effet de nettoyage de faisceau optique n'a pas été observé dans les fibres optiques à saut d'indice.*

### Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Introduction et motivation</b> . . . . .  | <b>10</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Thermalisation et condensation d'ondes en milieu homogène</b>                     | <b>11</b> |
| <b>2.3</b> | <b>Thermalisation et condensation en fibre optique à gradient d'indice</b> . . . . . | <b>14</b> |
| <b>2.4</b> | <b>Équations cinétiques avec désordre et simulations</b> . . . . .                   | <b>18</b> |
| <b>2.5</b> | <b>Turbulence d'ondes et impact du désordre</b> . . . . .                            | <b>22</b> |
| <b>2.6</b> | <b>Désordre corrélé et partiellement corrélé</b> . . . . .                           | <b>29</b> |
| <b>2.7</b> | <b>Régime mixte cohérent-incohérent correspondant aux expériences</b> . . . . .      | <b>31</b> |
| <b>2.8</b> | <b>Gel et ralentissement du processus de condensation</b> . . . . .                  | <b>36</b> |
| <b>2.9</b> | <b>Conclusion</b> . . . . .  | <b>40</b> |

---

## 2.1 Introduction et motivation

Dans ce Chapitre nous décrivons les effets de thermalisation et condensation d'ondes optiques lors de leur propagation dans une fibre optique multimode. La motivation est de voir comment la théorie de turbulence d'ondes permet d'éclairer certains régimes de l'effet de «nettoyage de faisceau optique» reporté récemment dans les fibres optiques multimodes à gradient d'indice [18–20, 82]. Ce phénomène remarquable est illustré en Figure 2.1 pour l'expérience reportée par l'équipe de V. Couderc à Limoges [20]. L'expérience est conceptuellement simple. Un faisceau laser délivrant des impulsions longues ( $\sim$ ns) est injecté dans une fibre optique multimode à gradient d'indice (i.e. potentiel de confinement parabolique). La fibre optique a une longueur d'une dizaine de mètres et guide typiquement une centaine de modes (sans inclure les dégénérescences liées à la polarisation). En présence d'une faible puissance du faisceau injecté dans la fibre (régime linéaire), on observe en sortie de fibre un faisceau optique de type «speckle». Ceci est dû au fait que la propagation de la lumière dans la fibre optique est affectée par des fluctuations aléatoires de l'indice de réfraction, ce qui provient des effets de torsions, de courbures ou de variations de la taille du coeur de la fibre lors de sa fabrication ou simplement de l'enroulement de la fibre sur une bobine. Ces effets de désordre introduisent des fluctuations de biréfringences résiduelles ainsi que des couplages aléatoires entre les modes [83]. C'est pour cette raison que la propagation du faisceau optique dans une MMF s'accompagne d'une dégradation de sa cohérence spatiale au cours de la propagation, comme illustré en Figure 2.1. Le résultat remarquable et inattendu reporté en référence [20] est qu'en augmentant la puissance du faisceau laser, la distribution spatiale de l'intensité du faisceau optique se «nettoie» spontanément. Ce phénomène résulte de l'effet non linéaire Kerr, lequel conserve la puissance au cours de la propagation. Une question naturelle est alors de comprendre si ce phénomène peut être lié à l'effet de condensation d'ondes, et dans ce cas comment les effets de désordre lors de la propagation affectent le processus de condensation. Ce travail a fait l'objet d'une étude détaillée lors de la thèse de A. Fusaro [28], travaux auxquels j'ai été introduits et auxquels j'ai participé lors de ma première année de thèse.

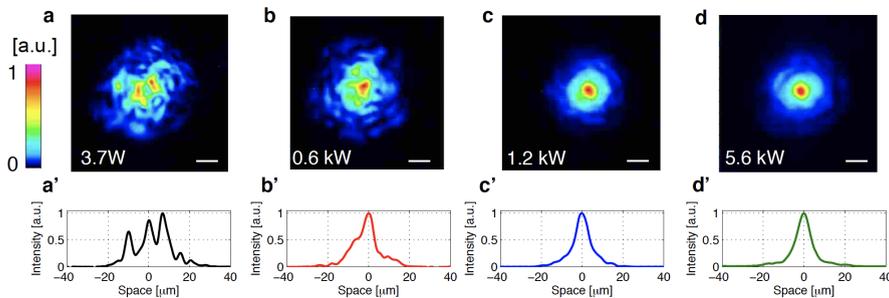


FIGURE 2.1 – Mesures expérimentales de la distribution d'intensité en sortie de fibre GRIN pour différentes puissances (a-d) avec respectivement la coupe des intensités  $I(x, y = 0)$  (a'-d'). La barre d'échelle correspond à  $10\mu m$ . La largeur du mode fondamental de la fibre est  $\text{FWHM}_0 \simeq 9\mu m$ . Figure provenant de l'article [20].

L'explication du phénomène de «nettoyage de faisceau optique» [20] n'est pas communément admise et fait l'objet d'études qui sont en cours. A l'heure actuelle, l'effet de nettoyage de faisceau peut être considéré comme un effet «multi-facettes», dans le sens où il a été mis en évidence dans différents régimes et on ne pense pas qu'un seul mécanisme

puisse expliquer les différentes formes de nettoyage de faisceau observées expérimentalement. Par exemple, l'équipe de V. Couderc de Limoges a montré la possibilité d'obtenir un effet de «nettoyage de faisceau» du mode  $LP_{11}$  [84] en utilisant la même fibre optique multimode pour laquelle le nettoyage de faisceau a été observé sur le mode fondamental  $LP_{01}$ , voir Figure 2.1. Cet effet de nettoyage du mode  $LP_{11}$  ne peut pas être expliqué par la théorie de condensation d'ondes, qui se traduit nécessairement par une population macroscopique du mode fondamental. Cependant l'effet de «nettoyage de faisceau» du mode  $LP_{11}$  nécessite des conditions d'injection dans la fibre particulières et délicates. À la fin de ce Chapitre nous allons voir que les conditions particulières d'injection employées pour observer l'effet de nettoyage de faisceau du mode  $LP_{11}$  entraînent un «gel» (i.e., ralentissement significatif) du processus de thermalisation, ce qui peut naturellement expliquer l'absence de condensation vers le mode fondamental. Cette interprétation semble corroborée par une expérience récente réalisée par l'équipe de V. Couderc qui montre que l'effet de nettoyage du mode  $LP_{11}$  peut être considéré comme un transitoire, dans le sens où il est observé pour des puissances intermédiaires, alors que pour de plus grandes puissances c'est le mode fondamental qui résulte favorisé [85]. A la fin de ce Chapitre nous allons également voir que le «gel» du processus de thermalisation pourrait aussi expliquer que l'effet de «nettoyage de faisceau» n'est pas observé dans une fibre optique multimode à saut d'indice.

Dans les expériences réalisées lors de ma thèse (présentées au Chapitre 3), nous nous sommes spécifiquement concentrés à la démonstration expérimentale de l'effet de condensation. Comme nous allons le voir, le faisceau laser passe à travers un diffuseur (générant un «speckle») avant injection dans la fibre. C'est dans ce régime où un nombre relativement important de modes sont excités en entrée de fibre avec des relations de phases aléatoires que la théorie de condensation discutée dans ce Chapitre peut être appliquée. L'équation cinétique de turbulence d'ondes décrit une évolution irréversible vers l'état d'équilibre (thermalisation), lequel se caractérise par une transition de phase de condensation (population macroscopique du mode fondamental). Cette théorie a été développée en régime purement «spatial», i.e., on considère des impulsions laser suffisamment longues temporellement afin de ne pas prendre en compte les effets temporels de dispersion de vitesse de groupe et de dispersion modale. De cette façon, nous ne considérons pas dans ce travail les expériences de «nettoyage» de faisceau optique réalisées avec des impulsions lasers ultra-courtes (régime femto-seconde) reportées en référence [82]. La description de l'effet de thermalisation récemment reporté expérimentalement dans le groupe de F.Wise [25] nécessiterait une extension non-triviale au domaine spatio-temporel de la théorie de turbulence d'ondes reportée dans ce Chapitre.

## 2.2 Thermalisation et condensation d'ondes en milieu homogène

### 2.2.1 Modèle de Schrödinger non linéaire

Dans cette section nous introduisons les effets de thermalisation et condensation d'ondes dans une configuration idéale et simplifiée d'un système spatialement homogène en l'absence de guide d'onde. L'avantage de cette configuration est que l'équation cinétique

prends une forme simplifiée et que les simulations numériques permettent de mettre facilement en évidence l'effet de condensation et de thermalisation.

Nous considérons la forme générique de l'équation de Schrödinger non linéaire à deux dimensions (2+1)D, laquelle décrit l'évolution du profil transverse spatial d'une onde optique mono-chromatique :

$$i\partial_z\psi = -\alpha\nabla^2\psi - \gamma|\psi|^2\psi, \quad (2.1)$$

où  $\alpha = 1/(2k_0)$  désigne le coefficient de diffraction et  $k_0$  est le nombre d'onde du laser. Par ailleurs  $\gamma$  est le coefficient Kerr non linéaire. Nous considérons dans ce paragraphe le cas d'un milieu défocalisant ( $\gamma < 0$ ) pour que l'onde homogène (qui représente le condensat), soit modulationnellement stable. Notons que dans une fibre optique, l'effet Kerr est focalisant. La stabilité du condensat dans une fibre optique multimode sera discuté en Appendice du Chapitre 3. Le Laplacien en équation (2.1) s'applique aux deux dimensions spatiales  $\mathbf{r} = (x, y)$  dans le plan transverse perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde selon l'axe  $z$ . L'équation NLS (2.1) conserve la puissance  $N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}$  et l'énergie totale  $H = E + U$  qui a une contribution linéaire  $E = \alpha \int |\nabla\psi|^2 d\mathbf{r}$  et une contribution non linéaire  $U = -(\gamma/2) \int |\psi|^4 d\mathbf{r}$ .

L'évolution du champ  $\psi$  est donc affectée par l'effet de diffraction linéaire sur une longueur de propagation caractéristique donnée par  $L_{\text{lin}} = 2k_0\lambda_c^2$ , où  $\lambda_c$  désigne la longueur spatiale de cohérence dans le plan transverse du faisceau. Par ailleurs, l'effet non linéaire Kerr affecte l'évolution de l'onde sur une longueur de propagation non linéaire  $L_{\text{nl}} = 1/(|\gamma| \langle |\psi|^2 \rangle)$ . On peut aussi introduire la «healing length»  $\Lambda = \sqrt{\alpha L_{\text{nl}}}$ , qui est la longueur caractéristique pour laquelle les effets linéaires et non-linéaires sont du même ordre de grandeur (typiquement la taille d'un soliton ou d'un vortex qui résulte d'un équilibre entre effets linéaires et non linéaires). Nous rappelons que l'onde étant supposée monochromatique, nous ne prenons pas en compte les effets temporels de dispersion, lesquels modifient le champ optique sur des longueurs de propagation beaucoup plus grandes que  $L_{\text{lin}}$  et  $L_{\text{nl}}$ .

## 2.2.2 Equation cinétique et processus de thermalisation

Dans le régime de propagation faiblement non linéaire  $L_{\text{lin}} \ll L_{\text{nl}}$  (ou bien de façon analogue  $U \ll E$ ) il est possible de dériver une équation cinétique décrivant l'évolution du spectre moyen du champ  $n_{\mathbf{k}}(z)$  défini par

$$\langle \tilde{\psi}(\mathbf{k}_1, z) \tilde{\psi}^*(\mathbf{k}_2, z) \rangle = n_{\mathbf{k}_1}(z) \delta_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}, \quad (2.2)$$

où  $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, z) = \int \psi(\mathbf{r}, z) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}$  désigne la transformée de Fourier spatiale du champ  $\psi(\mathbf{r}, z)$ . Notons que ce spectre moyenné ne dépend pas de la position dans l'espace  $\mathbf{r}$ , car on suppose que le champ  $\psi(\mathbf{r}, z)$  exhibe des fluctuations qui sont statistiquement homogènes dans l'espace (à la différence de la situation rencontrée par exemple en Chapitre 3). La théorie de turbulence d'ondes permet de dériver l'équation cinétique pour l'évolution du spectre moyenné [12, 15]

$$\partial_z n_{\mathbf{k}_4}(z) = \frac{\gamma^2}{\pi} \iiint \tilde{M}(\tilde{n}_{\mathbf{k}_1}, \tilde{n}_{\mathbf{k}_2}, \tilde{n}_{\mathbf{k}_3}, \tilde{n}_{\mathbf{k}_4}) \delta(\mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_4 + \omega_3 - \omega_1 - \omega_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3, \quad (2.3)$$

avec

$$\tilde{M}(\tilde{n}_{\mathbf{k}_1}, \tilde{n}_{\mathbf{k}_2}, \tilde{n}_{\mathbf{k}_3}, \tilde{n}_{\mathbf{k}_4}) = \tilde{n}_{\mathbf{k}_1} \tilde{n}_{\mathbf{k}_2} \tilde{n}_{\mathbf{k}_3} \tilde{n}_{\mathbf{k}_4} (\tilde{n}_{\mathbf{k}_4}^{-1} + \tilde{n}_{\mathbf{k}_3}^{-1} - \tilde{n}_{\mathbf{k}_1}^{-1} - \tilde{n}_{\mathbf{k}_2}^{-1}), \quad (2.4)$$

et la relation de dispersion

$$\omega(\mathbf{k}) = \alpha k^2. \quad (2.5)$$

L'équation cinétique (2.3) conserve la puissance de l'onde  $N = L^2 \int n_{\mathbf{k}}(z) d\mathbf{k}$  et l'énergie linéaire  $E = L^2 \int \omega(\mathbf{k}) n_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$ , où  $L^2$  désigne la taille du système considéré. Notons que la contribution non linéaire de l'énergie  $U$  est négligeable dans le régime faiblement non linéaire considéré pour la dérivation de l'équation cinétique (2.3). Contrairement à l'équation NLS (2.1), l'équation cinétique (2.3) est formellement irréversible en « temps » (i.e., en  $z$ ). Cette propriété se manifeste par l'existence d'un théorème H de croissance monotone de l'entropie  $\partial_z S(z) \geq 0$ , où l'entropie hors-équilibre est définie par  $S(z) = \int \log[n_{\mathbf{k}}(z)] d\mathbf{k}$ . Ainsi l'équation cinétique décrit explicitement le processus de thermalisation, lequel se caractérise par une évolution irréversible vers l'état d'équilibre thermodynamique qui réalise le maximum d'entropie. Cet état est obtenu en maximisant l'entropie compte tenu des contraintes de conservation de la puissance  $N$  et l'énergie  $E$ , ce qui donne la distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans :

$$n_{\mathbf{k}}^{eq} = \frac{T}{\alpha k^2 - \mu} \quad (2.6)$$

où  $T$  et  $\mu$  sont, par analogie avec la thermodynamique, la température et le potentiel chimique. Il est important de rappeler ici que nous considérons un système conservatif (Hamiltonien) en l'absence de thermostat. Par conséquent, la température ne joue pas le rôle usuel rencontré en thermodynamique. Ici  $(T, \mu)$  sont déterminés de façon univoque par les deux quantités conservées  $(N, E)$ . Cet aspect sera discuté en détail dans le Chapitre 3 où nous reportons l'observation expérimentale de l'effet de condensation.

### 2.2.3 Simulation numérique de l'équation NLS

Le processus de thermalisation vers le spectre d'équilibre de RJ (2.6) peut être observé par simulation numérique de l'équation NLS (2.1). On considère un spectre initial de forme Gaussienne (avec phases spectrales aléatoires) et l'on peut observer en Figure 2.2 qu'au cours de la propagation le spectre relaxe vers un spectre en loi puissance  $n_{\mathbf{k}} \sim k^{-2}$ . Ce comportement en loi puissance se retrouve dans la queue de la distribution d'équilibre de RJ (2.6), laquelle exhibe la propriété d'équipartition d'énergie parmi les modes,  $\omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}^{eq} \sim T$  pour  $k \gg \sqrt{-\mu/\alpha}$ .

Le processus de thermalisation peut s'accompagner d'un effet de condensation, lequel se caractérise par une population macroscopique du mode fondamental,  $n_0 \gg n_{\mathbf{k}}$  pour  $\mathbf{k} \neq 0$ . On peut en effet montrer qu'à mesure que l'énergie  $E$  décroît vers une valeur critique  $E_{\text{crit}}$ , le potentiel chimique  $\mu$  tend vers 0. Le dénominateur de la distribution de RJ (2.6) peut donc s'annuler et cette singularité est régularisée par une population macroscopique du mode fondamental [16]. Notons que ce mécanisme de condensation à l'équilibre est formellement analogue à celui de la distribution de Bose-Einstein pour un système de particules quantiques. Cet effet de condensation d'ondes classiques est clairement visible

dans la simulation reportée en Figure 2.2 qui montre l'évolution de la population du mode fondamental au cours de la propagation  $n_0(z)$ . On note que la croissance de  $n_0(z)$  sature vers la constante prédite par la théorie à mesure que le système approche l'état d'équilibre. En fait, la fraction de puissance condensée à l'équilibre  $n_0^{eq}/N$  augmente quand l'énergie  $E$  diminue. La courbe de condensation  $n_0^{eq}/N$  vs  $E$  permettant de mettre en évidence la transition de phase vers un état condensé pour une énergie  $E \leq E_{crit}$  sera discutée en détail dans le cadre des expériences en fibre optique multimode présentées au Chapitre 3.

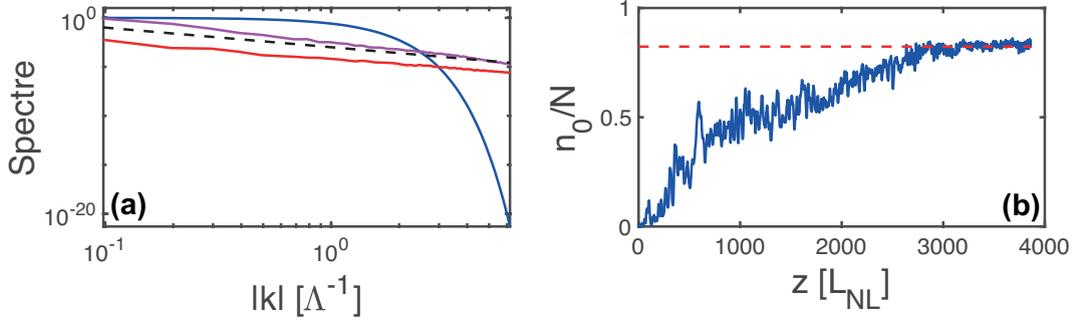


FIGURE 2.2 – Simulation de l'équation NLS (2.1) à partir d'un spectre initial de forme Gaussienne (avec des phases spectrales aléatoires) : (a) Spectre en échelle log pour la condition initiale (bleu) pour  $z = 100 L_{nl}$  (magenta) et pour  $z = 3800 L_{nl}$  (rouge), le spectre en loi puissance  $n_k \sim k^{-2}$  (en noir pointillé) représente l'équipartition de puissance parmi les modes prédite par la distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans. (b) Évolution de la population du mode fondamental au cours de la propagation  $n_0(z)/N$ , la croissance de  $n_0(z)$  sature vers la constante prédite par la théorie à mesure que le système approche l'état d'équilibre (en rouge pointillé),  $n_0^{eq}/N \simeq 0.82$ .

## 2.3 Thermalisation et condensation en fibre optique à gradient d'indice

Dans la section précédente nous avons introduit les notions de thermalisation et condensation d'ondes en milieu homogène. Dans cette section nous étendons ces notions au problème plus complexe de propagation d'ondes non linéaire dans une fibre optique multimode.

### 2.3.1 Équation NLS modale

Nous considérons l'équation de Schrödinger non linéaire à (2+1) dimensions, qui est connue pour décrire l'évolution spatiale transverse d'un faisceau optique se propageant selon l'axe  $z$  d'un guide d'onde modélisé par un potentiel de confinement  $V(\mathbf{r})$  [avec  $\mathbf{r} = (x, y)$ ] [86]. En considérant des impulsions larges temporellement (de l'ordre nanoseconde), nous pouvons négliger les effets temporels reliés au premier et second ordre de dispersion chromatique. L'équation NLS vectorielle prenant en compte le degré de liberté de la polarisation peut alors être écrite

$$i\partial_z \boldsymbol{\psi} = -\alpha \nabla^2 \boldsymbol{\psi} + V(\mathbf{r}) \boldsymbol{\psi} - \gamma_0 \mathcal{P}(\boldsymbol{\psi}), \quad (2.7)$$

où  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, z) = (\psi_x, \psi_y)^T$  avec  $\psi_{x,y}(\mathbf{r}, z)$  les composantes du champ vectoriel dans la base des polarisations linéaires, l'exposant  $T$  désignant l'opérateur de transposition. Le paramètre  $\alpha = 1/(k_0 n_{co})$  est le coefficient de diffraction où  $k_0 = 2\pi/\lambda$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide du laser et  $n_{co}$  l'indice de réfraction du coeur de la fibre. Le terme non linéaire s'écrit

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{3}\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}^* + \frac{2}{3}\boldsymbol{\psi}^\dagger \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}, \quad (2.8)$$

où le coefficient non linéaire est  $\gamma_0 = k_0 n_2$ , avec  $n_2$  le coefficient Kerr non linéaire, et les exposants  $*$ ,  $\dagger$  représentent les opérations conjuguées, et transposées conjuguées ( $n_2 > 0$  pour une fibre non linéaire focalisante en  $m^2/W$ ,  $|\boldsymbol{\psi}|^2$  en  $W/m^2$ ).

Nous projetons l'onde aléatoire dans la base orthonormée  $[\int u_p(\mathbf{r})u_m^*(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta_{pm}^K]$  des modes propres  $u_p(\mathbf{r})$  de l'équation NLS linéarisée avec le potentiel  $V(\mathbf{r})$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, z) = \sum_{p=0}^{M-1} \mathbf{B}_p(z) u_p(\mathbf{r}) \exp(-i\beta_p z), \quad (2.9)$$

où  $M$  désigne le nombre de modes du guide d'onde,  $\mathbf{B}_p(z) = (B_{p,x}, B_{p,y})^T$  représente la composante de polarisation linéaire du mode  $p$ , et  $\beta_p$  est la valeur propre correspondante vérifiant  $\beta_p u_p(\mathbf{r}) = -\alpha \nabla^2 u_p(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) u_p(\mathbf{r})$ .

Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur l'analyse d'une fibre multimode (MMF) à gradient d'indice (GRIN) dans laquelle l'effet d'auto-nettoyage du faisceau a été observé expérimentalement. Pour un potentiel parabolique idéal  $V(\mathbf{r}) = q|\mathbf{r}|^2$  pour  $|\mathbf{r}| \leq a$ ,  $a$  étant le rayon du coeur de la fibre,  $u_p(\mathbf{r})$  désigne les fonctions d'Hermite-Gauss normalisées avec les valeurs propres correspondantes  $\beta_p = \beta_{p_x, p_y} = \beta_0(p_x + p_y + 1)$ ,  $u_{p_x, p_y}(x, y) = \kappa(\pi p_x! p_y! 2^{p_x + p_y})^{-1/2} H_{p_x}(\kappa x) H_{p_y}(\kappa y) \exp[-\kappa^2(x^2 + y^2)/2]$ , où  $\kappa = (q\alpha)^{1/4}$ ,  $q = k_0(n_{co}^2 - n_{cl}^2)/(2n_{co}a^2)$ ,  $\beta_0 = 2\sqrt{\alpha q}$ ,  $n_{cl}$  étant l'indice de réfraction de la gaine. Le nombre de modes (sans inclure la dégénérescence de polarisation) est  $M \simeq V_0^2/(2\beta_0^2)$ , où  $V_0$  désigne la profondeur du potentiel parabolique. En définissant  $\mathbf{A}_p(z) = \mathbf{B}_p(z) \exp(-i\beta_p z)$ , l'évolution des composantes modales est gouvernée par

$$i\partial_z \mathbf{A}_p = \beta_p \mathbf{A}_p - \gamma \mathbf{P}_p(\mathbf{A}). \quad (2.10)$$

Le terme non linéaire en (2.10) s'écrit

$$\mathbf{P}_p(\mathbf{A}) = \sum_{l,m,n=0}^{M-1} S_{lmnp} \left( \frac{1}{3} \mathbf{A}_l^T \mathbf{A}_m \mathbf{A}_n^* + \frac{2}{3} \mathbf{A}_n^\dagger \mathbf{A}_m \mathbf{A}_l \right), \quad (2.11)$$

où  $S_{lmnp} = \int u_l(\mathbf{r})u_m(\mathbf{r})u_n^*(\mathbf{r})u_p^*(\mathbf{r})d\mathbf{r} / \int |u_0|^4(\mathbf{r})d\mathbf{r}$  tel que  $S_{0000} = 1$ , et  $\gamma = \gamma_0/A_{\text{eff}}^0$ , où  $A_{\text{eff}}^0 = 1 / \int |u_0|^4(\mathbf{r})d\mathbf{r}$  est l'aire effective du mode fondamental ( $|A_p|^2$  en Watts).

L'équation modale NLS (2.10) a une forme analogue à l'équation de base habituellement utilisée pour étudier la propagation dans les MMF en absence de désordre [63, 86–89]. Elle conserve la puissance totale  $N = \int |\boldsymbol{\psi}|^2 d\mathbf{r} = \sum_{p=0}^{M-1} |\mathbf{A}_p|^2$ , et l'Hamiltonien  $H = E + U$ , qui possède une contribution linéaire

$$E = \alpha \int |\nabla \boldsymbol{\psi}|^2 d\mathbf{r} + \int V(\mathbf{r}) |\boldsymbol{\psi}|^2 d\mathbf{r} = \sum_{p=0}^{M-1} \beta_p |\mathbf{A}_p|^2, \quad (2.12)$$

et la contribution non linéaire

$$U = \frac{\gamma}{4} \sum_{l,m,n=0}^{M-1} S_{lmnp} \bar{U}_{lmnp} + c.c., \quad (2.13)$$

$$\bar{U}_{lmnp} = \frac{1}{3} (\mathbf{A}_l^T \mathbf{A}_m) (\mathbf{A}_n^\dagger \mathbf{A}_p^*) + \frac{2}{3} (\mathbf{A}_n^\dagger \mathbf{A}_m) (\mathbf{A}_l^T \mathbf{A}_p^*), \quad (2.14)$$

où c.c. désigne le complexe conjugué.

La longueur caractéristique  $L_0 = 1/(\gamma N) = 1/(\gamma_0 N/A_{\text{eff}}^0)$  correspond à la longueur de propagation non linéaire quand toute la puissance est confinée au sein du mode fondamental. Habituellement, le faisceau optique peuple plusieurs modes d'ordre supérieur et la longueur non-linéaire est  $L_{\text{nl}} = 1/(\gamma_0 N/S_{\text{eff}})$ , où  $S_{\text{eff}}$  est la section de surface effective du faisceau. Nous définissons aussi la longueur caractéristique linéaire depuis l'équation (2.10) comme  $L_{\text{lin}} = 1/\Delta\beta_{\text{eff}}$ , où  $\Delta\beta_{\text{eff}}$  désigne la largeur de bande («spectrale») effective du faisceau optique dans l'espace des modes. Dans des expériences habituelles de nettoyage de faisceau en fibres GRIN nous avons  $\beta_0 \sim 10^3 \text{ m}^{-1}$ , de sorte que l'onde optique évolue dans le régime faiblement non linéaire :

$$L_{\text{lin}} \ll L_{\text{nl}}, \quad (2.15)$$

où  $L_{\text{lin}} \lesssim 1 \text{ mm}$  tandis que  $L_{\text{nl}}$  est typiquement plus grand que 10 cm.

### 2.3.2 Régime modal cohérent : Impact du potentiel parabolique de confinement sur les conditions de résonances

Dans une expérience typique de nettoyage du faisceau optique, un faisceau laser caractérisé par un front de phase transverse cohérent est injecté dans la MMF. Dans ces conditions, les composantes modales excitées à l'entrée de la fibre présentent une forte corrélation de phase entre elles. On remarque que cela est en contraste avec les simulations habituelles de turbulence des ondes où l'on impose une phase aléatoire entre les modes dans la condition initiale [7, 12, 15, 90, 91], procédure également employée en Figure 2.2 ci-dessus. Les simulations numériques de l'équation NLS (2.10) révèlent un fait remarquable : la forte corrélation de phase entre les modes d'ordre bas est préservée pendant la propagation, conduisant ainsi à une interaction sensible à la phase, comme illustré en Figure 2.3(a). Dans ce régime cohérent, la relation de phase entre les modes joue un rôle important dans la dynamique. Les composantes modales d'ordre bas  $\mathbf{A}_p(z)$  qui sont fortement peuplées subissent alors un échange de puissance quasi-réversible les unes avec les autres. Le profil d'intensité correspondant  $|\boldsymbol{\psi}|^2(\mathbf{r}, z)$  présente lui-même une dynamique oscillatoire lors de la propagation : Le faisceau peuple plusieurs modes du potentiel  $V(\mathbf{r})$  et ne présente pas de luminosité renforcée caractérisant un effet d'auto-nettoyage stable. Ce régime cohérent d'interactions de modes gèle le processus de thermalisation. De plus, nous rapportons en Figure 2.3(b) une simulation de l'équation NLS (2.10) à partir d'un faisceau de type speckle. Bien que les phases aléatoires initiales modifient le comportement oscillatoire régulier illustré en Figure 2.3(a), les amplitudes modales d'ordre bas présentent toujours un échange de puissance rapide et significatif entre elles. Ceci indique que la relation de phase entre les modes joue encore un rôle non trivial conduisant ainsi à un

gel du processus de thermalisation. Comme nous le verrons tout au long de ce chapitre, ces simulations reflètent la nature discrète de la variété de résonance sous-jacente à la turbulence des ondes dans les MMF. Nous remarquons que la compréhension des mécanismes qui peuvent geler le processus de thermalisation est un problème important qui est actuellement analysé dans divers systèmes, tels que, par exemple, les effets de taille finie dans la turbulence d'ondes discrète ou mésoscopique [92–101], dans les chaînes de Fermi-Pasta-Ulam [102–106], ou dans les systèmes désordonnés non linéaires [107, 108].

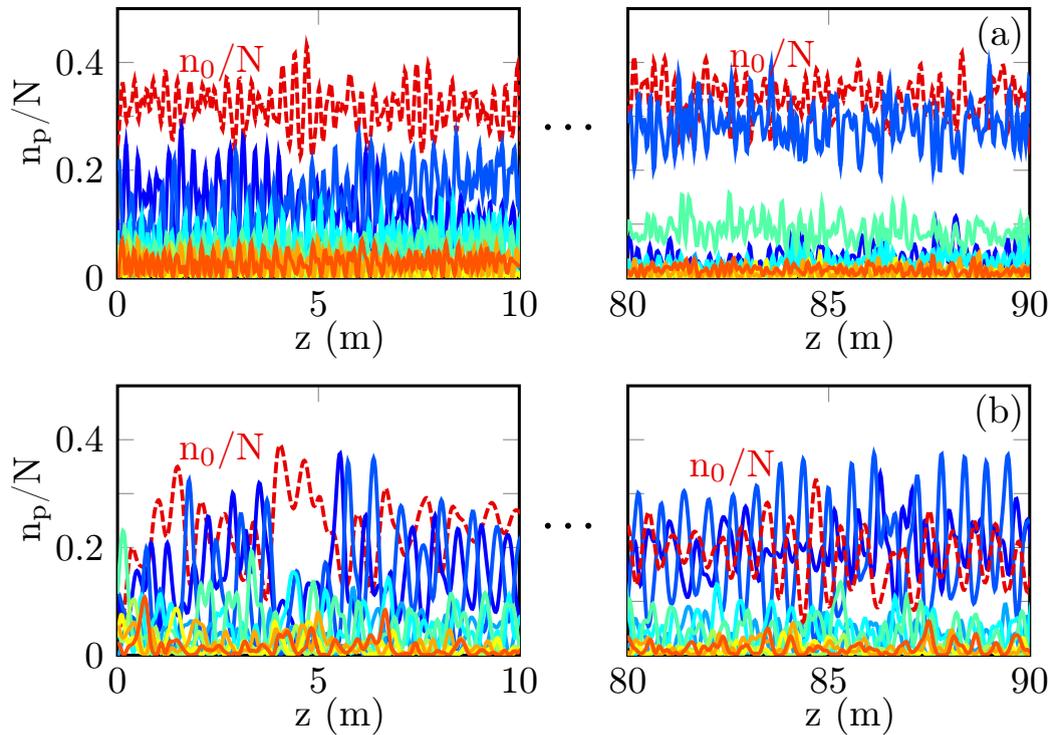


FIGURE 2.3 – Régime cohérent d’interaction modale : Simulations numériques de l’équation NLS (2.10) montrant l’évolution des composantes modales  $n_p(z) = |\mathbf{A}_p(z)|^2$  (en absence de désordre), démarrant d’une condition initiale cohérente (a), démarrant d’un faisceau «speckle» avec une phase aléatoire entre les modes (b). Évolutions des populations modales  $n_p/N$  : mode fondamental  $p = 0$  (rouge hachuré),  $p = 1$  (bleu sombre plein),  $p = 2$  (bleu plein),  $p = 3$  (bleu clair plein),  $p = 4$  (cyan plein),  $p = 5$  (vert clair plein),  $p = 6$  (ver plein),  $p = 7$  (jaune plein), et  $p = 8$  (orange plein). Le système présente une dynamique oscillatoire persistante entre les modes d’ordre bas. À l’équilibre thermodynamique complet, le système devrait atteindre la fraction de puissance condensée  $n_0^{eq}/N \simeq 0.68$  en (a), et  $n_0^{eq}/N \simeq 0.58$  en (b). La puissance est  $N = 47.5$  kW,  $M = 120$  modes,  $a = 26$   $\mu\text{m}$ .

Le régime d’interaction sensible à la phase des modes provient du petit nombre de modes confinés dans le potentiel parabolique (typiquement  $\sim 15$  groupes de modes dégénérés, c’est-à-dire  $\sim 120$  modes), ce qui réduit considérablement le nombre effectif de modes qui peuvent interagir efficacement. Pour illustrer cet aspect, on peut comparer le nombre de résonances dans une MMF GRIN typiquement utilisée dans les expériences de nettoyage de faisceau et le nombre correspondant de résonances dans une boîte 2D. Considérons ces deux systèmes avec approximativement le même nombre de modes, disons  $M = 120$  pour

la fibre GRIN et  $M = 121$  pour la boîte 2D. Dans une boîte 2D avec des conditions aux limites périodiques, les résonances vérifient la conservation de l'énergie ( $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_3} + \omega_{k_4}$ ,  $\omega_k = \alpha|\mathbf{k}|^2$ ) et la conservation du moment ( $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$ ). Dans une fibre GRIN, les résonances vérifient la conservation d'énergie  $\beta_p + \beta_l = \beta_m + \beta_n$ , tandis que le tenseur  $S_{lmnp}$  reflète l'efficacité de la résonance correspondante. Comme les valeurs propres  $\beta_p$  sont régulièrement espacées pour un potentiel parabolique, il y a beaucoup plus de résonances dans une fibre GRIN que dans une boîte 2D. Cependant, la plupart des résonances ne sont pas efficaces : seules 41 (respectivement 1067) résonances sont caractérisées par un coefficient  $S_{lmnp} > 0.4$  (respectivement  $S_{lmnp} > 0.2$ ), où l'on rappelle que  $0 < S_{lmnp} < 1$ . En revanche, la boîte 2D présente  $\sim 10^5$  résonances exactes pour la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement (le calcul étant indépendant de la taille de la boîte). L'analyse indique que, par rapport à la boîte 2D, la fibre GRIN se comporte effectivement comme un système dynamique avec un nombre relativement petit de degrés de liberté, ce qui fournit une interprétation intuitive du régime cohérent d'interaction de modes discuté ci-dessus. Dans ce qui suit, nous verrons que l'introduction d'un désordre structurel de la MMF brise le régime cohérent sensible à la phase de l'interaction modale.

## 2.4 Équations cinétiques avec désordre et simulations

L'équation modale NLS (2.10) suppose que la MMF est idéale, au sens où le modèle ne tient compte d'aucune forme de désordre. Cependant, dans la pratique, la propagation de la lumière dans les MMF est connue pour être affectée par des fluctuations aléatoires des profils longitudinaux et transverses de l'indice de réfraction en raison de facteurs externes tels que la flexion, la torsion, les tensions, les plis ou les variations de la taille du coeur dans le processus de fabrication de la fibre. De telles perturbations physiques multiples introduisent des fluctuations de polarisation aléatoires ainsi qu'un couplage aléatoire entre les modes de la fibre. Les mécanismes et modèles spécifiques qui décrivent comment les imperfections des fibres affectent la propagation de la lumière dans les MMF restent un sujet de recherche actif [83, 87, 88, 109–112]. Habituellement, on considère que pour des longueurs de propagation relativement courtes ( $\sim 10$  m) comme celles considérées dans les expériences d'auto-nettoyage du faisceau optique, la contribution dominante du bruit provient des fluctuations modales de polarisation (désordre faible), tandis que pour une propagation plus importante le couplage de mode se produit entre les modes dégénérés (état de couplage de groupes de modes), et pour des longueurs de fibre encore plus grandes, le couplage de mode a lieu pour les modes non dégénérés (fort désordre) [109]. Dans ce qui suit, nous considérons que la contribution dominante est fournie par le désordre faible [109]. Nous verrons que la source de bruit introduite par un désordre faible est suffisante pour rompre le régime cohérent d'interaction modale discuté ci-dessus dans la section 2.3.2. La dynamique de phase aléatoire qui en résulte conduit alors à un régime turbulent incohérent des composantes modales que nous décrivons dans le cadre de la théorie de la turbulence d'onde. Notons qu'une autre approche a été suivie pour introduire le désordre dans le cadre de l'équation NLS originale (2.7) [85]. Dans ce cas le désordre est introduit de façon phénoménologique dans les simulations numériques et un accord qualitatif a été obtenu avec les expériences correspondantes réalisées à Limoges dans différentes configurations [20]. Ici nous introduisons le désordre dans l'équation NLS modale (2.10), car cette approche est adaptée à un développement théorique sur la base de la théorie de turbulence d'ondes.

### 2.4.1 Modèles de désordre

Dans ce qui suit, nous discuterons en détail de l'impact du désordre faible sur la dérivation de l'équation cinétique de turbulence d'ondes pour les MMF. Nous discuterons d'abord du régime de turbulence d'ondes continu conventionnel pertinent pour les fibres hautement multimodes, puis du régime de turbulence d'ondes discret pertinent pour les expériences d'auto-nettoyage du faisceau. Une description détaillée de la dérivation de l'équation cinétique de turbulence d'ondes discrète tenant compte du désordre faible est donnée en référence [21]. Nous considérerons d'abord un modèle de désordre faible dans lequel les modes subissent un bruit indépendant (décorrélé). On note que, dans la limite opposée où *les modes subissent le même désordre*, l'analyse révèle que l'onde optique retrouve un régime quasi-cohérent d'interaction de modes discuté en Figure 2.3. En d'autres termes, ce modèle de désordre modal totalement corrélé semble inefficace et dans cette limite l'onde optique ne présente pas de processus de condensation rapide. En conséquence, nous considérerons par la suite un modèle intermédiaire de désordre partiellement corrélé où les modes dégénérés subissent le même bruit. La théorie montre que ce désordre partiellement corrélé est suffisant pour rétablir une accélération efficace du processus de condensation.

### 2.4.2 Modèle de désordre modal décorrélé

Comme discuté ci-dessus, dans le régime de désordre faible, les différents modes spatiaux ne se couplent pas, mais les deux états de polarisations de chaque mode spatial présentent un couplage aléatoire [87, 88]. L'évolution des composantes modales est gouvernée par

$$i\partial_z \mathbf{A}_p = \beta_p A_p + \mathbf{D}_p(z) \mathbf{A}_p - \gamma \mathbf{P}_p(\mathbf{A}). \quad (2.16)$$

Nous rappelons que les fluctuations longitudinales et transverses du profil d'indice de réfraction de la MMF conduisent à un couplage entre les modes, exprimé par la théorie des modes couplés [83, 87]. Cependant, en suivant cette procédure, on obtient une perturbation scalaire qui n'introduit pas de couplage parmi les composantes de polarisation, une propriété commentée en particulier en référence [88]. En conséquence, les fluctuations aléatoires de polarisations sont généralement introduites de façon phénoménologique, voir [87, 88, 113]. Ici, nous considérons la forme la plus générale de désordre de polarisation qui conserve la puissance du faisceau optique, propriété vérifiée si les matrices  $\mathbf{D}_p$  sont Hermitiennes. Les matrices Hermitiennes  $\mathbf{D}_p(z)$  sont développées en matrices de Pauli, connues pour former une base de l'espace vectoriel de  $2 \times 2$  matrices Hermitiennes. Les matrices ont alors la forme

$$\mathbf{D}_p(z) = \sum_{j=0}^3 \nu_{p,j}(z) \boldsymbol{\sigma}_j, \quad (2.17)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) sont les matrices de Pauli et  $\boldsymbol{\sigma}_0$  est la matrice identité. Les fonctions  $\nu_{p,j}(z)$  sont indépendantes et distribuées identiquement selon un processus aléatoire à valeur réelle Gaussienne, avec

$$\langle \nu_{p,j}(z) \nu_{p',j'}(z') \rangle = \sigma_\beta^2 \delta_{pp'}^K \delta_{jj'}^K \mathcal{R} \left( \frac{z - z'}{l_\beta} \right), \quad (2.18)$$

ici  $l_\beta$  est la longueur de corrélation du processus aléatoire et  $\sigma_\beta^2$  sa variance. La fonction de corrélation normalisée est telle que  $\mathcal{R}(0) = 1$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(\zeta) d\zeta = 1$ , et  $\mathcal{R}(z/l_\beta) \rightarrow l_\beta \delta(z)$  dans la limite  $l_\beta \rightarrow 0$ . Nous allons considérer le processus de Ornstein-Uhlenbeck :

$$d\nu_{p,j} = -\frac{1}{l_\beta} \nu_{p,j} dz + \frac{\sigma_\beta}{\sqrt{l_\beta}} dW_{p,j}(z),$$

où  $W_{p,j}$  sont des mouvements Brownien indépendants. Cela signifie que  $\nu_{p,j}$  sont des processus Gaussiens de moyenne nulle avec une fonction de covariance de la forme (2.18) avec  $\mathcal{R}(\zeta) = \exp(-|\zeta|)/2$ . Nous introduisons un paramètre effectif de désordre  $\Delta\beta = \sigma_\beta^2 l_\beta$  et l'échelle de longueur associée

$$L_d = 1/\Delta\beta. \quad (2.19)$$

Nous supposons que les effets de désordre dominant l'effet non linéaire

$$L_d \ll L_{nl}, \quad (2.20)$$

ainsi que  $l_\beta \ll L_d$  (ou  $\sigma_\beta l_\beta \ll 1$ ). Nous rappelons que les expériences habituelles d'auto-nettoyage du faisceau se réfèrent à un régime faiblement non linéaire  $L_{lin} \ll L_{nl}$ , où typiquement  $\beta_0 \sim 10^3 m^{-1}$ , tel que  $\beta_0^{-1} \ll L_d$  (ou  $\Delta\beta \ll \beta_0$ ). Mise à part les expériences d'auto-nettoyage de faisceau, dans la suite nous allons aussi considérer un régime où les écarts entre les modes peuvent être très petits  $\beta_0 \ll \Delta\beta$  [MMF avec un grand nombre de modes  $M \simeq V_0^2/(2\beta_0^2) \gg 1$ ] afin d'aborder un régime décrit par une approche de turbulence d'ondes continue. Finalement, notons que puisque le désordre est dépendant du «temps» (c-a-d, dépend de la variable  $z$ ), notre système n'exhibe pas l'effet de localisation de Anderson, il est donc de nature différente de ceux étudiés par exemple en référence [114].

### 2.4.3 Annulation des corrélations entre les modes

Nous commençons par étudier les corrélations entre les modes à travers l'analyse de l'évolution du moment de second ordre dans la matrice  $2 \times 2 \langle \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_q^T \rangle(z)$ . L'impact du désordre est traité en utilisant le théorème de Furutsu-Novikov. Ce dernier révèle que le désordre conservatif introduit une dissipation effective au sein du système. À cet égard, nous rappelons qu'en principe, le faisceau laser excite des modes fortement corrélés à l'entrée de la fibre, comme discuté ci-dessus à travers le régime cohérent d'interaction modale. C'est la dissipation effective due au désordre qui brise une corrélation de phase modale aussi forte. L'analyse développée en [22] révèle que les corrélations modales disparaissent pour des longueurs de propagation plus grandes que la longueur non linéaire,  $\langle \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_q^T \rangle(z) \simeq 0$  pour  $z \gg L_{nl}$ .

### 2.4.4 Fermeture des équations des moments

Dans ce qui suit, nous dérivons l'équation cinétique en suivant la procédure de développement perturbatif de turbulence d'ondes dans laquelle les effets linéaires dispersifs dominent les effets non linéaires  $L_{lin} \ll L_{nl}$ . En conséquence, une grande séparation des échelles de longueurs linéaires et non linéaires a lieu [14, 15]. Lorsque les modes sont combinés à

des effets de désordre, ils présentent des phases aléatoires avec des statistiques quasi-Gaussiennes, ce qui permet de fermer la hiérarchie infinie des équations des moments. Plus précisément, en raison du caractère non linéaire de l'équation NLS, l'évolution du moment du second ordre du champ dépend du moment du quatrième ordre, tandis que l'équation du moment du quatrième ordre dépend du moment du sixième ordre, et ainsi de suite. De cette manière, on obtient une hiérarchie infinie d'équations pour les moments, dans laquelle le moment d'ordre  $n$  dépend du moment d'ordre  $(n + 2)$  du champ. Cela rend les équations impossibles à résoudre à moins de trouver un moyen de tronquer la hiérarchie. La fermeture de la hiérarchie peut être réalisée dans le régime faiblement non linéaire en vertu du théorème des moments de processus Gaussien [115]. Nous remarquons à cet égard que l'hypothèse clef qui sous-tend l'approche de la turbulence d'ondes est l'existence d'une phase aléatoire entre les modes plutôt qu'une véritable statistique Gaussienne, comme discuté en détail récemment en [15, 116, 117]. Nous soulignons que dans le présent travail, la phase aléatoire des modes est induite par le désordre structurel du milieu qui domine les effets non linéaires ( $L_d \ll L_{nl}$ ).

Comme discuté ci-dessus, les éléments non diagonaux de la matrice  $2 \times 2$   $\langle \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^T \rangle(z)$  décroissent rapidement. Notre but alors est de dériver une équation gouvernant l'évolution des éléments diagonaux  $w_p(z) = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{A}_p(z)|^2 \rangle$ . En partant de l'équation NLS modale (2.16), nous avons [21]

$$\partial_z w_p = \frac{1}{3} \gamma \langle X_p^{(1)} \rangle + \frac{2}{3} \gamma \langle X_p^{(2)} \rangle, \quad (2.21)$$

$$X_p^{(1)} = \text{Im} \left\{ \sum_{l,m,n} S_{lmnp}^* (\mathbf{A}_l^\dagger \mathbf{A}_m^*) (\mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_p) \right\}, \quad (2.22)$$

$$X_p^{(2)} = \text{Im} \left\{ \sum_{l,m,n} S_{lmnp}^* (\mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_m^*) (\mathbf{A}_l^\dagger \mathbf{A}_p) \right\}. \quad (2.23)$$

Comme déjà remarqué en tant que résultat du théorème de Furutsu-Novikov, le désordre conservatif introduit une dissipation effective au sein du système, de sorte que l'évolution du moment d'ordre quatre prend la forme d'une équation d'oscillateur forcé amorti [avec  $J_{lmnp}^{(1)}(z) = \langle (\mathbf{A}_l^\dagger \mathbf{A}_m^*) (\mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_p) \rangle$  et  $J_{lmnp}^{(2)}(z) = \langle (\mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_m^*) (\mathbf{A}_l^\dagger \mathbf{A}_p) \rangle$ ]:

$$\partial_z J_{lmnp}^{(j)} = (-8\Delta\beta + i\Delta\omega_{lmnp}) J_{lmnp}^{(j)} + i\gamma \langle Y_{lmnp}^{(j)} \rangle, \quad (2.24)$$

où  $\Delta\omega_{lmnp} = \beta_l + \beta_m - \beta_n - \beta_p$  est la fréquence de résonance, tandis que  $\langle Y_{lmnp}^{(j)} \rangle$  dénote le moment d'ordre six qui est factorisé en produits en de moments d'ordres deux en raison du théorème des moments Gaussien pour  $j = 1, 2$  [21]. La solution de l'équation (2.24) s'écrit :

$$J_{lmnp}^{(j)}(z) = J_{lmnp}^{(j)}(0) G_{lmnp}(z) + \mathcal{I}_{lmnp}^{(j)}(z), \quad (2.25)$$

où l'intégrale de convolution s'écrit

$$\mathcal{I}_{lmnp}^{(j)}(z) = i\gamma \int_0^z \langle Y_{lmnp}^{(j)} \rangle(z - z') G_{lmnp}(z') dz', \quad (2.26)$$

avec la fonction de Green

$$G_{lmnp}(z) = H(z) \exp(i\Delta\omega_{lmnp}z - 8\Delta\beta z), \quad (2.27)$$

et  $H(z)$  la fonction de Heaviside. Nous arrivons maintenant au point clef de notre analyse, dans laquelle nous distinguons l'approche continue de l'approche discrète de turbulence d'ondes.

## 2.5 Turbulence d'ondes et impact du désordre

### 2.5.1 Turbulence d'ondes continue

En général, un échange de puissance entre quatre modes différents n'a pas besoin de satisfaire la condition de résonance exacte  $\delta\omega_{lmnp} = 0$ . En effet, il suffit pour un quatuor de modes, de vérifier la condition de quasi-résonance

$$|\Delta\omega_{lmnp}| \lesssim 1/L_{\text{kin}}^{\text{disor}}, \quad (2.28)$$

pour fournir une contribution non nulle à l'intégrale de convolution (2.26), où  $L_{\text{kin}}^{\text{disor}}$  indique l'échelle de longueur caractéristique d'évolution des moments du champ  $\langle Y_{lmnp}^{(j)} \rangle(z)$  [voir équation (2.34) ci-dessous]. Dans l'approche de turbulence d'ondes continue usuelle, il y a un grand nombre de quatuor de modes non résonants  $\Delta\omega_{lmnp} \neq 0$  qui vérifient la condition de quasi-résonance (2.28) et qui contribuent significativement à l'évolution des équations des moments.

Nous anticipons que le régime de turbulence d'ondes continue ne correspond pas aux expériences habituelles d'auto-nettoyage du faisceau optique [19, 20], car nous avons typiquement  $\beta_0 \sim 10^3 m^{-1}$ , de sorte que  $\beta_0 \gg 1/L_{\text{kin}}^{\text{disor}}$ , le système n'exhibe alors pas de quasi-résonances mais uniquement des résonances exactes  $\Delta\omega_{lmnp} = 0$ . En fait, l'expérience d'auto-nettoyage de faisceau est décrite par une approche de turbulence d'ondes discrète. Ici, par souci de clarté, nous discutons d'abord le régime conventionnel de turbulence d'ondes continu [15], qui peut être pertinent pour les MMF caractérisées par un grand nombre de modes [ $M \simeq V_0^2/(2\beta_0^2) \gg 1$  tel que  $\beta_0 \ll \Delta\beta$ ]. La discussion du régime continu usuel est également importante du fait que ce dernier illustre l'effet d'accélération de la thermalisation due à la présence du désordre structurel au sein de la fibre.

Nous rappelons que  $L_d = 1/\Delta\beta \ll L_{\text{nl}}$ , alors la fonction de Green décroît sur une échelle de longueur beaucoup plus petite que l'échelle d'évolution de  $\langle Y_{lmnp}^{(j)} \rangle(z)$ , de sorte que l'intégrale de convolution peut être approximée pour  $z \gg L_d$ ,

$$J_{lmnp}^{(j)} \simeq \gamma \langle Y_{lmnp}^{(j)} \rangle \frac{i8\Delta\beta - \Delta\omega_{lmnp}}{\Delta\omega_{lmnp}^2 + (8\Delta\beta)^2}. \quad (2.29)$$

En substituant l'équation (2.29) dans le moment d'ordre quatre (2.25), nous obtenons les expressions des moments moyennés  $\langle X_p^{(j)} \rangle$  donnés par (2.22) et (2.23). En rassemblant tous les termes dans (2.21), nous avons accès à l'équation des amplitudes modales  $n_p(z) = 2\omega_p(z)$ . Puisque la MMF contient un grand nombre de modes  $M \simeq V_0^2/(2\beta_0^2) \gg 1$ , nous considérons la limite continue où les sommes discrètes dans (2.22) et (2.23) sont remplacées par des intégrales continues ( $\beta_0/V_0 \ll 1$ ). Nous obtenons l'équation cinétique

$$\begin{aligned} \partial_z \tilde{n}_{k_4}(z) = & \frac{4\gamma^2}{3\beta_0^6} \iiint dk_{1,2,3} \frac{\overline{\Delta\beta}}{\Delta\tilde{\omega}_{k_1 k_2 k_3 k_4}^2 + \overline{\Delta\beta}^2} \times |\tilde{S}_{k_1 k_2 k_3 k_4}|^2 \tilde{M}_{k_1 k_2 k_3 k_4} \\ & + \frac{32\gamma^2}{9\beta_0^2} \int dk_1 \frac{\overline{\Delta\beta}}{\Delta\tilde{\omega}_{k_1 k_4}^2 + \overline{\Delta\beta}^2} |\tilde{S}_{k_1 k_4}(\tilde{\mathbf{n}})|^2 (\tilde{n}_{k_1} - \tilde{n}_{k_4}), \end{aligned} \quad (2.30)$$

où  $dk_{1,2,3} = dk_1 dk_2 dk_3$ ,  $\overline{\Delta\beta} = 8\Delta\beta$ , et

$$\tilde{S}_{k_1 k_4} = \frac{1}{\beta_0^2} \int dk' \tilde{S}_{k_1 k' k' k_4} \tilde{n}_{k'}. \quad (2.31)$$

Les fonctions avec un tilde se réfèrent à l'extension naturelle continue correspondant aux fonctions discrètes, c-a-d :  $\tilde{n}_k(z) = n_{[k/\beta_0]}(z)$ ,  $\tilde{\beta}_k = \beta_{[k/\beta_0]}$ ,  $\tilde{S}_{k_1 k_2 k_3 k_4} = S_{[k_1/\beta_0][k_2/\beta_0][k_3/\beta_0][k_4/\beta_0]}$  et ainsi de suite, où  $[x]$  signifie la partie entière de  $x$ . Avec ces notations nous avons  $\tilde{M}_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \tilde{n}_{k_1} \tilde{n}_{k_2} \tilde{n}_{k_3} \tilde{n}_{k_4} (\tilde{n}_{k_4}^{-1} + \tilde{n}_{k_3}^{-1} - \tilde{n}_{k_1}^{-1} - \tilde{n}_{k_2}^{-1})$ ,  $\Delta\tilde{\omega}_k = \tilde{\beta}_{k_1} + \tilde{\beta}_{k_2} - \tilde{\beta}_{k_3} - \tilde{\beta}_{k_4}$ ,  $\Delta\tilde{\omega}_{k_1 k_2} = \tilde{\beta}_{k_1} - \tilde{\beta}_{k_2}$ , et  $\tilde{\beta}_k = k_x + k_y + \beta_0$ , avec  $\mathbf{k} = \beta_0(p_x, p_y)$  [17].

La principale nouveauté de l'équation cinétique (2.30) en comparaison aux travaux précédents sans aucun désordre structural [17], est que le mécanisme de dissipation induit par le désordre introduit une bande de fréquence finie au sein des résonances à 4 ondes entre les modes. Par conséquent, au lieu d'une distribution de Dirac  $\delta$  qui garantit la conservation de l'énergie à chaque interaction à 4 ondes, ici l'équation cinétique présente une distribution Lorentzienne. Nous remarquons que cet aspect fut déjà discuté dans différentes circonstances [118], en particulier dans le récent travail [119] traitant des lasers à fibre aléatoire en présence de gain et de pertes. Ici l'originalité est que la bande de fréquence finie de la distribution Lorentzienne et la dissipation effective associée  $\Delta\beta$  trouvent leur origine dans le désordre structural *conservatif* du milieu non linéaire.

En prenant la limite formelle  $\Delta\beta \rightarrow 0$  :  $\overline{\Delta\beta}/(\Delta\tilde{\omega}_{k_1 k_2 k_3 k_4}^2 + \overline{\Delta\beta}^2) \rightarrow \pi\delta(\Delta\tilde{\omega}_{k_1 k_2 k_3 k_4})$ , nous retrouvons une équation cinétique continue avec une forme similaire à celle dérivée en [17] en absence de désordre ( $\Delta\beta = 0$ ) et en absence d'effets de polarisation (limite scalaire  $\mathbf{A}_p \rightarrow A_{p,x}$ ). Cependant, la limite ci-dessus ( $\Delta\beta \rightarrow 0$ ) n'est pas physiquement pertinente ici puisque nous avons supposé  $L_d = 1/\Delta\beta \ll L_{nl}$  pour dériver l'équation (2.24). Ici nous considérons le régime  $\beta_0 \ll \Delta\beta$ , de telle sorte que c'est la limite opposée qui est physiquement pertinente  $\overline{\Delta\beta}/(\Delta\tilde{\omega}_{k_1 k_2 k_3 k_4}^2 + \overline{\Delta\beta}^2) \rightarrow 1/\overline{\Delta\beta}$ , et l'équation cinétique prend alors la forme réduite :

$$\begin{aligned} \partial_z \tilde{n}_{k_4}(z) = & \frac{\gamma^2}{6\Delta\beta\beta_0^6} \iiint d\mathbf{k}_{1,2,3} |\tilde{S}_{k_1 k_2 k_3 k_4}|^2 \tilde{M}_{k_1 k_2 k_3 k_4} \\ & + \frac{4\gamma^2}{9\Delta\beta\beta_0^2} \int d\mathbf{k}_1 |\tilde{S}_{k_1 k_4}(\tilde{\mathbf{n}})|^2 (\tilde{n}_{k_1} - \tilde{n}_{k_4}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Le second terme du côté droit de (2.32) force l'isotropisation de l'occupation des modes  $\tilde{n}_k(z)$  au sein de groupes de modes dégénérés, tandis que le premier terme force l'occupation des modes à atteindre la distribution d'équilibre la plus désordonnée. L'équation cinétique (2.32) conserve la puissance totale,  $N = \beta_0^{-2} \int \tilde{n}_k d\mathbf{k}$ , et exhibe un théorème  $H$  de croissance de l'entropie,  $\partial_z \mathcal{S}(z) \simeq 0$ , où l'entropie hors équilibre est définie

par  $\mathcal{S}(z) = \beta_0^{-2} \int \log(\tilde{n}_k) d\mathbf{k}$ . Cependant, à la différence de l'équation cinétique de turbulence d'ondes conventionnelle, l'équation cinétique (2.32) ne conserve pas l'énergie,  $E = \beta_0^{-2} \int \tilde{\beta}_k \tilde{n}_k d\mathbf{k}$ . Alors la distribution d'équilibre maximisant l'entropie octroyée par la contrainte de conservation de la puissance  $N$  est donnée par la distribution uniforme

$$\tilde{n}_k^{eq} = \text{const.} \quad (2.33)$$

Cet état d'équilibre signifie une équipartition de («particules») puissance parmi tous les modes. Nous rappelons qu'avec  $\beta_0 \ll \Delta\beta$ , la distribution Lorentzienne dans l'équation cinétique (2.30) est dominée par le désordre, de telle sorte que la longueur de propagation caractéristique de thermalisation vers la distribution d'équilibre (2.33) est donnée par

$$L_{\text{kin}}^{\text{disor}} \sim \Delta\beta L_{\text{nl}}^2 / \bar{S}_{lmnp}^2, \quad (2.34)$$

où  $\bar{S}_{lmnp}^2$  représente le carré moyen du tenseur  $S_{lmnp}$  impliquant des résonances non triviales entre les modes non dégénérés.

La principale conclusion est que l'équation cinétique (2.31) ne décrit pas le processus de condensation caractérisé par une occupation macroscopique du mode fondamental. Cela indique que le désordre faible empêche un effet d'auto-nettoyage du faisceau dans les MMF avec un très grand nombre de modes (régime de turbulence continu).

## 2.5.2 Turbulence d'ondes discrète

Nous avons vu que dans le régime de turbulence d'ondes continu, les quasi-résonances vérifiant  $\Delta\omega_{lmnp} \lesssim 1/L_{\text{kin}}^{\text{disor}}$  contribuent à l'intégrale de convolution (2.26). Contrairement au régime continu, dans le régime discret la valeur minimale non nulle de  $\Delta\omega_{lmnp}$  est telle que

$$\min(|\Delta\omega_{lmnp}|) = \beta_0 \gg 1/L_{\text{kin}}^{\text{disor}}. \quad (2.35)$$

En conséquence, seules les résonances exactes  $\Delta\omega_{lmnp} = 0$  contribuent à l'intégrale (2.26), tandis que les quators de modes non résonnants sont caractérisés par une rotation rapide de la phase qui mène à une intégrale nulle [15]. Nous remarquons que cette méthode peut aussi être justifiée par une procédure d'homogénéisation, comme reportée en [120] en présence d'un désordre non conservatif prenant en compte les effets de gains et de pertes au sein du système. Comme discuté au-dessus, les expériences habituelles d'auto-nettoyage de faisceau optique sont décrites par l'approche de turbulence d'ondes discrète puisque  $\beta_0^{-1} \simeq 10^{-3}$  m de sorte que la condition ci-dessus est bien vérifiée dans les expériences [19, 20].

Dans le régime de turbulence d'ondes discret, il faut considérer séparément les cas des interactions modales résonnantes et non résonnantes. Pour les quators de modes vérifiant  $\Delta\omega_{lmnp} = 0$ , la fonction de Green (2.27) décroît sur une longueur de propagation beaucoup plus petite que l'évolution de  $n_p(z)$ , car  $L_d = (\Delta\beta)^{-1} \ll L_{\text{kin}}^{\text{disor}}$ , alors (2.26) peut être approximée par  $J_{lmnp}^{(j)}(z) \simeq \frac{i\gamma}{8\Delta\beta} (Y_{lmnp}^{(j)})(z)$ . Pour  $\Delta\omega_{lmnp} \neq 0$ , la fonction de Green oscille rapidement sur une propagation plus petite que  $L_{\text{lin}} = \beta_0^{-1} \ll L_{\text{kin}}^{\text{disor}}$ . Une telle rotation de phase rapide combinée à la décroissance rapide de la fonction de Green sur

une longueur  $L_d \ll L_{\text{lin}}$  mènent à une intégrale de convolution nulle en (2.26). Il en résulte que le moment d'ordre quatre peut être écrit sous la forme

$$J_{lmnp}^{(j)}(z) \simeq \frac{i\gamma}{8\Delta\beta} \langle Y_{lmnp}^{(j)} \rangle(z) \delta^K(\Delta\omega_{lmnp}), \quad (2.36)$$

où  $\delta^K(\Delta\omega_{lmnp}) = 1$  si  $\Delta\omega_{lmnp} = 0$ , et zéro autrement. Nous remarquons que le régime discret discuté ici ne correspond pas exactement aux régimes discrets dus aux effets de tailles finies en turbulence d'ondes homogène [15]. Dans notre cas le système est inhomogène [ $V(\mathbf{r}) \neq \text{const}$ ] et la condition de résonance sur la quantité de mouvement qui est reflétée par le tenseur  $S_{lmnp}$  n'est pas aussi rigide que celle habituelle impliquant la distribution de Dirac en turbulence homogène.

On peut montrer qu'en combinant les équations (2.21-2.23) avec (2.36), il en résulte l'équation cinétique discrète pour les amplitudes modales  $n_p(z) = 2w_p(z)$  [21],

$$\begin{aligned} \partial_z n_p(z) = & \frac{\gamma^2}{6\Delta\beta} \sum_{l,m,n} |S_{lmnp}|^2 \delta^K(\Delta\omega_{lmnp}) M_{lmnp}(\mathbf{n}) \\ & + \frac{4\gamma^2}{9\Delta\beta} \sum_l |S_{lp}(\mathbf{n})|^2 \delta^K(\delta\omega_{lp})(n_l - n_p), \end{aligned} \quad (2.37)$$

où  $S_{lp}(\mathbf{n}) = \sum_{l'} S_{lm'm'p} n_{m'}$ , et  $M_{lmnp}(\mathbf{n}) = n_l n_m n_p + n_l n_m n_n - n_n n_p n_m - n_n n_p n_l$ , avec « $n_m$ » pour « $n_m(z)$ »,  $\Delta\omega_{lp} = \beta_l - \beta_p$ . Selon l'équation cinétique (2.37), la longueur caractéristique de thermalisation est la même que celle obtenue dans le régime de turbulence d'ondes continu (2.34), à savoir  $L_{\text{kin}}^{\text{disor}} \sim \Delta\beta L_{\text{nl}}^2 / \bar{S}_{lmnp}^2$ .

Mis à part sa forme discrète, l'équation cinétique (2.37) a une structure analogue à l'équation cinétique de turbulence d'ondes conventionnelle, de sorte qu'elle décrit un processus de condensation qui se produit quel que soit le signe de la non linéarité  $\gamma$  [voir le facteur  $\gamma^2$  en équation (2.37)] [15, 16]. Il est important de noter que, contrairement à l'équation cinétique (2.32) dérivée dans le régime de turbulence d'ondes continu, ici l'équation (2.37) conserve aussi l'énergie  $E = \sum_p \beta_p n_p(z)$  malgré la présence de l'effet de dissipation  $\Delta\beta$ . La raison en est que seules les résonances exactes contribuent au régime de turbulence discrète, de sorte que l'équation cinétique discrète n'est pas affectée par l'élargissement de la résonance induit par la dissipation qui inhibe la conservation de l'énergie en régime de turbulence continu. L'équation cinétique (2.37) conserve aussi le «nombre de particules»  $N = \sum_p n_p(z)$  et exhibe un théorème  $H$  de croissance d'entropie pour une entropie hors équilibre  $\mathcal{S}(z) = \sum_p \log[n_p(z)]$ . En conséquence, il décrit une évolution irréversible vers l'état d'équilibre thermodynamique de Rayleigh-Jeans qui réalise le maximum d'entropie :

$$n_p^{\text{eq}} = T/(\beta_p - \mu). \quad (2.38)$$

Le système présente une transition de phase vers la condensation lorsque  $\mu \rightarrow \beta_0$  [17] : pour  $E \geq E_{\text{crit}} = \frac{NV_0}{2}(1 + 2\beta_0 V_0)$  il n'y a pas de condensation  $n_0^{\text{eq}}/N = 0$ , tandis que pour  $E < E_{\text{crit}}$  le mode fondamental de la MMF se peuple de façon macroscopique

$$\frac{n_0^{\text{eq}}}{N} = 1 - \frac{E - E_0}{E_{\text{crit}} - E_0}, \quad (2.39)$$

où  $E_0 = N\beta_0$  est l'énergie minimale (toutes les particules sont dans le mode fondamental). Notons que la dérivation de (2.39) ainsi que le processus de condensation vont faire l'objet d'une discussion détaillée au Chapitre 3, en relation avec son étude expérimentale. Comme évoqué en [22], une forme auto-nettoyée stable du profil d'intensité  $|\psi|^2(\mathbf{r})$  peut être interprétée comme une conséquence de la population macroscopique du mode fondamental de la MMF (voir le film publié dans le «Supplementary Material» de [22]).

### 2.5.3 Accélération de la thermalisation par le désordre

La longueur de propagation caractéristique sur laquelle le processus de thermalisation a lieu en l'absence de désordre structurel est obtenue depuis l'équation cinétique dérivée en [17],  $L_{\text{kin}}^{\text{ord}} \sim \beta_0 L_{\text{nl}}^2 / \bar{S}_{lmnp}^2$ . Par ailleurs, l'équation cinétique 2.37 donne une longueur de propagation caractéristique de thermalisation  $L_{\text{kin}}^{\text{disor}} \sim \Delta\beta L_{\text{nl}}^2 / \bar{S}_{plmn}^2$ . Par conséquent, dans les régimes habituels d'expériences d'auto-nettoyage de faisceau où  $\beta_0 \gg \Delta\beta$ , le désordre faible est responsable d'une accélération significative du taux de thermalisation et condensation

$$L_{\text{kin}}^{\text{disor}} / L_{\text{kin}}^{\text{ord}} \sim \Delta\beta / \beta_0. \quad (2.40)$$

Considérant des valeurs typiques de  $\beta_0 \sim 10^3 \text{ m}^{-1}$  et  $L_d = 1/\Delta\beta$  plus grand d'une dizaine de centimètres, nous observons que nous avons toujours  $L_{\text{kin}}^{\text{disor}} / L_{\text{kin}}^{\text{ord}} \ll 1$ . En conséquence, le désordre faible est responsable d'une accélération significative du processus de thermalisation et condensation [22]. Nous avons confirmé l'effet d'accélération de thermalisation induit par le désordre (2.40) en effectuant des simulations numériques de l'équation NLS (2.16) pour différentes quantités de désordre  $\Delta\beta$ . Les résultats sont reportés en Figure 2.4 et confirment le taux d'accélération de thermalisation prédit par la théorie. Plus précisément, un accord quantitatif a été obtenu entre les simulations de l'équations NLS (2.16) et celles de l'équation cinétique discrète (2.37), sans utiliser des paramètres ajustables. Nous notons également que nous avons délibérément choisi une petite valeur de la fraction condensée  $n_0/N \simeq 0.2$  afin d'éviter de grands écarts par rapport à la statistique Gaussienne du mode fondamental, bien que la théorie ait été validé même pour de fortes valeurs de fractions de puissances condensées,  $n_0^{eq}/N \simeq 0.6$  [22].

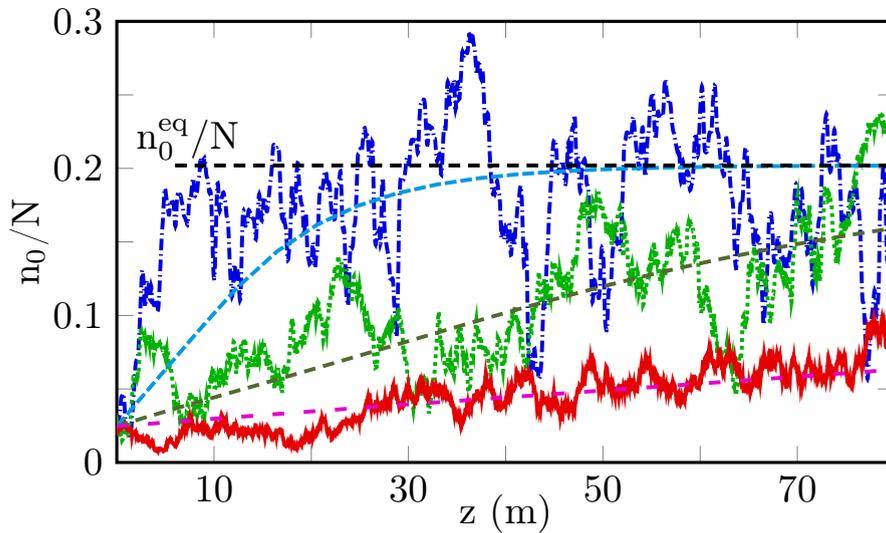


FIGURE 2.4 – Accélération de la thermalisation induite par une diminution de la variance du désordre (modèle de désordre décorrélé) : Simulations numériques de l'équation NLS (2.16) montrant l'évolution du mode fondamental  $n_0(z)$ , pour différents valeurs de désordre  $\Delta\beta$ . Les lignes hachurées montrent les simulations correspondantes de l'équation cinétique (2.37), démarrant de la même condition initiale que les simulations NLS. Les paramètres sont  $\Delta\beta \simeq 2.6 \text{ m}^{-1}$  ( $2\pi/\sigma_\beta = 2.1 \text{ m}$ ,  $l_\beta = 30 \text{ cm}$ ) bleu (ligne hachurée);  $\Delta\beta \simeq 10.5 \text{ m}^{-1}$  ( $2\pi/\sigma_\beta = 26 \text{ cm}$ ,  $l_\beta = 1.88 \text{ cm}$ ) verte (ligne hachurée);  $\Delta\beta = 42 \text{ m}^{-1}$  ( $2\pi/\sigma_\beta = 6.6 \text{ cm}$ ,  $l_\beta = 0.47 \text{ cm}$ ) rouge (ligne continue); tandis que la puissance est  $N = 47.5 \text{ kW}$  ( $M = 120$  modes,  $a = 26 \text{ }\mu\text{m}$ ). Les courbes tendent à converger vers l'équilibre théorique commun  $n_0^{\text{eq}}/N \simeq 0.2$  [ligne noire hachurée, obtenue depuis l'équation (2.39)] avec différents taux de thermalisation, confirmant l'accélération de condensation prédite par la théorie en équation (2.40), sans utiliser des paramètres ajustables.

### 2.5.4 Nettoyage de faisceau induit par le désordre

L'effet de «nettoyage de faisceau» peut être quantifié à travers l'analyse des fluctuations d'intensité durant la propagation dans la MMF. À cet effet, nous considérons la variance relative des fluctuations d'intensité pour un faisceau incohérent non homogène

$$\sigma_I^2(z) = \frac{\int \langle I^2(\mathbf{r}, z) \rangle - \langle I(\mathbf{r}, z) \rangle^2 d\mathbf{r}}{\int \langle I(\mathbf{r}, z) \rangle^2 d\mathbf{r}}, \quad (2.41)$$

où l'intensité est  $I(\mathbf{r}, z) = |\psi|^2(\mathbf{r}, z)$ . Nous remarquons que pour un faisceau avec une statistique Gaussienne, nous avons  $\sigma_I^2 = 1$ . Nous reportons en Figure 2.5 l'évolution de la variance des fluctuations d'intensité en présence et en absence de désordre. Les crochets  $\langle \cdot \rangle$  en équation (2.41) se réfèrent à une moyenne sur une longueur de propagation  $\Delta z = 10 \text{ mm}$ , qui est plus grande que l'échelle de longueur de battement des modes  $\sim \beta_0^{-1}$  ( $\simeq 0.2 \text{ mm}$  dans l'exemple de la Figure 2.5). Les simulations en Figure 2.5 montrent clairement que la présence de désordre induit un processus de condensation rapide, qui à son tour conduit à une réduction significative de l'écart type relatif des fluctuations d'intensité  $\sigma_I \simeq 0.1$ . À l'inverse, en l'absence de désordre, le faisceau multimode peut exhiber un profil d'intensité nettoyé à certaines longueurs de propagation [voir le profil d'intensité à  $z = 15 \text{ m}$  en Figure 2.5(b)], cependant sa nature oscillatoire multimode

empêche une propagation stable du faisceau nettoyé, comme en témoigne l'écart type relatif des fluctuations d'intensité qui ne diminuent que lentement en-dessous de  $\sigma_I \simeq 0.9$ .

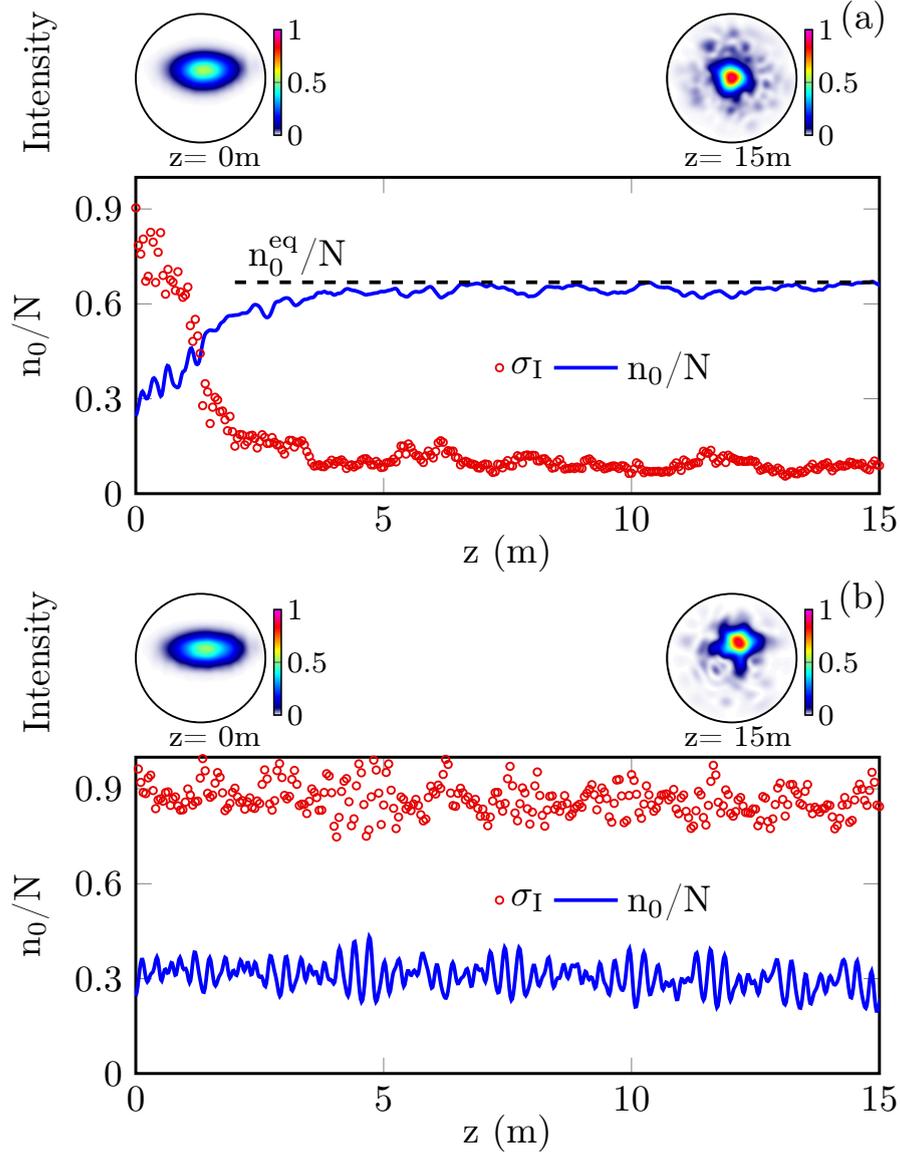


FIGURE 2.5 – Nettoyage de faisceau induit par le désordre : Simulations numériques de l'équation NLS (2.16) montrant l'évolution de la variance relative des fluctuations d'intensité  $\sigma_I(z)$  depuis l'équation (2.41) (cercles rouges), et la fraction de puissance condensée  $n_0(z)/N$  (ligne bleue), en présence de désordre (a), et en absence de désordre (b). Les profils d'intensité  $I(\mathbf{r})$  au sein du cœur de la fibre (cercles) sont montrés à  $z = 0$  et  $z = 15$  m. La ligne noire hachurée horizontale en (a) montre la fraction de puissance condensée à l'équilibre thermodynamique,  $n_0^{eq}/N \simeq 0.68$  [depuis l'équation (2.39)]. Le désordre introduit un nettoyage de faisceau caractérisé par une réduction significative des fluctuations d'intensité à  $\sigma_I \simeq 0.1$  (a), qui est en contraste avec le cas sans désordre où la variance des fluctuations d'intensité reste presque constante au cours de la propagation avec  $\sigma_I \simeq 0.9$ . Les paramètres sont  $\Delta\beta = 2.6 \mu\text{m}^{-1}$  ( $2\pi/\sigma_\beta = 2.13$  m;  $l_\beta = 30$  cm),  $M = 120$  modes,  $a = 26 \mu\text{m}$ ,  $N = 47.5$  kW.

## 2.6 Désordre corrélé et partiellement corrélé

En section 2.4.2 nous avons considéré un modèle de désordre qui peut être appelé «désordonné entre mode», dans le sens où chaque mode individuel de la MMF exhibe un désordre différent, c-a-d, que les fonctions  $\nu_{p,j}(z)$  en (2.17) sont indépendantes les unes des autres. Bien que cette approche puisse être considérée comme justifiée dans différentes circonstances [87, 88, 121], on peut remettre en question sa validité pour une MMF caractérisée par un grand nombre de modes. Dans la suite nous abordons cette question en considérant deux différents modèles de désordre, à savoir le modèle de désordre corrélé entre modes, et le modèle de désordre partiellement corrélé entre modes.

### 2.6.1 Bruit de mode corrélé

Nous considérons tout d'abord le modèle de modes complètement corrélés qui peut être considéré comme la limite opposée à celle de modes désordonnés, dans le sens où tous les modes subissent le même bruit (plus précisément, les mêmes réalisations du bruit). Dans cette limite, les matrices  $2 \times 2$  décrivant le bruit modal en (2.17) sont réduites à  $\mathbf{D}_p = \mathbf{D}$  avec  $\mathbf{D} = \sum_{j=0}^3 \nu_j \sigma_j$ .

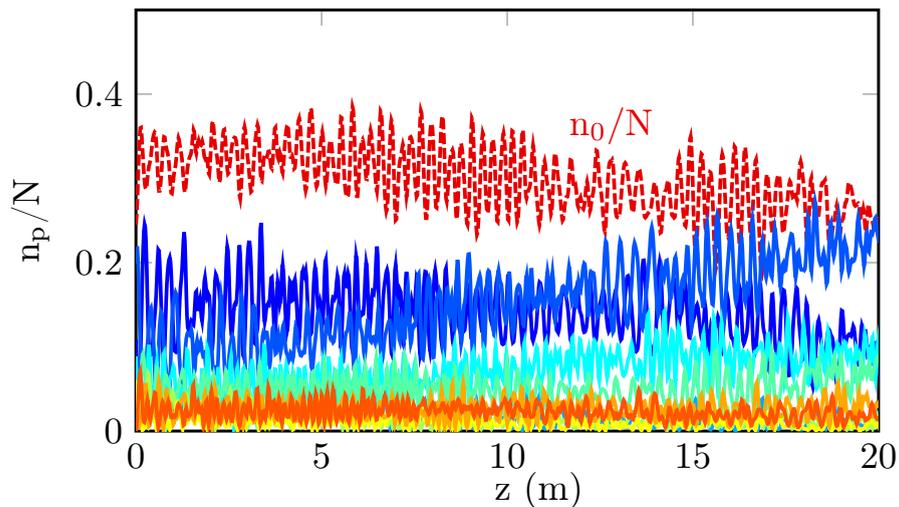


FIGURE 2.6 – Désordre de modes corrélé : Simulations numériques de l'équation NLS (2.16) montrant l'évolution des composantes modales  $n_p(z)$  en présence d'une condition initiale cohérente : mode fondamental  $p = 0$  (rouge hachuré),  $p = 1$  (bleu sombre plein),  $p = 2$  (bleu plein),  $p = 3$  (bleu clair plein),  $p = 4$  (cyan plein),  $p = 5$  (vert clair plein),  $p = 6$  (ver plein),  $p = 7$  (jaune plein), et  $p = 8$  (orange plein). Le désordre de modes corrélé n'introduit pas de dissipation effective ( $\Delta\beta = 0$ ) : les corrélations de phase entre les modes d'ordre bas sont préservées et mènent à une dynamique oscillatoire similaire à celle en absence de désordre (voir Figure 2.3). À l'équilibre thermodynamique complet, le système devrait atteindre la fraction de puissance condensée  $n_0^{eq}/N \simeq 0.68$  [depuis l'équation (2.39)]. Les paramètres sont  $\Delta\beta = 2.6 \mu\text{m}^{-1}$  ( $2\pi/\sigma_\beta = 2.13 \text{ m}$ ;  $l_\beta = 30 \text{ cm}$ ),  $M = 120$  modes,  $a = 26 \mu\text{m}$ ,  $N = 47.5 \text{ kW}$ .

La théorie développée ci-dessus pour le modèle désordonné de désordre peut être étendue au modèle complètement corrélé. La théorie révèle dans ce cas un résultat remarquable,

à savoir que les équations pour les moments d'ordre quatre  $J_{lmnp}^{(j)}(z)$  ne présentent pas d'amortissement effectif, c-a-d,  $\Delta\beta = 0$ . Ceci est en contraste avec le modèle de désordre corrélé discuté ci-dessus, voir équations (2.24). Ce résultat a une conséquence majeure : le bruit de mode complètement corrélé ne modifie pas la régularisation des résonances à quatre ondes et le système retrouve une dynamique oscillatoire analogue à celle obtenue en absence de désordre. Nous illustrons ceci en Figure 2.6 qui reporte l'évolution des composantes modales  $n_p(z)$  obtenues par simulation de l'équation NLS modale (2.16) en présence de désordre de modes corrélé. La condition initiale est cohérente (tous les modes sont corrélés les uns aux autres) et nous voyons en Figure 2.6 que les modes d'ordre bas retrouvent une dynamique oscillatoire reflétant la présence de fortes corrélations de phase, comme pour le régime cohérent discuté en absence de désordre en Figure 2.3. Cette dynamique cohérente est consistante avec l'idée intuitive que, en absence de dissipation effective ( $\Delta\beta = 0$ ), les corrélations de phases ne disparaissent pas durant la propagation.

### 2.6.2 Bruit de mode partiellement corrélé

Nous avons vu que le désordre de modes complètement corrélés n'introduit pas de dissipation effective ( $\Delta\beta = 0$ ) ce qui mène à une dynamique cohérente analogue à celle obtenue en absence de désordre.

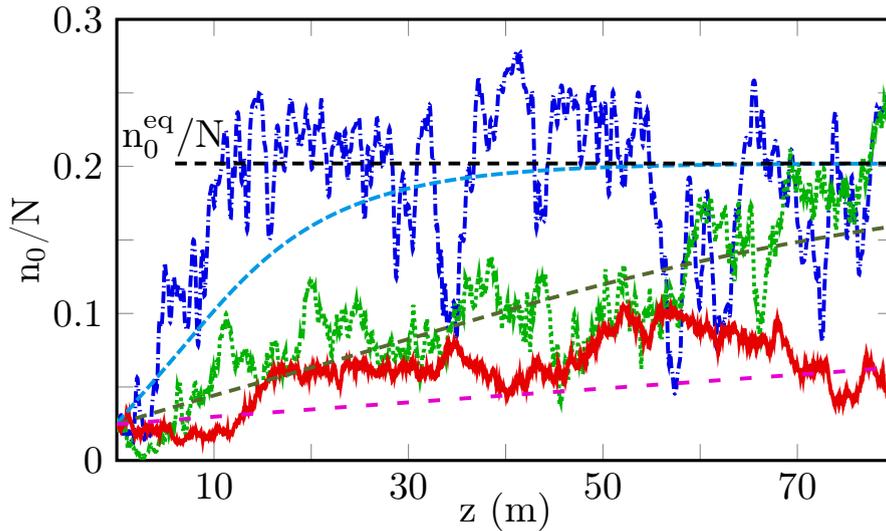


FIGURE 2.7 – Accélération de thermalisation avec un modèle de désordre de modes partiellement corrélé : Simulations numériques de l'équation NLS (2.16) montrant l'évolution du mode fondamental  $n_0(z)$ , pour différentes valeurs de désordre  $\Delta\beta$ . Les lignes hachurées montrent les simulations correspondantes de l'équation cinétique (2.37), en partant de la même condition initiale que les simulations NLS. Les paramètres sont  $\Delta\beta \simeq 2.6 \text{ m}^{-1}$  ( $2\pi/\sigma_\beta = 2.1 \text{ m}$ ,  $l_\beta = 30 \text{ cm}$ ) bleue (ligne hachurée);  $\Delta\beta \simeq 10.5 \text{ m}^{-1}$  ( $2\pi/\sigma_\beta = 26 \text{ cm}$ ,  $l_\beta = 1.88 \text{ cm}$ ) verte (ligne hachurée);  $\Delta\beta = 42 \text{ m}^{-1}$  ( $2\pi/\sigma_\beta = 6.6 \text{ cm}$ ,  $l_\beta = 0.47 \text{ cm}$ ) rouge (ligne continue); tandis que la puissance est  $N = 47.5 \text{ kW}$  ( $M = 120$  modes,  $a = 26 \mu\text{m}$ ). Les courbes tendent à converger vers l'état d'équilibre théorique commun  $n_0^{\text{eq}}/N$  [linge noire hachurée, obtenue depuis l'équation (2.39)] avec différents taux de relaxation, confirmant l'accélération de condensation prédite par la théorie en équation (2.40) pour un désordre de modes partiellement corrélé.

Nous avons donc considéré un modèle de désordre «partiellement corrélé» dans lequel les modes qui appartiennent à différents groupes de modes dégénérés subissent un bruit décorrélé, tandis que les modes dégénérés du même groupe subissent le même bruit. Bien que ce modèle puisse être considéré comme artificiel pour une fibre multimode, c'est aussi un modèle naturel dans le sens où c'est le modèle intermédiaire entre les deux limites des modèles corrélés et décorrélés. Il est mathématiquement traitable et il montre que l'équation cinétique discrète (2.37) est robuste tant que le désordre n'est pas complètement corrélé.

La théorie révèle que les corrélations (de second ordre) entre les modes non dégénérés disparaissent et peuvent être négligées, comme cela a été montré pour le modèle de désordre décorrélé [21]. Cependant, le calcul des moments d'ordre quatre  $J_{lmnp}^{(j)}$  est plus délicat parce que le bruit de mode corrélé introduit plus de termes dans le calcul des équations des moments. Nous obtenons différents résultats pour les moments d'ordre quatre qui dépendent des modes spécifiques impliqués dans ce moment. Quasiment tous les moments d'ordres quatre satisfont une équation d'évolution avec une dissipation proportionnelle à  $\Delta\beta$ . Ce résultat est analogue à celui obtenu pour le modèle de désordre décorrélé considéré ci-dessus, bien que les coefficients devant  $\Delta\beta$  soient différents et leurs valeurs dépendant des modes spécifiques impliqués dans ce moment d'ordre quatre. De plus, contrairement au modèle de désordre décorrélé, il y a ici des cas particuliers où les moments d'ordre quatre ne présentent aucune dissipation. De tels cas spéciaux ne contribuent pas au processus de thermalisation rapide décrit par la dissipation effective  $\Delta\beta$ , mais au lieu de cela, ils induisent un échange de puissance réversible au sein d'un groupe de modes dégénérés [21].

Pour résumer, les développements théoriques nous permettent de déduire que l'équation cinétique est toujours de la forme donnée par l'équation cinétique discrète (2.37) et que l'accélération de la thermalisation est toujours donnée par  $L_{\text{kin}}^{\text{disor}} \sim \Delta\beta L_{\text{nl}}^2 / \bar{S}_{lmnp}^2$  en équation (2.34). Cet effet d'accélération de thermalisation a été confirmé par les simulations numériques de l'équation NLS (2.16). Les résultats sont reportés en Figure 2.7 pour les mêmes paramètres de désordre que ceux considérés en Figure 2.4, excepté que le modèle de désordre de modes partiellement corrélés a été considéré. L'accord avec l'équation cinétique discrète (2.37) confirme l'effet d'accélération de thermalisation prédit en (2.40) pour un modèle de désordre partiellement corrélé.

## 2.7 Régime mixte cohérent-incohérent correspondant aux expériences

Les équations cinétiques décrivant l'évolution des composantes modales  $n_p(z)$  ont été dérivées sous l'approximation que les effets de désordre dominent les effets non linéaires  $L_d \ll L_{\text{nl}}$ . Bien que les paramètres qui caractérisent le désordre, à savoir la longueur de corrélation  $l_\beta$  et la «longueur de battement» effective  $2\pi/\sigma_\beta$  (reflétant la «force» du désordre) ne soient pas connues précisément, des mesures précises en fibres optiques *monomode* indiquent que de telles échelles de longueur peuvent être de l'ordre de un mètre à plusieurs mètres [122].

Nous reportons dans cette section des simulations numériques de l'équation NLS modale

(2.16) où le désordre et la non-linéarité sont typiquement du même ordre de grandeur  $L_d \sim L_{nl}$ . Par souci d'exhaustivité, nous considérons les deux modèles de désordre discutés en section 2.6 où les modes exhibent un bruit décorrélé ou partiellement décorrélé. La Figure 2.8 reporte les résultats pour un modèle décorrélé de désordre dans lequel nous avons considéré différentes valeurs de  $l_\beta$  et  $2\pi/\sigma_\beta$  du bruit. Nous remarquons que, au premier abord, pour des valeurs relativement petites de  $(l_\beta, 2\pi/\sigma_\beta)$ , l'évolution globale des composantes modales  $n_p(z)$  sont similaires à celles reportées dans le régime où le désordre domine la non-linéarité. Il y a cependant une différence qui distingue les deux régimes. Les fluctuations rapides qu'on peut observer sur l'échelle de longueur du désordre  $L_d$  ( $\ll L_{nl}$ ) sur les Figures 2.4-2.7 sont plus lisses dans le régime où le désordre et la non-linéarité sont du même ordre de grandeur en Figure 2.8. Nous remarquons également qu'une variation de la longueur de corrélations  $l_\beta$  (correspondant à différentes lignes de la Figure 2.8) a un impact marginal sur la dynamique comparativement à la force du désordre  $2\pi/\sigma_\beta$  (correspondant à différentes colonnes en Figure 2.8). Nous notons que les valeurs de  $2\pi/\sigma_\beta$  en Figure 2.8 correspondent à des fluctuations de l'indice de réfraction d'ordre  $\delta n \sim \sigma_b/k_0 \sim 10^{-7}$ .

Il est intéressant de noter que, en augmentant encore la longueur de corrélation et de battement du désordre  $(l_\beta, 2\pi/\sigma_\beta)$ , le système entre dans un régime différent, qui est caractérisé par la présence d'oscillations prononcées des composantes modales. Ce comportement oscillatoire reflète la présence d'une corrélation de phase parmi les composantes modales, comme il en a été discuté à travers le *régime modal cohérent* d'interaction en absence de désordre en section 2.4. Ici la présence de désordre modéré n'est pas suffisante pour éliminer une telle cohérence de phase de sorte que les modes présentent un régime d'interaction mixte cohérent-incohérent.

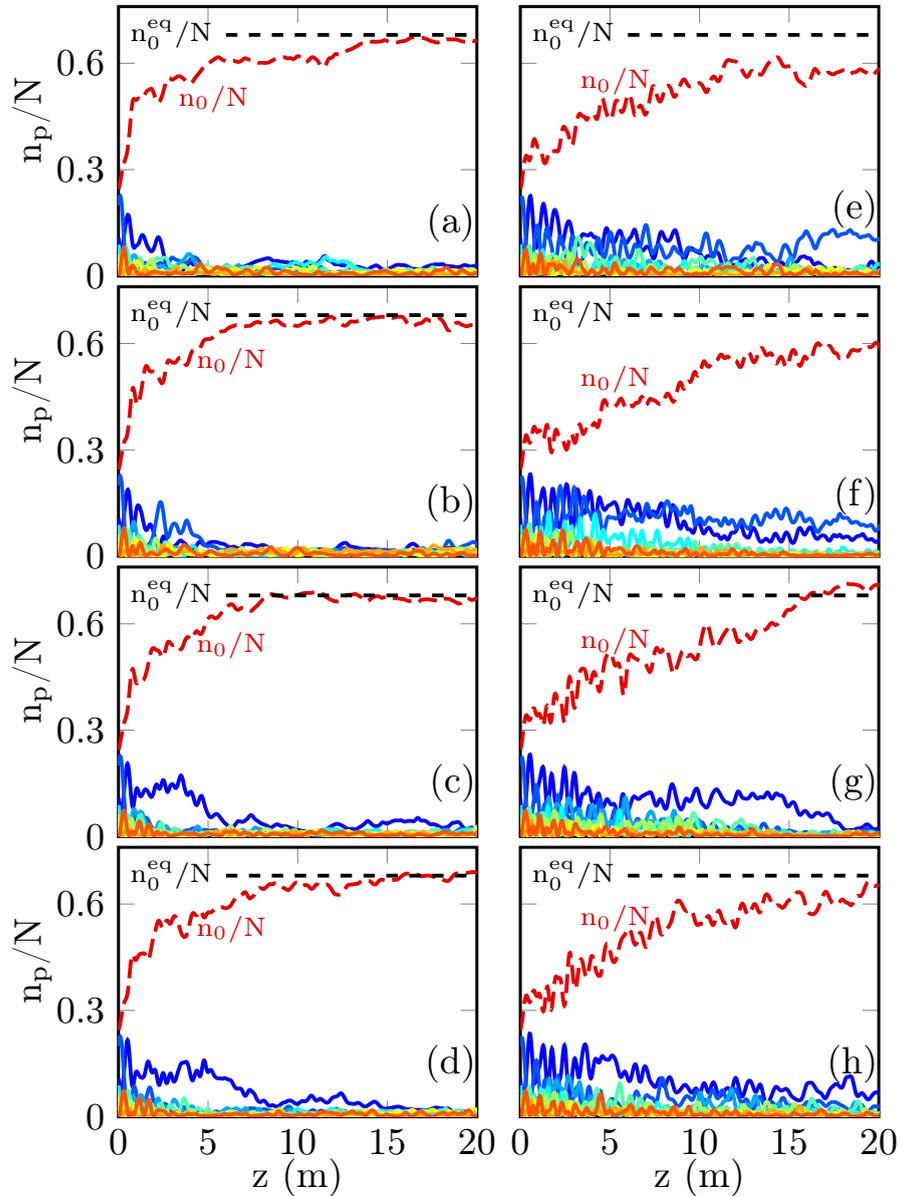


FIGURE 2.8 – Régime mixte cohérent-incohérent avec désordre de modes décorrélé : Simulations numériques de l'équation NLS (2.16) montrant l'évolution des composantes modales  $n_p(z)$ , pour différentes valeurs de  $2\pi/\sigma_\beta$ , et longueurs de corrélations  $l_\beta$  : mode fondamental  $p = 0$  (rouge hachuré),  $p = 1$  (bleu sombre plein),  $p = 2$  (bleu plein),  $p = 3$  (bleu clair plein),  $p = 4$  (cyan plein),  $p = 5$  (vert clair plein),  $p = 6$  (vert plein),  $p = 7$  (jaune plein), et  $p = 8$  (orange plein). Les paramètres sont  $2\pi/\sigma_\beta = 5.3$  m (première colonne) et  $2\pi/\sigma_\beta = 10.6$  m (seconde colonne). Première ligne :  $l_\beta = 0.5$  m, deuxième ligne :  $l_\beta = 1$  m, troisième ligne :  $l_\beta = 3$  m, quatrième ligne :  $l_\beta = 5$  m. En raison de l'impact réduit du désordre, les composantes modales entrent dans un régime mixte cohérent-incohérent d'interaction caractérisé par un comportement quasi-oscillatoire (sensible à la phase) des composantes modales. À l'équilibre thermodynamique complet, le système atteint la fraction de puissance condensée  $n_0^{eq}/N \simeq 0.68$  [depuis l'équation (2.39)]. La puissance est  $N = 19$  kW, la condition initiale est un faisceau Gaussien cohérent ( $M = 120$  modes,  $a = 26 \mu\text{m}$ ).

Le même comportement phénoménologique est observé en considérant un modèle de bruit partiellement corrélé, comme illustré en Figure 2.9. Il est intéressant de noter, que pour des valeurs modérées de désordre, l'évolution des composantes modales est très similaire à celle observée pour le modèle de désordre décorrélé (comme illustré par la comparaison des premières colonnes en Figure 2.8 et 2.9). Le fait qu'une corrélation partielle entre les modes n'altère pas le taux de thermalisation a déjà été discuté dans le régime où le désordre domine la non-linéarité (voir section 2.6). En réalité, la principale différence entre les modèles de désordre décorrélé et partiellement corrélé est observée en réduisant encore l'impact du désordre (c-a-d en augmentant  $l_\beta$  et  $2\pi/\sigma_\beta$ ). Dans ce cas, le modèle de bruit partiellement corrélé mène à un comportement oscillatoire plus prononcé, une caractéristique qui peut être facilement interprétée en remarquant que, puisque les modes dégénérés voient le même bruit, l'impact du désordre est moins efficace pour briser les corrélations de phase entre les modes. Par conséquent, quand nous considérons un bruit partiellement corrélé entre modes pour de grandes valeurs de  $l_\beta$  et  $2\pi/\sigma_\beta$ , le régime mixte cohérent-incohérent d'interaction se manifeste de façon apparente, et le comportement oscillatoire correspondant des composantes modales mène à une décélération du processus de thermalisation, voir la seconde colonne de la Figure 2.9.

Il est important de noter que les simulations en Figures 2.8 et 2.9 ont été réalisées avec des paramètres proches des expériences récentes de condensation d'ondes qui vont être reportées en Chapitre 3 [26]. Cependant les simulations présentées ci-dessus diffèrent de l'expérience par un facteur trois dans la puissance considérée. Notons à ce sujet qu'un meilleur accord entre simulations et résultats expérimentaux nécessiterait de prendre en considération un modèle spatio-temporel de propagation de la lumière, afin de décrire la nature impulsionnelle du faisceau laser injecté dans la MMF dans les expériences. Notons aussi qu'une comparaison directe entre les expériences et les simulations sera reportée dans le cadre des cascades de turbulences en Conclusion, voir Figure 6.2. Des simulations numériques de l'équation NLS (2.16) ont également été réalisées avec des conditions initiales de type speckle afin d'être plus proche du faisceau injecté dans la fibre passant au préalable par le diffuseur, voir Figure 2.10. Ces simulations ont été réalisées avec les mêmes paramètres de désordre, à savoir  $l_\beta = 0.5\text{m}$  et  $2\pi/\sigma_\beta = 5.3\text{m}$ , et pour différentes réalisations de speckle.

Nous commentons enfin l'impact du modèle de désordre corrélé entre modes. Nous avons vu en section 2.6 que dans le régime  $L_d \ll L_{nl}$ , ce modèle de désordre n'introduit pas de dissipation effective de sorte qu'il ne mène pas à un processus de condensation rapide. Dans le régime  $L_d \sim L_{nl}$  les simulations révèlent également un comportement oscillatoire persistant des modes en démarrant d'une condition initiale cohérente (comme en Figure 2.8 et 2.9), tandis qu'une décélération significative du processus de thermalisation caractérisée par un régime mixte cohérent-incohérent a été observée en démarrant les simulations d'un faisceau speckle (phase aléatoire entre les modes).

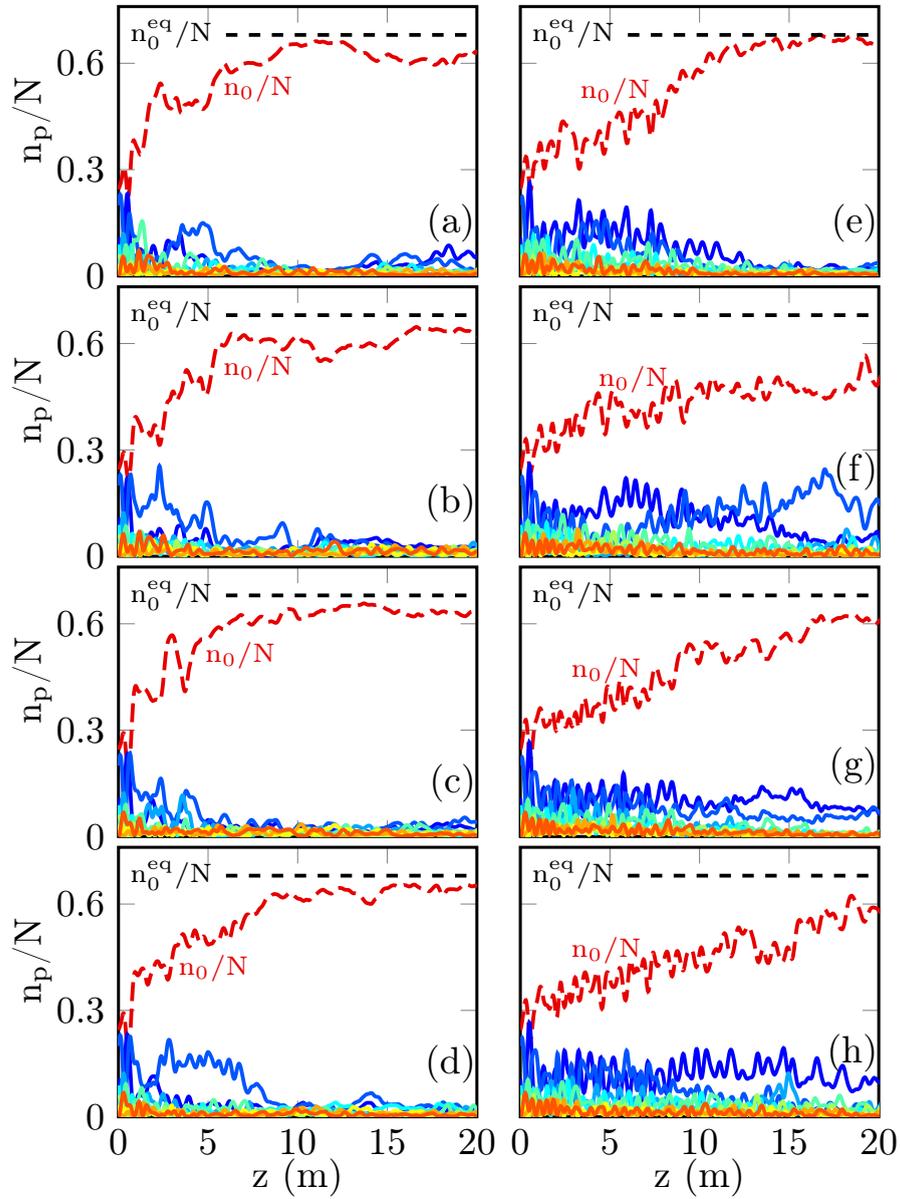


FIGURE 2.9 – Régime mixte cohérent-incohérent avec désordre de modes partiellement corrélé : Simulations numériques de l'équation NLS (2.16) montrant l'évolution des composantes modales  $n_p(z)$ , pour différentes valeurs de force du désordre  $2\pi/\sigma_\beta$ , et longueur de corrélation  $l_\beta$ . Les paramètres et condition initiale sont les mêmes qu'en Figure 2.8, excepté qu'un désordre de modes partiellement corrélé a été considéré.

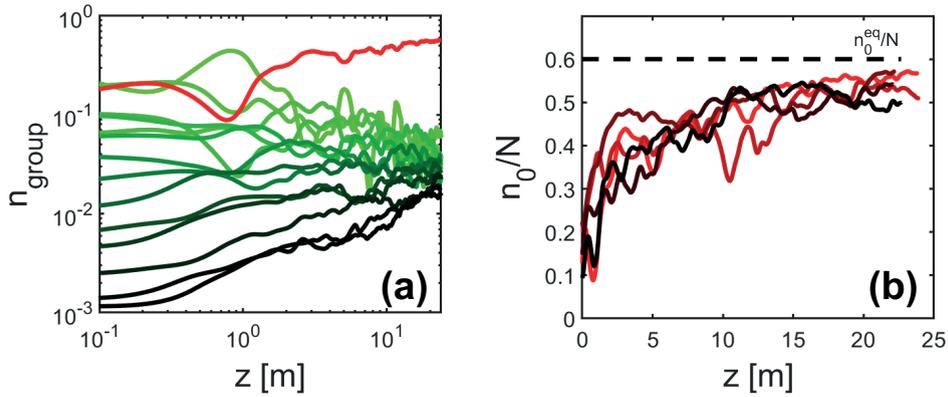


FIGURE 2.10 – **Simulations numériques de l'équation NLS (2.16) avec condition initiale de type speckle** : (a) Evolution de la puissance dans chaque groupe de modes durant la propagation pour une simulation numérique donnée, le mode fondamental est représenté par la courbe rouge. (b) Evolution de la fraction de puissance condensée dans le mode fondamental durant la propagation pour plusieurs simulations numériques avec différentes conditions initiales de type speckle. Pour toutes les simulations numériques présentées :  $l_\beta = 0.5\text{m}$ ,  $2\pi/\sigma_\beta = 5.3\text{m}$  et  $N = 15\text{kW}$ .

## 2.8 Gel et ralentissement du processus de condensation

Dans cette section nous allons discuter d'une conséquence importante de la nature discrète de la turbulence d'ondes en MMF, à savoir un gel effectif du processus de thermalisation, qui devrait expliquer pourquoi le nettoyage de faisceau optique n'a pas été observé en fibre multimode à saut d'indice.

### 2.8.1 Absence de nettoyage de faisceau en fibre à saut d'indice : Gel du processus de thermalisation

La théorie développée dans ce Chapitre peut être appliquée en principe à différents guides d'ondes, tel que les MMF à saut d'indice qui sont caractérisées par un potentiel homogène  $V(\mathbf{r})$ . Cet exemple est important car l'effet d'auto-nettoyage de faisceau optique n'a pas été observé dans une fibre multimode à saut d'indice.

Pour discuter de cette observation expérimentale, nous notons d'abord que contrairement à une fibre multimode à gradient d'indice, dans une MMF à saut d'indice les valeurs propres  $\beta_p$  ne sont pas également espacées et les modes dégénérés sont rares. Nous rappelons à cet égard que le processus de thermalisation se produit par l'excitation des modes d'ordres élevés, ce qui nécessite des résonances «non triviales», c-a-d, des résonances qui impliquent au moins trois (ou quatre) modes non-dégénérés. Il est important de noter que, contrairement à une fibre à gradient d'indice, dans une MMF à saut d'indice de telles résonances non triviales *ne sont pas des résonances exactes* vérifiant  $\Delta\omega_{lmnp} = 0$ . Cela signifie que la propagation de lumière incohérente en MMF à saut d'indice devrait être décrite par des quasi-résonances à travers l'approche de turbulence d'onde continue. Cependant,

comme discuté ci-dessous les quasi-résonances sont peu efficaces dans les MMF usuelles à saut d'indice et la plupart d'entre elles vérifient  $|\Delta\omega_{lmnp}| > 1/L_{nl}$ , c-a-d, le désaccord de résonance est trop grand pour fournir une contribution non nulle à l'équation cinétique.

Nous illustrons cela en comparant le nombre de résonances non triviales  $N_{\text{res}}$  pour une MMF GRIN et une MMF à saut d'indice. Plus spécifiquement, nous calculons le nombre de résonances exactes pour une fibre à gradient d'indice ( $\Delta\omega_{lmnp} = 0$ ), et le nombre de quasi-résonances pour une fibre à saut d'indice  $|\Delta\omega_{lmnp}| \ll L_{nl}^{-1}$ . Les résonances sont non triviales dans le sens qu'elles impliquent au moins trois groupes différents de modes non-dégénérés. Nous considérons des fibres avec approximativement le même nombre de modes  $N_* = 120$  pour la fibre GRIN ( $n_{co} = 1.47$ ,  $n_{cl} = 1.457$ ,  $a = 26 \mu\text{m}$ ),  $N_* = 121$  pour la fibre à saut d'indice ( $n_{co} = 1.4496$ ,  $n_{cl} = 1.4462$ ,  $a = 37 \mu\text{m}$ ). Nous considérons également différentes valeurs de longueur non linéaire  $L_{nl} = 25 \text{ cm}$  et  $L_{nl} = 1 \text{ m}$ , et calculons le nombre de quasi-résonances dans la fibre à saut d'indice avec le critère  $|\Delta\omega_{lmnp}| \leq L_{nl}^{-1}/10$ . Les résultats sont reportés en Table 2.1, qui montre une réduction drastique du nombre de résonances et des efficacités correspondantes dans la fibre à saut d'indice comparativement à la fibre GRIN.

TABLE 2.1 – Nombre de quasi-résonances  $N_{\text{res}}^{(1,2)}$  et les efficacités correspondantes  $\chi_{\text{eff}}^{(1,2)} = \sum_{lmnp} S_{lmnp}^2$  pour une MMF à saut d'indice pour  $L_{nl} = 1 \text{ m}$  et pour  $L_{nl} = 25 \text{ cm}$ , respectivement. Pour une MMF à gradient d'indice,  $N_{\text{res}}$  indique le nombre de résonances exactes. La réduction significative de  $N_{\text{res}}^{(j)}$  et  $\chi_{\text{eff}}^{(j)}$  pour la MMF à saut d'indice par rapport à la MMF GRIN est responsable d'un gel effectif du processus de thermalisation.

|                   | $N_{\text{res}}^{(1)}$ | $\chi_{\text{eff}}^{(1)}$ | $N_{\text{res}}^{(2)}$ | $\chi_{\text{eff}}^{(2)}$ |
|-------------------|------------------------|---------------------------|------------------------|---------------------------|
| Saut d'indice     | 1 376                  | 4.7                       | 12 256                 | 15                        |
| Gradient d'indice | 8 369 504              | 630                       | 8 369 504              | 630                       |

Pour résumer, la propagation de lumière incohérente dans une MMF à saut d'indice n'est pas décrite par un régime de turbulence discrète à cause de l'absence de résonances exactes non triviales. La MMF à saut d'indice présente aussi des résonances peu efficaces qui conduisent à un gel effectif du régime de turbulence continue. Notons que le nombre de quasi-résonances contribuant à l'équation cinétique peut être augmenté en considérant un rayon plus grand de la fibre à saut d'indice, conduisant ainsi à un espacement réduit entre les modes. Dans ce cas, un régime de turbulence continue efficace peut être en principe établi (à condition qu'une puissance suffisante soit injectée dans la fibre). Cependant, comme discuté en section 2.5.2, dans ce cas l'impact du désordre faible devrait empêcher la conservation de l'énergie cinétique, ce qui inhibe alors le processus de condensation d'onde.

## 2.8.2 Turbulence discrète et gel de thermalisation avec des conditions initiales spécifiques

La théorie de turbulence d'ondes développée dans ce Chapitre est pertinente lorsque le faisceau optique peuple beaucoup de modes au sein de la MMF. C'est le cas par exemple

des expériences reportées en Chapitre 3, le faisceau optique passe à travers un diffuseur afin de dégrader son profil transverse de front d'onde avant l'injection dans la MMF. Comme discuté au Chapitre 3, dans ces conditions le processus de thermalisation et condensation peut avoir lieu efficacement. Il est important de remarquer, cependant, qu'il existe des conditions particulières d'injection du faisceau dans la MMF qui peuvent exciter peu de modes dans la fibre, comme il a été récemment reporté en références [84, 123]. Considérons par exemple le cas où un faisceau Gaussien avec un rayon comparable à celui du mode fondamental est injecté avec une incidence normale parfaite et exactement au centre de la MMF. Dans ce cas, peu de modes sont excités, car tous les modes caractérisés par un profil azimutal non homogène ne sont pas excités du tout. Un autre exemple important reporté en référence [84] est l'excitation avec un faisceau Gaussien dont l'angle d'incidence externe est ajusté aux alentours de 2.5 deg, dans le but d'exciter la fibre au-delà de l'ouverture numérique du mode fondamental. De cette façon, la quantité de puissance couplée dans le mode fondamental est limitée, tandis qu'une grande fraction de la puissance restante est couplée au mode LP<sub>11</sub>. Avec cette condition initial spécifique, les expériences en référence [84] reportent une effet remarquable d'auto-nettoyage de faisceau privilégiant l'excitation du mode LP<sub>11</sub>.

Cette dernière observation peut apparaître en contradiction avec l'effet de thermalisation vers la distribution de Rayleigh-Jeans. Cependant, comme discuté tout au long de ce Chapitre, la propagation de lumière incohérente dans les MMF est décrite par le régime de turbulence d'ondes discrète qui est dominé par les résonances exactes. En considérant un petit nombre de modes excités avec les conditions initiales spécifiées ci-dessus, le processus de thermalisation se retrouve essentiellement gelé. En effet, suite à la discussion sur l'absence de nettoyage de faisceau en MMF à saut d'indice (voir section 2.8.1), ici le même argument de gel de la thermalisation pourrait expliquer pourquoi la condensation de puissance au sein du mode fondamental n'est pas observée avec l'injection inclinée spécifique favorisant l'excitation du mode LP<sub>11</sub> [84]. De la même manière, pour une injection à incidence normale parfaite d'un faisceau Gaussien de faible rayon, les simulations numériques ne montrent pas l'établissement d'un état d'équilibre RJ caractérisé par l'équipartition d'énergie parmi les modes sur la faible longueur de fibre utilisée dans les expériences. Ceci est une conséquence de la nature discrète des résonances multiples dans les MMF, qui présentent des clusters d'interactions résonantes entre modes, ce qui pourrait être décrit en exploitant les effets de taille finie en turbulence d'onde discrète [15, 92–101, 120, 124].

Nous avons calculé le nombre de résonances non triviales  $N_{\text{res}}$  (impliquant au moins trois groupes de modes non-dégénérés) et leurs efficacités correspondantes  $\chi_{\text{eff}} = \sum_{lmnp} S_{lmnp}^2$  pour les conditions initiales discutées ci-dessus, à savoir (i) un faisceau Gaussien avec incidence normale et (ii) un faisceau Gaussien avec un angle d'inclinaison spécifique (2.5 deg) favorisant l'excitation du mode LP<sub>11</sub>. Ce calcul a été réalisé à partir de deux valeurs différentes d'énergie cinétique  $E^{(1)}$  et  $E^{(2)}$ , correspondant au faisceau Gaussien avec FWHM = 2 FWHM<sub>0</sub> pour  $E^{(1)}$  et FWHM = 3 FWHM<sub>0</sub> pour  $E^{(2)}$ , FWHM<sub>0</sub> étant la largeur totale à mi-hauteur du mode fondamental. Les résultats sont reportées en Table 2.2 pour les valeurs d'énergies  $E^{(1)}/E_{\text{crit}} = 0.32$  (colonnes 2 et 3) et  $E^{(2)}/E_{\text{crit}} = 0.54$  (colonnes 4 et 5), où  $E_{\text{crit}} = NV_0(1 + 2\beta_0/V_0)/2$  représente l'énergie critique de la transition vers l'état condensé, cf Chapitre 3. Nous avons comparé ces résultats avec un faisceau générique incohérent (de type speckle), qui est caractérisé par une distribution spectrale exponentielle

ou Lorentzienne dans l'espace des modes [voir (iii) et (iv) en Table 2.2]. Une résonance est retenue dans le calcul chaque fois que les amplitudes modales sont supérieures à un certain seuil ( $n_p \geq 0.1\%$  en Table 2.2, avec  $\sum_p n_p = 1$ ). Le résultat principal est que  $N_{\text{res}}$  et  $\chi_{\text{eff}}$  décroissent de façon substantielle pour les conditions initiales particulières (i) et (ii) où un petit faisceau Gaussien est injecté soit avec une incidence normale parfaite ou avec un angle d'inclinaison spécifique favorisant l'excitation du mode  $\text{LP}_{11}$ . Il est important de noter que cette comparaison est réalisée pour *la même énergie cinétique*  $E$ , c-a-d, le même «quantité de désordre» du faisceau injecté. Par conséquent, la réduction significative de  $N_{\text{res}}$  et  $\chi_{\text{eff}}$  pour les conditions initiales particulières (i) et (ii) révèle la spécificité d'une telle excitation modale comparée aux conditions initiales génériques (iii) et (iv).

TABLE 2.2 – Nombre de résonances  $N_{\text{res}}^{(1,2)}$  et les efficacités correspondantes  $\chi_{\text{eff}}^{(1,2)} = \sum_{lmnp} S_{lmnp}^2$  pour deux valeurs différentes d'énergie cinétique  $E^{(1)}/E_{\text{crit}} = 0.32$  (colonnes 2 et 3) et  $E^{(2)}/E_{\text{crit}} = 0.54$  (colonnes 4 et 5). Les conditions initiales (i) et (ii) se réfèrent aux conditions d'injection particulières : (i) faisceau Gaussien cohérent avec une incidence normale parfaite et (ii) faisceau Gaussien cohérent avec un angle d'incidence favorisant l'excitation du mode  $\text{LP}_{11}$  (voir référence [84]). Les conditions initiales (iii) et (iv) se réfèrent aux faisceaux incohérents génériques (type speckle) avec une distribution spectrale exponentielle (iii) et Lorentzienne (iv) dans l'espace des modes. Le nombre de modes et leurs efficacités sont considérablement plus petits pour les excitations particulières (i) et (ii) comparés aux excitations génériques (iii) et (iv) . Puisque l'énergie  $E^{(1)}$  (ou  $E^{(2)}$ ) est maintenue constante, la «quantité de désordre» correspondante est la même pour toutes les conditions initiales (i)-(iv) : la réduction significative de  $N_{\text{res}}^{(j)}$  et  $\chi_{\text{eff}}^{(j)}$  pour les états particuliers (i) et (ii) reflète la spécificité de l'excitation modale dans la MMF.

| Excitation modale | $N_{\text{res}}^{(1)}$ | $\chi_{\text{eff}}^{(1)}$ | $N_{\text{res}}^{(2)}$ | $\chi_{\text{eff}}^{(2)}$ |
|-------------------|------------------------|---------------------------|------------------------|---------------------------|
| (i)               | 18 380                 | 7.4                       | 93 840                 | 16                        |
| (ii)              | 11 600                 | 10.7                      | 229 776                | 46                        |
| (iii)             | 96 480                 | 67                        | 1 716 000              | 283                       |
| (iv)              | 922 944                | 210                       | 8 369 504              | 603                       |

Pour conclure cette discussion, nous avons vu en section 2.3.2 que les MMF typiques utilisées en expériences de nettoyage de faisceau se comportent comme un système dynamique avec un nombre limité de degrés de liberté, en relation avec la nature discrète de la turbulence d'onde en MMF. Quand beaucoup de modes sont excités par des conditions initiales génériques en présence d'une quantité significative de désordre structural ( $L_d \ll L_{\text{nl}}, z$ ), le système présente un régime de turbulence discret développé qui est bien décrit par l'équation cinétique discrète. D'un autre côté, pour des conditions initiales spécifiques caractérisées par l'excitation d'un petit nombre de modes, la structure discrète des résonances de la MMF peut geler le processus de thermalisation. Les équations cinétiques ne devraient pas être pertinentes pour décrire ce régime où peu de modes interagissent sur une longueur de propagation relativement courte. En particulier, l'impact du désordre peut être considéré comme perturbatif dans ce régime où le système peut présenter une

interaction cohérente partiellement sensible à la phase, ce qui peut probablement être décrit par les outils développés pour étudier les effets de taille finie en turbulence, tels que la turbulence d'ondes discrète et mésoscopique ainsi que les clusters associés aux interactions modales résonantes [15, 92–101, 120, 124]. Un tel régime d'interaction cohérente à quelques modes peut être contrôlé par un réglage fin du profil transverse de l'excitation laser [84, 123]. Dans les expériences récentes [123], le nettoyage de faisceau sur différents modes d'ordre bas a été reporté grâce à un ingénieux profilage adaptatif induit par rétroaction du front d'onde transverse de l'excitation du faisceau cohérent (voir aussi [125]). Plus précisément, grâce à une boucle de rétroaction, le front d'onde transverse du faisceau injecté est ajusté par une procédure itérative de manière à forcer le faisceau à converger vers une cible modale préétablie en sortie de fibre. Ce nettoyage contrôlé de façon adaptative des modes d'ordre bas est de nature différente du phénomène de condensation dans le mode fondamental résultant du processus de thermalisation vers la distribution d'équilibre

## 2.9 Conclusion

Pour résumer, nous avons discuté des expériences d'auto-nettoyage de faisceau où des impulsions longues ( $\sim$ ns) sont injectées dans des longueurs de fibres multimodes relativement courtes ( $\sim$ 10 m) pour lesquelles la contribution dominante du désordre provient des fluctuations de polarisations aléatoires (désordre faible) [109]. Sur la base de la théorie de turbulence d'ondes, nous avons dérivé une équation cinétique décrivant l'évolution hors équilibre des ondes aléatoires dans un régime où le désordre domine les effets non linéaires ( $L_d \ll L_{nl}$ ). La théorie révèle que la présence d'un faible désordre conservatif introduit une dissipation effective dans le système dont l'élargissement des résonances empêche la conservation de l'énergie, ce qui inhibe l'effet de condensation dans l'approche de turbulence d'onde continue. D'un autre côté, nous avons montré que les expériences habituelles de nettoyage de faisceau ne sont pas décrites par la théorie de turbulence d'ondes continue, mais par l'approche de turbulence d'onde discrète. Dans ce régime de turbulence discrète, seules les résonances exactes contribuent à l'équation cinétique, laquelle n'est donc plus sensible à l'effet d'élargissement des résonances induit par la dissipation. En conséquence, l'équation cinétique discrète conserve l'énergie, ce qui rétablit le processus de condensation d'ondes. Le résultat principal est que cette dissipation effective induite par le désordre modifie la régularisation des résonances discrètes, ce qui entraîne une accélération du processus de thermalisation.

Dans le but d'améliorer notre compréhension des expériences de nettoyage de faisceau, nous avons considéré différents modèles de désordre faible en MMF. Les simulations sont en accord quantitatif avec la théorie sans utiliser des paramètres ajustables dans le régime où le désordre domine les effets non linéaires ( $L_d \ll L_{nl}$ ). Cependant, l'impact du désordre faible dû aux fluctuations de polarisation dans les expériences de nettoyage de faisceau pourrait être du même ordre que les effets non linéaires [109]. Nous avons donc considéré l'impact d'un désordre modéré dans le système ( $L_d \gtrsim L_{nl}$ ). Dans ce régime, les corrélations de phase entre les modes ne sont pas complètement supprimées et le système entre dans un régime mixte cohérent-incohérent. En conséquence, les composantes modales présentent un comportement oscillatoire qui ralentit le processus de thermalisation, bien que le faisceau optique présente toujours un processus rapide de condensation. Pour résumer,

en considérant la contribution dominante du désordre faible provenant des fluctuations de polarisation, notre théorie et nos simulations fournissent une compréhension qualitative de l'effet d'auto-nettoyage de faisceau, en particulier quand un grand nombre de modes sont excités dans la MMF comme dans les expériences qui seront présentées en Chapitre 3. D'un autre côté, la nature discrète des résonances décrivant la turbulence dans les MMF est responsable du gel de la thermalisation quand un petit nombre de modes est excité. Ce gel effectif du processus de condensation pourrait également expliquer pourquoi l'effet de nettoyage de faisceau n'a pas été observé dans les MMF à saut d'indice.

Notons enfin que l'impact du désordre fort dans le régime faiblement non linéaire va être considéré dans le chapitre de [Conclusion](#). Nous anticipons que le couplage aléatoire entre les modes dégénérés renforce la thermalisation vers la distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans. Nous notons à cet égard que, selon les simulations reportées en [23], le désordre fort affecte seulement faiblement l'évolution des composantes modales comparativement à l'impact significatif du désordre faible discuté dans ce Chapitre.



## Chapitre 3

# Thermalisation et condensation d'ondes optiques : Observation en fibre optique multimode à gradient d'indice

*Dans ce chapitre nous allons mettre en évidence expérimentalement le processus de thermalisation vers la distribution de Rayleigh-Jeans du champ optique au cours de sa propagation dans une fibre optique multimode à gradient d'indice. Nous décrivons le schéma de notre expérience nous permettant d'avoir accès à la distribution d'intensité en champ proche et en champ lointain du faisceau en sortie de fibre optique. Ces mesures nous permettent d'avoir accès à la mesure de l'énergie (Hamiltonien) du faisceau optique. Les résultats expérimentaux montrent que le potentiel chimique atteint la valeur propre du mode fondamental de la fibre optique, ce qui conduit à une singularité de la distribution de Rayleigh-Jeans, laquelle est régularisée par une population macroscopique du mode fondamental de la fibre. La comparaison des distributions d'intensités mesurées expérimentalement sont en accord avec les distributions théoriques de Rayleigh-Jeans correspondantes sans l'emploi de paramètres ajustables. Ainsi, la transition de phase vers l'état condensé a lieu en diminuant l'énergie en dessous d'une valeur critique tout en gardant constante la puissance du faisceau optique. Enfin nous discutons les propriétés thermodynamiques de la condensation d'ondes classiques, ainsi que leurs différences avec la condensation de Bose-Einstein quantique.*

### Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Introduction de l'expérience</b>                                      | <b>44</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Description de l'expérience</b>                                       | <b>44</b> |
| <b>3.3</b> | <b>Observation de la thermalisation vers Rayleigh-Jeans</b>              | <b>49</b> |
| <b>3.4</b> | <b>Observation de la transition de phase de condensation</b>             | <b>56</b> |
| <b>3.5</b> | <b>Propriétés thermodynamiques de la condensation d'ondes classiques</b> | <b>61</b> |
| <b>3.6</b> | <b>Conclusion et perspectives</b>  | <b>64</b> |
|            | <b>Appendice A : Stabilité du condensat en fibre optique multimode</b>   | <b>66</b> |

---

## 3.1 Introduction de l'expérience

L'expérience présentée dans ce Chapitre est basée sur les expériences antérieures de nettoyage de faisceau optique en fibre multimode à gradient d'indice en présence d'impulsions laser longues (sub-nanoseconde) [18–20, 82]. Comme discuté en Chapitre 2, cette dernière caractéristique de l'expérience nous permet de nous affranchir des effets de dispersion modale dans le domaine temporel.

La transition de phase vers l'état condensé peut être mise en évidence, en principe, de deux façons différentes :

- (i) en augmentant la puissance  $N$  (jouant un rôle analogue au «nombre de particules») en gardant constante l'énergie  $E$  (jouant un rôle analogue à la «température»),
- (ii) en diminuant l'énergie  $E$  en gardant constante la puissance  $N$ .

L'effet de nettoyage de faisceau est généralement mis en évidence expérimentalement en augmentant la puissance du champ injecté pour une longueur de fibre donnée. Cependant en procédant de cette façon, le nombre de longueurs non linéaires de propagation sur la longueur de fibre donnée varie considérablement, ce qui ne permet pas au champ optique d'atteindre l'état thermalisé de Rayleigh-Jeans pour de faibles puissances du faisceau. Cette procédure ne permet donc pas de mettre en évidence la transition de phase de condensation.

Dans ce Chapitre nous étudions la transition de phase vers l'état condensé en suivant la procédure (ii), comme proposé originalement en référence [16], ainsi qu'en référence [17] dans le cas d'une fibre optique multimode. Une autre originalité de cette expérience par rapport aux expériences conventionnelles de nettoyage de faisceau consiste à faire passer le faisceau optique par un diffuseur (verre dépoli) avant de l'injecter dans la MMF. Cette méthode nous permet de faire varier l'énergie  $E$  tout en gardant constante la puissance  $N$ .

## 3.2 Description de l'expérience

Dans cette section, nous fournissons une description de la fibre multimode utilisée dans l'expérience. Puis nous présentons le montage expérimental, allant du réglage des conditions d'injections jusqu'à la mesure du champ proche et lointain du faisceau en sortie de fibre. Nous détaillons ensuite les spécificités de notre dispositif expérimental en évoquant sa robustesse et sa fiabilité. Enfin, nous effectuons des vérifications expérimentales de la conservation de l'énergie  $E$  et de la puissance  $N$  au cours de la propagation du faisceau et discutons brièvement le régime faiblement non linéaire de l'expérience.

### 3.2.1 Dispositif expérimental

Pour tous les résultats présents dans ce Chapitre, nous avons utilisé une fibre multimode à gradient d'indice possédant une longueur de 12m. Le profil d'indice de réfraction transverse de la fibre présente une forme parabolique dans le coeur avec un maximum d'indice de coeur (au centre) de  $n_{co} = 1.47$  et  $n_{cl} = 1.457$  pour la gaine à la longueur d'onde de 1064 nm (ouverture numérique  $NA = 0.195$ ). Le potentiel parabolique correspondant s'écrit  $V(\mathbf{r}) = q|\mathbf{r}|^2$  pour  $|\mathbf{r}| \leq R$ , où  $R = 26 \mu\text{m}$  est le rayon du coeur de la fibre et

$q = k_0(n_{co}^2 - n_{cl}^2)/(2n_{co}R^2)$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  le nombre d'onde du laser. La MMF guide  $M = 120$  modes (c-a-d  $g = 15$  groupes de modes non-dégénérés) sans inclure la dégénérescence de polarisation. La troncature du potentiel ( $V_0 = qR^2$ ) introduit donc une fréquence de coupure dans le spectre en champ lointain  $\alpha k_c^2 = V_0$  qui s'écrit

$$k_c = \sqrt{2V_0/\beta_0}/r_0, \quad (3.1)$$

où  $r_0$  est le rayon du mode fondamental et  $\beta_0 = 2\sqrt{\alpha q}$  où  $\alpha = 1/(2k_0n_{co})$  (voir Chapitre 2). Notons que l'équation (3.1) est également obtenue à partir de l'ouverture numérique de la fibre  $NA = \sin \beta = \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2} = k_c/k_0$ .

La MMF possède donc un coeur (de rayon  $26 \mu\text{m}$ ), une gaine (de rayon  $62.5 \mu\text{m}$ ), et un revêtement en polymère très absorbant avec un indice de réfraction plus grand que celui du coeur. Les modes de rayonnement (ou «leaky modes») pénètrent dans le revêtement jusqu'à une distance  $r_p \gg a$ , cela signifie que le support de ces modes se situe essentiellement dans le revêtement en polymère absorbant. Les modes de rayonnement dans la gaine sont alors rapidement absorbés durant la propagation à cause de leur grande pénétration dans le revêtement en polymère : nous avons mesuré une absorption sur une longueur de propagation typique de  $\sim 15$  cm. Puisque cette longueur est beaucoup plus petite que la longueur non linéaire nécessaire pour générer des leaky modes, l'excitation non linéaire des leaky modes peut être négligée.

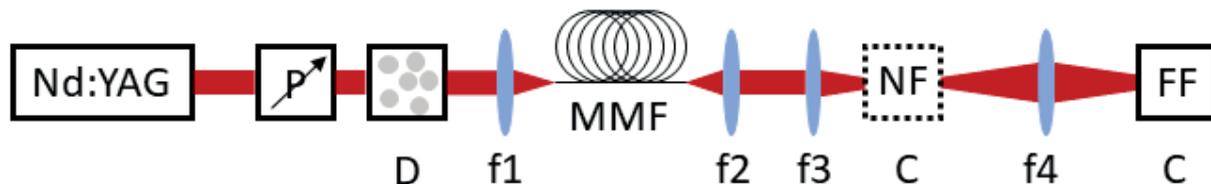


FIGURE 3.1 – **Montage expérimental** : laser Nd-YAG (1064 nm), isolateur optique pour éviter les réflexions indésirables du laser (non représenté), lame demi-onde et polariseur pour contrôler la puissance injectée, diffuseur (D) pour contrôler l'énergie  $E$  du faisceau, lentille ( $f_1$ ) pour injecter dans la fibre, MMF à gradient d'indice, lentilles ( $f_2$  et  $f_3$ ) servant de télescope pour agrandir le faisceau en sortie de fibre, caméra CCD (C) mesurant le champ proche, lentille ( $f_4$ ) pour obtenir le champ lointain, caméra CCD (C) mesurant le champ lointain.

La source est un laser Nd :YAG délivrant des impulsions subnanosecondes (400 ps) à la longueur d'onde  $\lambda = 1064$  nm. Pour se prémunir de retours indésirables dans la cavité laser, nous utilisons un isolateur optique et nous contrôlons la puissance avec une lame demi-onde ainsi qu'un polariseur. Le faisceau laser est ensuite collimaté et traverse une lame de verre diffuseur placée dans la proximité du plan de Fourier du système optique 4f (non représenté en Figure 3.1). Le faisceau est ensuite injecté au sein de la MMF spécifiée ci-dessus en utilisant une lentille de longueur focale  $f_1 = 15$  mm. La distribution d'intensité en champ proche (NF) du faisceau en sortie est agrandie et imagée sur une première caméra CCD grâce à un système optique de type télescope à 2 lentilles ayant pour focale  $f_2 = 8$  mm et  $f_3 = 150$  mm. La caméra CCD est placée sur un rail orthogonal à la propagation du faisceau dans le but de la retirer ou la replacer sur le chemin du faisceau. La distribution d'intensité en champ lointain (FF) d'une telle image agrandie est

obtenue en la plaçant dans le foyer focal objet d'une lentille  $f_4 = 250$  mm et en utilisant une seconde caméra CCD positionnée dans son plan focal image (Fourier).

Les mesures du spectre en champ lointain sont au premier abord délicates [126]. Aussi, plusieurs vérifications sont requises afin de valider notre dispositif expérimental présenté en Figure 3.1. Tout d'abord, des calculs analytiques de la propagation du champ optique à travers notre montage de détection révèlent plusieurs faits. D'une part, le champ proche détecté par la première caméra CCD située après le télescope formé par le couple de lentilles  $f_2$ - $f_3$  correspond exactement à un agrandissement du champ en sortie de la fibre multimode. Cet agrandissement est déterminé par le rapport entre les distances focales des lentilles  $f_3/f_2$ . D'autre part, le champ lointain détecté par la deuxième caméra CCD correspond exactement (à un facteur constant près) à la transformée de Fourier du champ en sortie de fibre. Ce facteur constant dépend des longueurs focales des lentilles servant à imager le faisceau ainsi que de la longueur d'onde du laser  $\lambda$ , en l'occurrence, ce facteur est égal à  $\frac{f_3}{f_2} \frac{2i\pi}{\lambda f_4}$  avec  $f_4$  la longueur focale de la lentille de Fourier, voir Figure 3.1 (on rappelle que le facteur de phase complexe de la constante ne joue pas de rôle car seule l'intensité du champ optique est mesurée sur la camera).

En relation avec la référence [126], nous avons vérifié qu'un décalage de 1 cm entre la lentille de Fourier  $f_4$  et le plan du champ lointain n'affecte pas les résultats. En réalité, un tel décalage mène à une variation de l'intensité du pic du condensat  $\Delta I_{max}/I_{max}^{moy} \simeq 0.5\%$ . Il est intéressant de noter qu'à la différence de l'auto-modulation de phase dans un milieu Kerr massif, dans le régime  $L_{lin} \ll L_{nl}$  considéré dans l'expérience (voir section suivante), le mode condensé se propage avec un profil de phase transverse homogène.

La robustesse du dispositif expérimental provient du fait que dans toute la procédure expérimentale, aucun élément du dispositif n'est déplacé sur l'axe de propagation. En effet, nous déplaçons uniquement le diffuseur dans le plan transverse de propagation du faisceau afin de modifier le faisceau injecté dans la fibre. La caméra CCD située après le télescope est également déplacée sur un axe orthogonal au chemin du faisceau afin de mesurer le champ lointain, puis elle est ensuite toujours replacée exactement à la même position en bout de course du rail afin de mesurer le champ proche. Tous les autres éléments sont quant à eux fixés pendant et entre chaque mesure.

Le spectre temporel est contrôlé par un analyseur de spectre optique (OSA) (intervalle de 600 à 1700 nm). Nous avons vérifié que les distributions d'intensités en champ proche et en champ lointain en sortie de fibre ne sont pas significativement affectées par la présence de l'effet Raman. L'analyse spectrale montre que la puissance diffusée par l'effet Raman auto-stimulé est en moyenne de l'ordre de  $\sim 5\%$  de la puissance injectée. Cependant l'analyse spectrale ne révèle par la présence de lignes paramétriques qui seraient induites par un couplage entre les effets dispersifs et non linéaires. En conséquence, les effets de dispersion temporels peuvent être négligés au sein de la courte longueur de fibre considérée dans notre expérience, ce qui justifie le modèle purement 2D spatial de propagation de la lumière considéré en Chapitre 2. Rappelons que le processus de thermalisation vers l'équilibre de Rayleigh-Jeans n'est pas défini dans le domaine spectral temporel en raison de l'absence de fréquence de coupure pour les fréquences temporelles.

### 3.2.2 Régime faiblement non linéaire $L_{\text{lin}} \ll L_{\text{nl}}$

La longueur linéaire de propagation est définie à partir de  $L_{\text{lin}} \sim \beta_0^{-1}$ , où  $\beta_0 = 5.16 \times 10^3 \text{m}^{-1}$  est la valeur propre du mode fondamental déterminé par la MMF, voir section 3.2.1 ci-dessus. On en déduit par conséquent la longueur linéaire  $L_{\text{lin}} \simeq 0.2 \text{mm}$ .

Le coefficient non linéaire Kerr effectif de la fibre multimode est  $\gamma = k_0 n_2 / A_{\text{eff}}^0$ , où  $n_2 \simeq 3.2 \times 10^{-20} \text{m}^2/\text{W}$  est l'indice Kerr non linéaire et  $A_{\text{eff}}^0 = 1 / \int w_0^4(r/r_0) d\mathbf{r}$  est l'aire effective du mode fondamental. La longueur non linéaire de propagation dans le cas où toute la puissance ( $N = 7 \text{kW}$ ) est dans le mode fondamental est décrite par  $L_{\text{nl}} = 1/(\gamma N) \simeq 10 \text{cm}$ . En pratique, le faisceau optique dans la MMF peuple les modes d'ordre élevé, par exemple, pour une section de surface effective  $A_{\text{eff}} \sim 4A_{\text{eff}}^0$ , la longueur non linéaire effective est  $L_{\text{nl}} \sim 40 \text{cm}$ .

Nous pouvons conclure que dans le cadre de notre expérience, les effets de propagation linéaire dominant largement les effets non linéaire  $L_{\text{lin}} \ll L_{\text{nl}}$ . La propagation de la lumière dans la fibre multimode se déroule donc en régime faiblement non linéaire.

### 3.2.3 Vérification de la conservation de l'énergie ( $E$ ) et de la puissance ( $N$ )

Nous avons vérifié la conservation de la puissance  $N = \sum_p n_p$  et de l'énergie (Hamiltonien)  $E = \sum_p \beta_p n_p$  au cours de la propagation du faisceau optique dans la fibre multimode. Notons qu'étant donné que le régime de propagation est faiblement non linéaire, la contribution non linéaire de l'Hamiltonien est négligeable devant la contribution linéaire ( $H = E + U \simeq E$  où  $U$  dénote la contribution non linéaire, voir Chapitre 2). La conservation de la puissance  $N$  a été vérifiée en fixant les conditions d'injection du faisceau dans la fibre multimode. Nous avons mesuré la puissance en sortie de fibre  $N_{\text{out}}$  à  $L = 12 \text{m}$ , puis la puissance en entrée  $N_{\text{in}}$  en coupant la fibre à  $20 \text{cm}$  sans modifier les conditions d'injection. Nous avons alors toujours obtenu  $(N_{\text{in}} - N_{\text{out}})/N_{\text{moy}} < 1\%$  où  $N_{\text{moy}}$  est la moyenne entre  $N_{\text{in}}$  et  $N_{\text{out}}$ .

La conservation de l'énergie  $E$  est plus délicate car elle nécessite la mesure de la distribution d'intensité en champ proche donnant accès à l'énergie potentielle  $E_{\text{pot}} = \int V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$ . Mais il faut également mesurer la distribution d'intensité en champ lointain fournissant l'énergie cinétique  $E_{\text{kin}} = \int \alpha |\nabla \psi|^2 d\mathbf{r} = \int \alpha |\mathbf{k}|^2 |\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}$ , avec  $\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-1} \int \psi(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}$  et  $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ . Les distributions d'intensités en champ proche et en champ lointain sont enregistrées en sortie de fibre à  $L = 12 \text{m}$ , ce qui donne  $E_{\text{out}}$ . Puis, *sans altérer les conditions d'injection de la fibre*, la fibre est coupée à  $20 \text{cm}$  pour enregistrer les distributions d'intensités en champ proche et lointain en entrée de la fibre afin d'obtenir  $E_{\text{in}}$ . La Figure 3.2(a) montre que la conservation de l'énergie est vérifiée car pour chaque couple de mesure ( $E_{\text{in}}, E_{\text{out}}$ ), nous avons  $E_{\text{in}} \simeq E_{\text{out}}$ . Nous rappelons que l'énergie  $E$  est modifiée grâce au diffuseur avant l'injection dans la MMF, voir Figure 3.1.

Nous avons également vérifié expérimentalement qu'il y a équipartition (en moyenne) entre la contribution cinétique  $E_{\text{kin}}$  et potentielle  $E_{\text{pot}}$  à l'énergie linéaire  $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ . En effet, les modes normalisés d'Hermite-Gauss peuvent s'écrire

$$w_p(\mathbf{r}/r_0) = u_{p_x}(x/r_0)u_{p_y}(y/r_0),$$

avec la composante en  $x$  :

$$u_{p_x} = \pi^{-\frac{1}{4}}(2^{p_x}p_x!)^{-\frac{1}{2}}H_{p_x}(x/r_0)\exp\left(-x^2/(2r_0^2)\right). \quad (3.2)$$

En développant l'onde aléatoire sur les modes  $\psi(\mathbf{r}) = r_0^{-1} \sum_p c_p w_p(\mathbf{r}/r_0)$ , nous avons pour chaque mode  $\{p\}$  :

$$\alpha r_0^{-2} \int |\nabla w_p|^2 d\mathbf{r} = q r_0^{-2} \int |\mathbf{r}|^2 |w_p|^2 d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\beta_p,$$

où  $r_0 = (\alpha/q)^{\frac{1}{4}}$  et  $\beta_0 = 2\sqrt{\alpha q}$ . En rappelant que les modes sont décorrélés, c-a-d ( $\langle c_p c_q^* \rangle = \langle |c_p|^2 \rangle \delta_{pq}$ ), nous obtenons

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle = E/2. \quad (3.3)$$

Notons que nous avons adopté ici une écriture légèrement modifiée des modes de Hermite-Gauss par rapport à celle employée en Chapitre 2 afin de symétriser l'écriture des distributions d'intensités en champ proche et en champ lointain.

Nous avons vérifié expérimentalement l'équipartition des contributions cinétiques et potentielles en réalisant des moyennes sur plusieurs réalisations sur une plage complète de  $E/E_{\text{crit}}$ , voir Figure 3.2(b). Ces vérifications de la conservation de  $E$  et  $N$  ainsi que de l'équipartition des contributions d'énergie valident le montage expérimental afin d'effectuer des mesures de condensation dans la prochaine section 3.3.

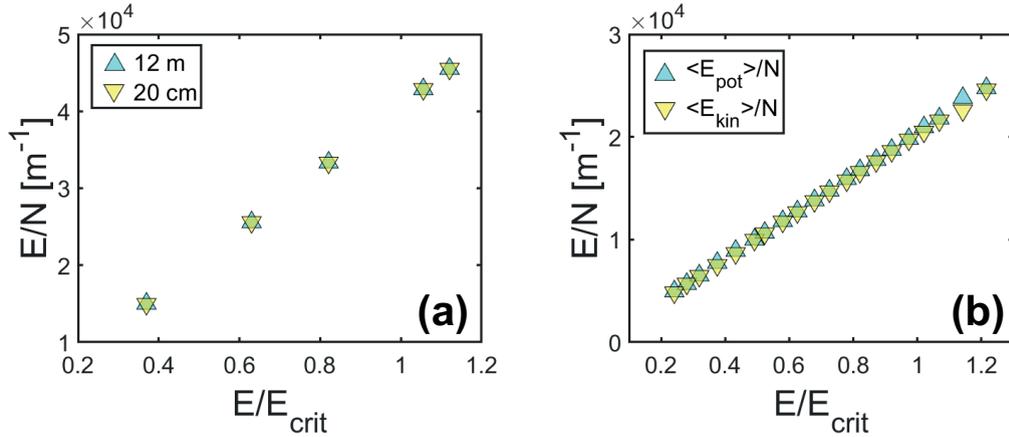


FIGURE 3.2 – **Conservation d'énergie ; Équipartition d'énergie cinétique et potentielle** : (a) Mesures de l'énergie à l'entrée de la MMF  $(E/N)_{\text{in}}$  (triangles jaunes), et en sortie de la MMF  $(E/N)_{\text{out}}$  (triangles bleus). L'énergie  $E/N$  est conservée durant la propagation, sur une plage quasiment complète de  $E/E_{\text{crit}}$  ( $n_0^{\text{eq}}/N$  variant de 0 à 0.7). (b) Mesures de l'énergie cinétique moyenne  $\langle E_{\text{kin}} \rangle$  et l'énergie potentielle moyenne  $\langle E_{\text{pot}} \rangle$  en sortie de fibre. L'équipartition  $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle$  prédite par la théorie en équation (3.3) est vérifiée sur la plage complète de  $E/E_{\text{crit}}$ . Voir section 3.2.3 pour les détails ( $N = 7$  kW).

### 3.3 Observation de la thermalisation vers Rayleigh-Jeans

Dans cette section nous allons montrer que le faisceau optique thermalise vers la distribution de Rayleigh-Jeans au cours de sa propagation dans la fibre optique multimode. Pour cela nous dérivons la distribution d'intensité théorique de RJ et nous la comparons directement aux mesures expérimentales des distributions d'intensités en champ proche et lointain. Nous présentons également la procédure qui nous permet d'extraire la fraction de puissance condensée et le potentiel chimique à partir des distributions d'intensités mesurées expérimentalement, ce qui sera exploité en section 3.4 pour l'étude du processus de condensation.

#### 3.3.1 Distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans et extraction des données

Dans cette partie nous allons dériver les distributions d'intensités théoriques à l'équilibre de Rayleigh-Jeans en champ proche et en champ lointain. À partir de ces expressions nous allons séparer les contributions cohérentes et incohérentes qui permettront d'extraire la puissance au sein du mode fondamental et le potentiel chimique des mesures expérimentales. Nous allons également définir une erreur quadratique moyenne afin de discuter la proximité des distributions d'intensités mesurées expérimentalement et celles attendues par la théorie de Rayleigh-Jeans.

La transformée de Fourier d'un mode d'Hermite-Gauss  $w_p$  donné en section 3.2 est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u_{p_x}(x/r_0) \exp(ik_x x) dx = i^{p_x} r_0 u_{p_x}(r_0 k_x), \quad (3.4)$$

où  $u_{p_x}(r_0 k_x) = \pi^{-\frac{1}{4}} (2^{p_x} p_x!)^{-\frac{1}{2}} H_{p_x}(r_0 k_x) \exp(-r_0^2 k_x^2/2)$ , et  $w_p(r_0 \mathbf{k}) = u_{p_x}(r_0 k_x) u_{p_y}(r_0 k_y)$ .

Ainsi, l'amplitude en champ proche s'écrit

$$\psi(\mathbf{r}) = r_0^{-1} \sum_p c_p w_p(\mathbf{r}/r_0),$$

et la transformée de Fourier en champ lointain

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = r_0 \sum_p i^p c_p w_p(r_0 \mathbf{k}),$$

avec  $i^p = i^{p_x+p_y}$ . À l'équilibre, les moyennes sur les réalisations  $I_{\text{NF}}^{eq}(\mathbf{r}) = \langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle$ , et  $I_{\text{FF}}^{eq}(\mathbf{k}) = \langle |\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2 \rangle$  s'écrivent

$$I_{\text{NF}}^{eq}(\mathbf{r}) = r_0^{-2} \sum_p n_p^{eq} w_p^2(\mathbf{r}/r_0), \quad (3.5)$$

$$I_{\text{FF}}^{eq}(\mathbf{k}) = r_0^2 \sum_p n_p^{eq} w_p^2(r_0 \mathbf{k}), \quad (3.6)$$

où nous avons utilisé  $\langle c_p c_n^* \rangle = n_p^{eq} \delta_{pn}$  avec  $N = \int I_{\text{NF}}^{eq}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int I_{\text{FF}}^{eq}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ . Ceci montre un résultat important, à savoir que les distributions d'intensités moyennes en champ

proche et en champ lointain sont équivalentes. Cet aspect sera confirmé par les mesures expérimentales, voir Figures 3.5 et 3.6.

Nous séparons la contribution du mode fondamental  $p = 0$  et éliminons la température en utilisant  $N = n_0^{eq} + T \sum_{p \neq 0} (\beta_p - \mu)^{-1}$ , c'est à dire :  $T = (N - n_0^{eq}) / \sum_{p \neq 0} (\beta_p - \mu)^{-1}$ , ce qui mène à

$$I_{\text{NF}}^{eq}(r) = n_0^{eq} r_0^{-2} w_0^2(r/r_0) + \frac{(N - n_0^{eq}) r_0^{-2}}{\sum_{p \neq 0} (\beta_p - \mu)^{-1}} \sum_{p \neq 0} \frac{w_p^2(\mathbf{r}/r_0)}{\beta_p - \mu}, \quad (3.7)$$

$$I_{\text{FF}}^{eq}(k) = n_0^{eq} r_0^2 w_0^2(r_0 k) + \frac{(N - n_0^{eq}) r_0^2}{\sum_{p \neq 0} (\beta_p - \mu)^{-1}} \sum_{p \neq 0} \frac{w_p^2(r_0 \mathbf{k})}{\beta_p - \mu}. \quad (3.8)$$

Le fait que  $I_{\text{NF}}^{eq}$  et  $I_{\text{FF}}^{eq}$  dépendent uniquement de  $r = |\mathbf{r}|$  et  $k = |\mathbf{k}|$  résulte de la propriété suivante des fonctions d'Hermite-Gauss :

$$\sum_{p_x + p_y = n} \frac{1}{p_x! p_y!} H_{p_x}^2(x) H_{p_y}^2(y) = \sum_{0 \leq j \leq n/2} H_{n-2j}^2(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{2(2j-1)!}{j!(j-1)!(n-2j)!}.$$

Les équations (3.7-3.8) sont utilisées pour extraire  $n_0^{eq}$  et  $\mu$  des données expérimentales. Pour effectuer une moyenne sur plusieurs réalisations, nous avons réalisé 2000 mesures (2 mesures des distributions en champ proche et en champ lointain pour chacune des 1000 réalisations). Ces mesures ont été réalisées pour différentes valeurs de l'énergie  $E$  en déplaçant le diffuseur dans le plan transverse à la propagation du faisceau (voir Figure 3.1) tout en conservant la même puissance  $N = 7$  kW. Après avoir déterminé l'énergie de ces 1000 réalisations (grâce aux distributions en champ proche et champ lointain mesurées), nous les avons réparties dans des intervalles d'énergie de largeur  $\Delta E = 0.05 E_{\text{crit}}$ . L'intervalle d'énergie s'écrit donc  $\Delta E_{\text{exp}}^{(m)} = [m \Delta E, (m+1) \Delta E]$  et  $E_{\text{exp}}^{(m)}$  représente l'énergie moyenne dans cet intervalle, voir Figure 3.3. Pour chaque intervalle d'énergie  $\Delta E_{\text{exp}}^{(m)}$ , nous avons effectué une moyenne sur les distributions d'intensités à 2 dimensions des réalisations contenues dans cet intervalle. Nous avons ensuite fait des moyennes sur les angles polaires de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{k}$ , ce qui donne les distributions d'intensités moyennes dans chaque intervalle d'énergie  $\Delta E_{\text{exp}}^{(m)}$  pour le champ proche  $\bar{I}_{\text{NF,exp}}^{(m)}(r)$  et pour le champ lointain  $\bar{I}_{\text{FF,exp}}^{(m)}(k)$ . Ces distributions sont ajustées par les équations (3.7-3.8) :

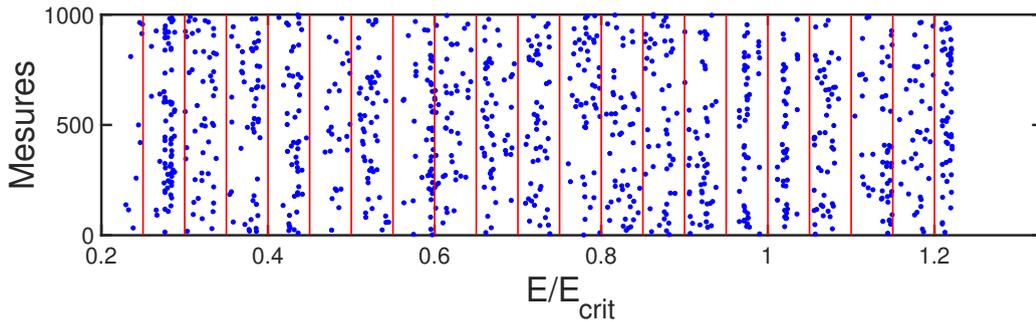


FIGURE 3.3 – Intervalles d'énergie pour réaliser des moyennes : Les 1000 réalisations expérimentales sont triées par énergie suivant l'axe des abscisses et représentées par un point bleu. Ces mesures sont alors rangées par intervalles d'énergie de largeur  $\Delta E = 0.05 E_{\text{crit}}$  représentés par les lignes rouges.

Pour chaque intervalle d'énergie  $\Delta E_{\text{exp}}^{(m)}$ , le couple de paramètres  $(n_0^{eq}/N, \mu)$  est ajusté en minimisant les erreurs quadratiques :

$$\chi_{\text{NF}} = \frac{\sum_i \left( \bar{I}_{\text{NF,exp}}^{(m)}(r_i) - I_{\text{NF}}^{eq}(r_i) \right)^2}{\sum_i \left( \bar{I}_{\text{NF,exp}}^{(m)}(r_i) \right)^2} + \eta \left( \frac{E_{\text{exp}}^{(m)}}{E_{\text{crit}}} - \frac{E(\mu)}{E_{\text{crit}}} \right)^2, \quad (3.9)$$

$$\chi_{\text{FF}} = \frac{\sum_i \left( \bar{I}_{\text{FF,exp}}^{(m)}(r_i) - I_{\text{FF}}^{eq}(r_i) \right)^2}{\sum_i \left( \bar{I}_{\text{FF,exp}}^{(m)}(r_i) \right)^2} + \eta \left( \frac{E_{\text{exp}}^{(m)}}{E_{\text{crit}}} - \frac{E(\mu)}{E_{\text{crit}}} \right)^2, \quad (3.10)$$

où la fonction  $E(\mu)/E_{\text{crit}}$  est donnée en équation (3.19). Les erreurs sont inférieures à 2% sur toute la plage d'énergie en Figure 3.4, ce qui corrobore le processus de thermalisation vers l'équilibre de Rayleigh-Jeans. Nous avons également vérifié que le paramètre arbitraire  $\eta$  n'affecte pas l'erreur résiduelle en Figure 3.4. Cette procédure nous permet ainsi d'utiliser la théorie de Rayleigh-Jeans afin d'extraire la fraction de puissance condensée au sein du mode fondamental  $n_0$  avec précision.

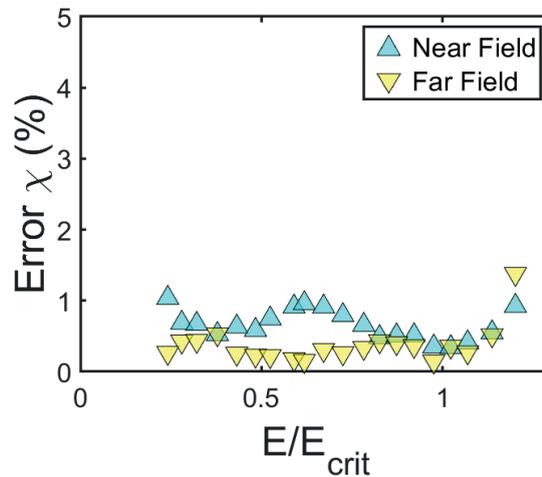


FIGURE 3.4 – **Erreur des moindres carrés** : Erreur quadratique résiduelle des moindres carrés donnée par  $\chi_{\text{NF}}$  (%) en équation (3.9) pour le champ proche (triangles bleus), et par  $\chi_{\text{FF}}$  (%) en équation (3.10) pour le champ lointain (triangles jaunes). L'erreur est inférieure à 2%.

### 3.3.2 Mesures expérimentales

Dans cette partie, nous allons utiliser les résultats théoriques développées en section 3.3.1 afin de comparer les résultats expérimentaux à la distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans. Nous définissons également une distance par rapport à la distribution d'intensité théorique en entrée et en sortie de fibre afin de quantifier le processus de thermalisation vers l'équilibre de Rayleigh-Jeans.

Nous reportons en Figure 3.5 quelques exemples de distributions d'intensités enregistrées en entrée (20cm) et en sortie (12m) de fibre, pour une valeur intermédiaire de l'énergie  $E$ . L'ensemble des réalisations individuelles expérimentales en entrée et en sortie de la MMF

sont reportées en moyennant sur l'angle polaire, voir Figure 3.5(c-d). Les réalisations individuelles des distributions d'intensités présentent naturellement des fluctuations, même si elles sont moyennées selon l'angle polaire. En suivant la procédure expliquée en section 3.3.1, ces distributions d'intensités sont également moyennées sur les réalisations pour la même énergie  $E$  (correspondant à une fraction de puissance condensée  $n_0^{eq}/N \simeq 0.4$  pour la Figure 3.5). Le résultat d'une telle moyenne sur les réalisations est reporté en Figure 3.5(a-b) en ligne bleue.

Le couple  $(E, N)$  déterminé par les mesures expérimentales (voir section 3.3.1) fixe l'unique paire  $(\mu, T)$ , comme discuté en référence [7]. Le fait qu'il y a une relation univoque entre  $(E, N)$  et  $(\mu, T)$  sera discuté ci-dessous sur la base des équations (3.24-3.25). La paire  $(\mu, T)$  donne à son tour accès à l'équilibre de Rayleigh-Jeans  $n_p^{eq} = T/(\beta_p - \mu)$ , car les valeurs propres  $\beta_p$  sont fixées par la fibre utilisée dans l'expérience, voir section 3.2 ci-dessus. Cette répartition de puissance dans l'espace des modes permet alors, avec les équations (3.5-3.6), de déterminer les distributions d'intensités de l'équilibre de Rayleigh-Jeans en champ proche  $I_{NF}^{eq}(r)$  et en champ lointain  $I_{FF}^{eq}(k)$ . On peut alors constater en Figure 3.5(a-b) le bon accord entre les distributions d'intensités théoriques (lignes hachurées rouges) et les distributions d'intensités correspondantes expérimentales (lignes bleues). Il est important de souligner que *ce bon accord est obtenu sans employer des paramètres ajustables*, étant donné que les courbes théoriques sont reportées en utilisant les valeurs de  $\beta_p$  de la fibre utilisée dans l'expérience. Notons également que les distributions d'intensités expérimentales en Figure 3.5(a-b) en champ proche et en champ lointain sont équivalentes, comme prédit par la théorie en équations (3.7-3.8).

Comme discuté précédemment, la Figure 3.5(c-d) reporte les réalisations individuelles en champ proche et en champ lointain pour les faisceaux en entrée et en sortie correspondant aux intensités moyennées de la Figure 3.5(a-b). Nous pouvons observer une réduction des fluctuations pour les réalisations individuelles entre l'entrée et la sortie de la fibre, cette réduction met en évidence le rôle «d'attracteur statistique» de la distribution de Rayleigh-Jeans.

Pour caractériser le processus d'attraction vers Rayleigh-Jeans, nous introduisons une distance qui mesure le degré de similarité entre la distribution d'intensité radiale d'un faisceau enregistré expérimentalement et l'intensité théorique de Rayleigh-Jeans :

$$\mathcal{D} = \frac{\sum_i [I_{NF,exp}(r_i) - I_{NF}^{eq}(r_i)]^2}{\sum_i I_{NF}^{eq}(r_i)^2},$$

où  $r = |\mathbf{r}|$  et  $r_i$  la grille spatiale correspondante. La forte réduction de  $\mathcal{D}$  entre le faisceau en entrée et en sortie montre l'attraction vers le profil d'intensité théorique et confirme donc la thermalisation vers l'équilibre de Rayleigh-Jeans, voir Figure 3.5(e). Notons que la réduction limitée de  $\mathcal{D}$  pour  $E \gtrsim E_{crit}$  est due à la procédure de moyennage sur l'angle polaire.

Afin de compléter cette étude, nous reportons en Figure 3.6 d'autres exemples de distributions d'intensités enregistrées en entrée (20cm) et en sortie (12m) de fibre, pour une petite valeur de l'énergie  $E$ , ainsi que pour une grande valeur de  $E$ . Comme précédemment (Figure 3.5), l'ensemble des réalisations individuelles expérimentales en entrée et en sortie de la MMF sont reportées en moyennant sur l'angle polaire. Le nombre de réali-

sations en entrée et en sortie est respectivement 40 et 50 en Figure 3.6(c-d), ainsi que 132 et 50 en Figure 3.6(g-h). Les lignes rouges hachurées en Figure 3.6(c-d) et (g-h) reportent les distributions d'intensités théoriques de Rayleigh-Jeans en champ proche  $I_{\text{NF}}^{eq}(r)$  et en champ lointain  $I_{\text{FF}}^{eq}(r)$  déterminées exclusivement par les mesures expérimentales de  $(E, N)$ , comme discuté ci-dessus dans le cadre de la Figure 3.5. Cela signifie que les comparaisons entre les mesures expérimentales et les distributions d'intensités théoriques sont réalisées sans paramètres ajustables.

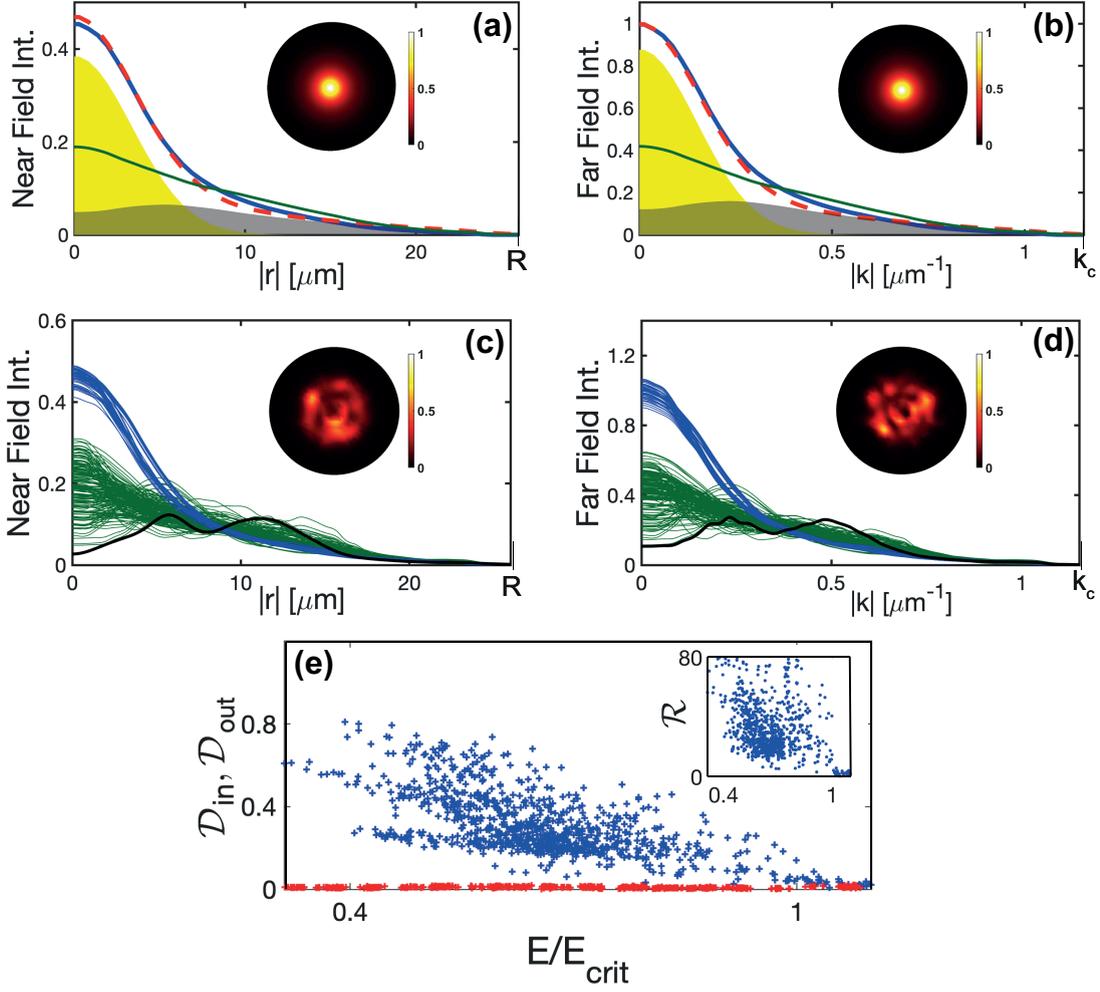


FIGURE 3.5 – **Thermalisation vers la distribution de Rayleigh-Jeans** : Profils expérimentaux des distributions d'intensités du champ proche (NF) (a) et du champ lointain (FF) (b) enregistrées en sortie de la MMF pour la même énergie  $E/E_{crit} \simeq 0.66$  ( $n_0^{eq}/N \simeq 0.4$ ) avec une moyenne sur les réalisations (lignes bleues). distributions d'intensités théoriques RJ montrant la contribution condensée du mode fondamental  $p = 0$  :  $I_{NF}^{cond}(r)$ ,  $I_{FF}^{cond}(k)$  région jaune, depuis l'équation (3.7), et la distribution incohérente des autres modes  $p \neq 0$  :  $I_{NF}^{inc}(r)$ ,  $I_{FF}^{inc}(k)$  région grise, depuis l'équation (3.8) et leurs sommes respectives  $I_{NF}^{eq}(r)$ ,  $I_{FF}^{eq}(k)$  (ligne rouge hachurée) - notons l'accord quantitatif avec l'expérience (ligne bleue) sans paramètres ajustables. Les encarts montrent les distributions d'intensités moyennées sur les réalisations. Les lignes vertes reportent les profils d'intensités moyennés enregistrés à l'entrée de la MMF. (c)-(d) Réalisations individuelles des intensités à l'entrée (vert) et de la sortie (bleu) correspondants aux intensités moyennes en (a) et (b). Les encarts reportent les distributions d'intensités 2D correspondant aux lignes noires (même échelle de couleur pour tous les encarts). (e) Distance de l'intensité théorique de Rayleigh-Jeans pour toutes les réalisations en champ proche de l'intensité en entrée ( $\mathcal{D}_{in}$ , bleu) et en sortie ( $\mathcal{D}_{out}$ , rouge). Le ratio  $\mathcal{R} = \mathcal{D}_{in}/\mathcal{D}_{out} \gg 1$  montre l'attraction vers la distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans (encart).

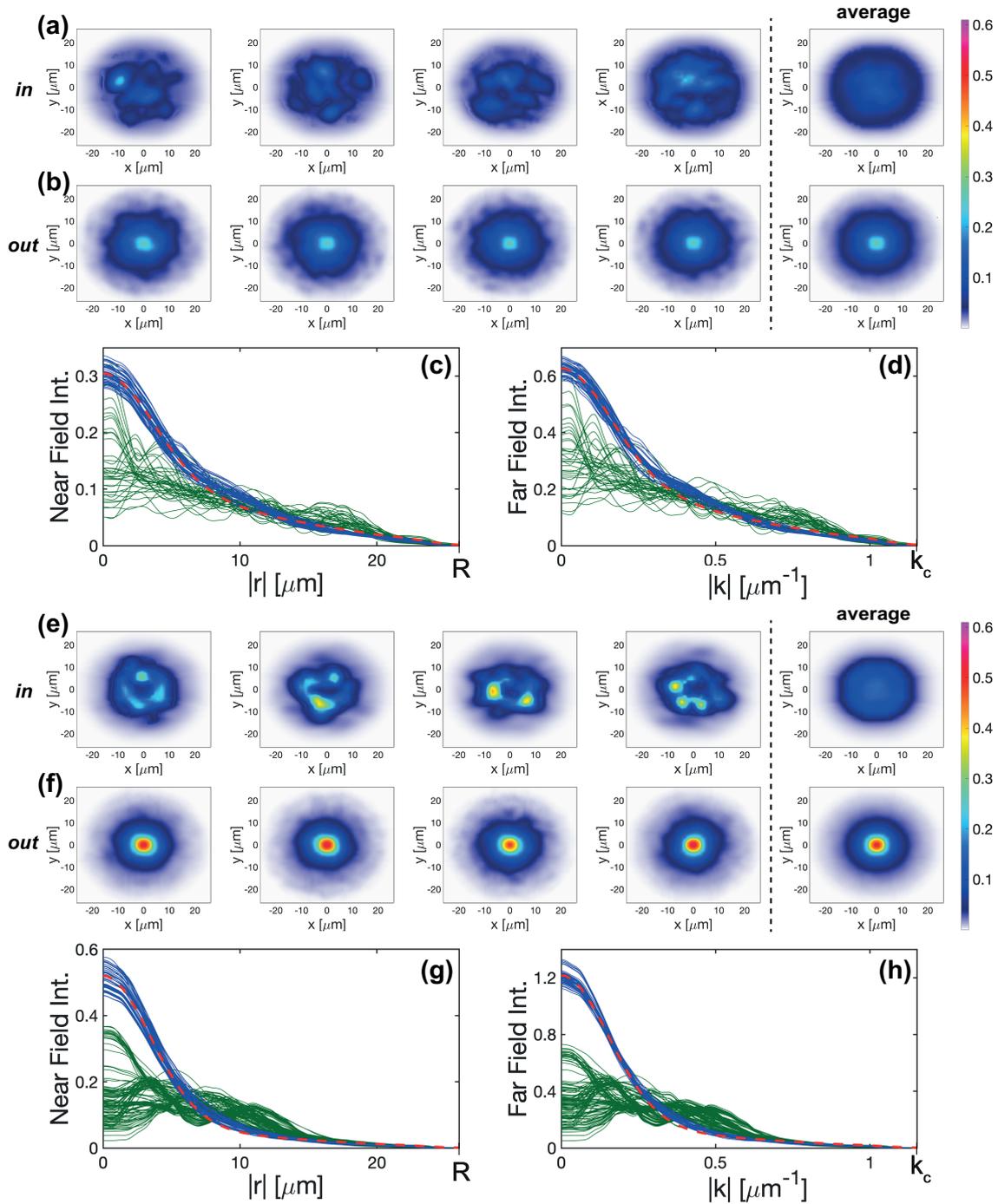


FIGURE 3.6 – **Thermalisation vers la distribution de Rayleigh-Jeans** : Réalisations particulières des distributions d'intensités 2D en champ proche enregistrées en entrée (ligne (a) et (e)) et en sortie (ligne (d) et (f)) de la MMF pour  $E/E_{\text{crit}} \simeq 0.83$  ( $n_0^{eq}/N \simeq 0.33$ ) (a-b-c-d), et  $E/E_{\text{crit}} \simeq 0.61$  ( $n_0^{eq}/N \simeq 0.45$ ) (e-f-g-h). L'ensemble des réalisations individuelles en entrée (vert) et en sortie (bleu) sont reportées en fonction des distances radiales  $r$  et  $k$  en (c-d) et (g-h). La condensation apparaît également pour une faible population du mode fondamental. La dernière colonne en (a-b) et (e-f) montre les moyennes sur toutes les réalisation. Les lignes rouges hachurées en (c-d) et (g-h) reportent les intensités théoriques de Rayleigh-Jeans  $I_{\text{NF}}^{eq}(r)$  et  $I_{\text{FF}}^{eq}(r)$  pour les valeurs mesurées de  $(E, N)$  sans paramètres ajustables.

## 3.4 Observation de la transition de phase de condensation

Nous discutons dans cette section la transition de phase de condensation sur la base de la distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans. Nous rappelons les résultats essentiels de la théorie développée en référence [17], aussi bien dans la limite thermodynamique, que pour un système de taille finie relevant pour l'expérience. En parallèle à cette description théorique, nous comparons les mesures expérimentales aux courbes théoriques de l'équilibre de Rayleigh-Jeans.

### 3.4.1 Condensation à la limite thermodynamique

Dans cette partie nous développons la théorie de condensation de Rayleigh-Jeans dans le cas de la limite thermodynamique. Dans le cadre général des transitions de phases cette limite se réfère à la limite mathématique où le nombre de particule et le volume du système considéré tendent vers l'infini tandis que la densité de particule reste constante. Nous verrons ci-dessous comment se traduit la limite thermodynamique dans le cadre de la condensation d'onde classique en fibre multimode. Il est important de noter que nous ne prenons pas en compte ici le rôle de la non-linéarité (paramètre  $\gamma$ ) dans le calcul de la fraction de puissance condensée. Ceci est en contraste avec la théorie de condensation en milieu ouvert (en l'absence d'un potentiel de confinement,  $V(r) = 0$ ), où une approche de type Bogoliubov montre que la puissance condensée dépend fortement de la non-linéarité, voir référence [16]. Cependant, la propagation en fibre optique change radicalement la situation : Nous montrons en [Appendice A](#) que l'approche Bogoliubov n'est pas pertinente pour décrire le régime faiblement non-linéaire de notre expérience.

À l'équilibre thermodynamique, nous rappelons les définitions de la puissance  $N = \sum_p n_p^{eq}$  et de l'énergie  $E = \sum_p \beta_p n_p^{eq}$  ainsi que la distribution de Rayleigh-Jeans

$$n_p^{eq} = T/(\beta_p - \mu), \quad (3.11)$$

où  $\beta_p = \beta_{p_x, p_y} = \beta_0(p_x + p_y + 1)$  sont les valeurs propres du potentiel parabolique tronqué ( $V(\mathbf{r}) \leq V_0$ ), et l'indice  $p$  étiquette les deux entiers  $(p_x, p_y)$  qui spécifient un mode.

Dans la suite, nous appelons la «limite thermodynamique» la limite définie par :

- $N \rightarrow +\infty$  : le «nombre de particule» tend vers l'infini,
- $\beta_0 \rightarrow 0$  : le «volume» tend vers l'infini,
- $N\beta_0^2 = \text{const}$  et  $V_0 = \text{const}$  : la «densité de particule» reste constante.

Dans cette limite la somme discrète sur les modes est remplacée par des intégrales continues, à savoir

$$N = \sum_p n_p^{eq} \rightarrow (T/\beta_0^2) \int_0^{V_0} dx \int_0^{V_0-x} dy (x + y + \bar{\mu})^{-1}.$$

Le calcul de cette intégrale donne

$$N = \frac{T}{\beta_0^2} \left( V_0 + \bar{\mu} \log \left( \bar{\mu}/(V_0 + \bar{\mu}) \right) \right), \quad (3.12)$$

avec  $\bar{\mu} = \beta_0 - \mu > 0$ . L'équation (3.12) montre que  $\mu \rightarrow \beta_0^-$  (ou  $\bar{\mu} \rightarrow 0^+$ ) pour une température critique non-nulle

$$T_{crit}^* = N\beta_0^2/V_0. \quad (3.13)$$

Cela signifie que la condensation d'onde a lieu à la limite thermodynamique à 2 dimensions spatiales grâce au potentiel parabolique tronqué [17]. La même conclusion est obtenue à travers l'analyse de l'énergie. Dans la limite continue où les sommes discrètes sont remplacées par des intégrales continues nous avons

$$\frac{E}{N} = \mu + \frac{V_0^2/2}{V_0 + \bar{\mu} \log(\bar{\mu}/V_0 + \bar{\mu})}. \quad (3.14)$$

Nous voyons que  $\mu \rightarrow \beta_0^-$  pour une énergie critique non-nulle

$$E_{crit}^*/N = \beta_0 + V_0/2 \simeq V_0/2, \quad (3.15)$$

et  $\mu = \beta_0$  pour  $E \leq E_{crit}^*$ .

Puisque  $\mu = \beta_0$  en dessous de la transition à la condensation ( $E \leq E_{crit}^*$ ), le dénominateur de la distribution de Rayleigh-Jeans s'annule exactement en équation (3.11) pour le mode fondamental ( $p = 0$ ). Comme en condensation de Bose-Einstein usuelle, cette singularité est traitée en séparant la contribution du mode fondamental des autres modes  $p \neq 0$  [16]. En éliminant la température  $T$ , la fraction de puissance condensée peut être exprimée comme une fonction de l'énergie [17] :

$$n_0^{eq}/N = 1 - (E - E_0)/(E_{crit}^* - E_0), \quad (3.16)$$

où  $E_0 = N\beta_0$  est l'énergie minimale, lorsque toute la puissance occupe le mode fondamental. De façon équivalente, la fraction de puissance condensée peut être exprimée en fonction de la température :

$$n_0^{eq}/N = 1 - T/T_{crit}^*. \quad (3.17)$$

On remarque ainsi que  $n_0^{eq} = 0$  pour  $T_{crit}^*$  et  $n_0^{eq}/N \rightarrow 1$  lorsque  $T \rightarrow 0$ .

### 3.4.2 Effet de taille finie et observation de la condensation

Dans notre expérience, la fibre possède un nombre fini de modes  $M = 120$ . Les effets de taille finie inhérents à la MMF sont pris en compte en considérant la somme discrète sur les modes (au lieu des intégrales continues) :  $N = \sum_p n_p^{eq}$ ,  $E = \sum_p \beta_p n_p^{eq}$ . En utilisant  $N = \sum_p T/(\beta_p - \mu)$  et  $n_0^{eq} = T/(\beta_0 - \mu)$ , nous avons [17] :

$$\frac{n_0^{eq}}{N}(\mu) = \frac{1}{-(\mu - \beta_0) \sum_p (\beta_p - \mu)^{-1}}. \quad (3.18)$$

En partant de  $E = T \sum_p \beta_p/(\beta_p - \mu)$  et en éliminant la température par  $T = N/ \sum_p (\beta_p - \mu)^{-1}$ , nous obtenons

$$\frac{E}{E_{crit}^*}(\mu) = \frac{\sum_p \frac{\beta_p}{\beta_p - \mu}}{\left(1 + (M - 1)/\varrho\right) \sum_p \frac{\beta_0}{\beta_p - \mu}}, \quad (3.19)$$

où  $\varrho = \sum_{p \neq 0} 1/(p_x + p_y)$ . L'énergie critique et la température critique prenant en compte la taille finie du système s'écrivent [17] :

$$E_{\text{crit}} = E_0(1 + (M - 1)/\varrho), \quad T_{\text{crit}} = N\beta_0/\varrho, \quad (3.20)$$

Notons que, à la limite thermodynamique :  $\varrho \rightarrow V_0/\beta_0$ , de sorte que les expressions de l'énergie critique et température critique tendent vers les valeurs respectives à la limite thermodynamique,  $E_{\text{crit}} \rightarrow E_{\text{crit}}^*$  et  $T_{\text{crit}} \rightarrow T_{\text{crit}}^*$ .

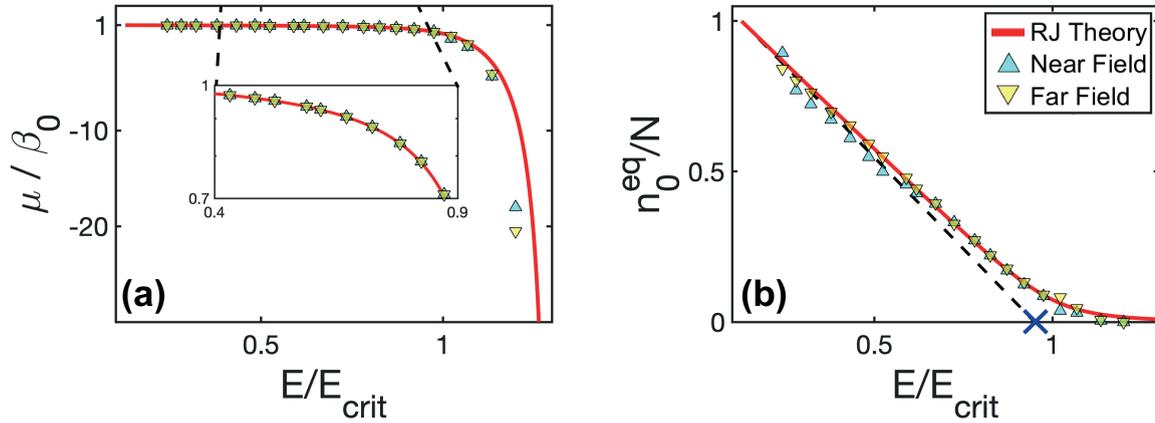


FIGURE 3.7 – **Condensation de Rayleigh-Jeans vs mesures expérimentales moyennées.** (a) Potentiel chimique vs énergie : Pour  $E \lesssim E_{\text{crit}}$ ,  $\mu \rightarrow \beta_0$ , ce qui entraîne une population macroscopique du mode fondamental, voir  $n_0^{\text{eq}}/N$  vs  $E/E_{\text{crit}}$  (b). Les triangles bleus (jaunes) reportent les résultats expérimentaux des distributions d'intensités (NF) (moyennées sur les réalisations). Les lignes rouges reportent la théorie de Rayleigh-Jeans prenant en compte les effets de taille finie du système (voir équations (3.18-3.19)). La ligne noire hachurée en (b) se réfère à la limite thermodynamique [équation (3.16)] et la croix bleue indique  $E_{\text{crit}}^*/E_{\text{crit}} \simeq 0.95$  : L'expérience est relativement « proche » de la limite thermodynamique.

Nous reportons en Figure 3.7(a) (ligne rouge) le potentiel chimique  $\mu$  vs  $E$  obtenu par l'équation (3.19) : En diminuant  $E$ ,  $\mu$  augmente et la condensation se produit quand  $\mu \rightarrow \beta_0$  pour  $E \simeq E_{\text{crit}}$ . Nous reportons également en Figure 3.7(b) la fraction de puissance condensée en fonction de l'énergie, obtenue par un affichage paramétrique des équations (3.18-3.19) par rapport à la variable  $\mu$ . En-dessous de la transition ( $E \leq E_{\text{crit}}$ ), le mode fondamental devient macroscopiquement peuplé  $n_0^{\text{eq}} \gg n_{p \neq 0}^{\text{eq}}$ , voir Figure 3.7(b). Les triangles reportent les données expérimentales extraites par la méthode des moindres carrés pour les distributions d'intensités en champ proche et en champ lointain comme discuté ci-dessus en section 3.3.1. Les résultats expérimentaux en Figure 3.7 sont en accord quantitatif avec la théorie de Rayleigh-Jeans, où les paramètres  $\beta_0$  et  $M$  sont fixés par la fibre multimode utilisée dans l'expérience, voir section 3.2.1. De plus, le couple  $(E, N)$  est fixé par les mesures expérimentales, de sorte qu'on obtient une unique distribution d'intensité théorique de Rayleigh-Jeans, comme discuté ci-dessus en Figure 3.5 et 3.6. Notons également que les résultats expérimentaux sont proches de la limite thermodynamique donnée par l'équation (3.16), comme illustré en Figure 3.7(b) où la limite thermodynamique est reportée en ligne noire hachurée. Comme prédit par la théorie en équations (3.18-3.19), les effets de taille finie du système rendent la transition vers la condensation « plus douce »

et continue, comme illustré par la comparaison de la ligne rouge avec la ligne en pointillés noire en Figure 3.7(b).

Depuis les équations (3.18-3.19), il est également possible de tracer la courbe  $n_0$  en fonction de  $E$  et  $\mu$ . Cette dernière est représentée par la ligne rouge en Figure 3.8 et illustre l'apparition de la condensation quand l'énergie  $E$  diminue pour  $\mu \rightarrow \beta_0$ . Les  $2 \times 1000$  réalisations individuelles sont reportées à travers les triangles bleus (champ proche) et les triangles jaunes (champ lointain) et montrent que même sans faire de moyennes sur les réalisations, on obtient un bon accord entre l'expérience et la théorie.

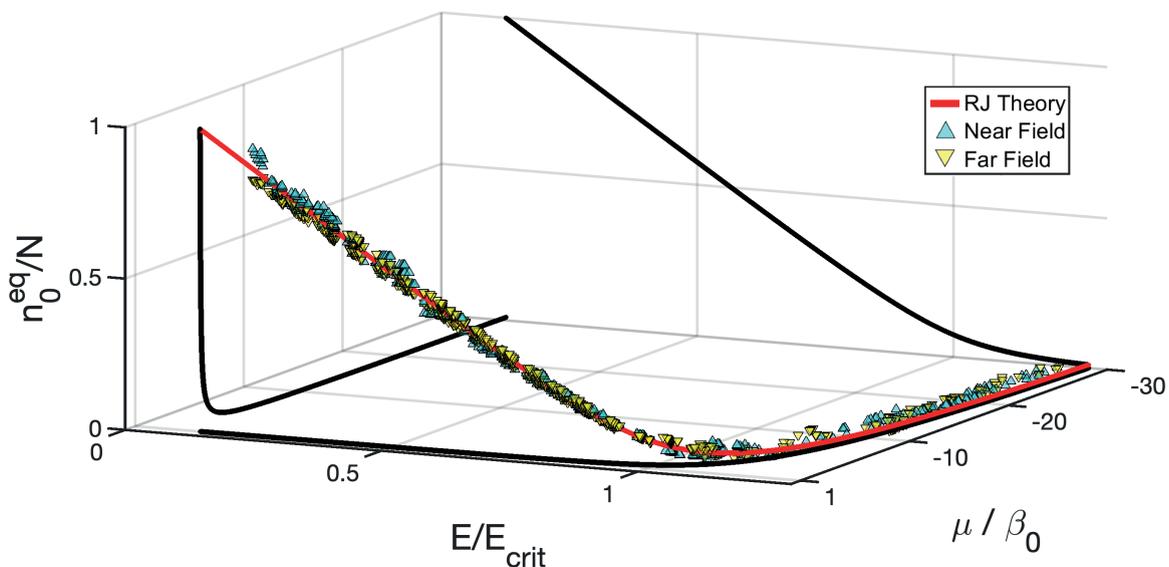


FIGURE 3.8 – **Condensation de Rayleigh-Jeans vs mesures individuelles.** Fraction de puissance condensée à l'équilibre  $n_0^{eq}/N$  vs  $(E/E_{crit}, \mu/\beta_0)$  obtenue par les équations (3.18-3.19) (ligne rouge). Comparaison aux mesures expérimentales des réalisations individuelles en champ proche (triangles bleus) et champ lointain (triangles jaunes). Les  $2 \times 1000$  réalisations individuelles présentent une plus grande disparité autour de l'équilibre de Rayleigh-Jeans par rapport aux mesures moyennées, cependant elles restent proches de la théorie. Les projections de la courbe rouge sur les trois plans sont représentées par les courbes noires. On retrouve donc la courbe de condensation dans le plan  $(n_0^{eq}/N, E/E_{crit})$  présentée en Figure 3.7(b).

### 3.4.3 Impact négligeable de la courbure de la fibre optique

Dans la procédure expérimentale présentée dans ce Chapitre, nous n'avons pas pris en compte l'impact du rayon de courbure de la fibre due à son enroulement autour du tambour. Une description théorique des effets de courbure peut être développée sur la base de la méthode WKB (Wentzel, Kramers et Brillouin). En effet, par un changement de coordonnées approprié, la fibre courbée (avec le rayon de courbure  $R_c$ ) peut être vue comme une fibre droite avec un indice de réfraction effectif  $n_{eff}$  [127]. Nous avons démontré expérimentalement en section 3.2.3 que la puissance était conservée durant la propagation dans la MMF, cependant le rayon de courbure peut affecter le nombre de modes guidés ainsi que leurs valeurs propres. Une analyse détaillée basée sur la théorie des perturbations montre que l'impact de la courbure de la fibre sur les valeurs propres  $\beta_p$  est négligeable :

Au premier ordre la correction est indépendante du mode  $\{p\}$  considéré et elle est de la forme [128]

$$\delta\beta/\beta_0 \sim \frac{3}{2} \left( \frac{1}{R_c \beta_0} \right)^2.$$

Dans les expériences, la fibre multimode est enroulée sur un tambour de rayon  $R_c = 8$  cm, de sorte que  $\delta\beta/\beta_0 \sim 9 \times 10^{-6}$ . Une telle courbure de fibre affecte aussi légèrement le nombre effectif de modes guidés par la MMF courbée  $M_{\text{eff}}$ . Ce nombre est plus petit que la nombre total de modes dans la fibre droite  $M$  et peut être déterminé par l'expression suivante [129, 130]

$$M_{\text{eff}} = M \left\{ 1 - \frac{g+2}{2g\Delta} \left[ \frac{2a}{R_c} + \left( \frac{3}{2n_0 k R_c} \right)^{2/3} \right] \right\}, \quad (3.21)$$

où  $\Delta = n_{co} - n_{cl}$ , et  $g$  le nombre de groupes de modes non-dégénérés. De sorte que pour une fibre droite, c-a-d un rayon de courbure infini  $R_c \rightarrow +\infty$ , on retrouve  $M_{\text{eff}} = M$ . On peut ainsi estimer que la courbure due à l'enroulement autour du tambour ( $R_c = 8$  cm) entraîne une réduction de 7% (c-a-d,  $M_{\text{eff}} \simeq 111$  modes) du nombre de modes par rapport à la fibre droite. Nous reportons en Figure 3.9  $\mu/\beta_0$  et  $n_0^{\text{eq}}/N$  vs  $E/E_{\text{crit}}$  obtenus en appliquant exactement la même procédure des moindres carrés discutée en section 3.3.1, mais avec  $M_{\text{eff}} = 111$  modes (au lieu de  $M = 120$ ). La comparaison avec la Figure 3.7 montre que la courbure n'affecte pas le bon accord entre la théorie et l'expérience.

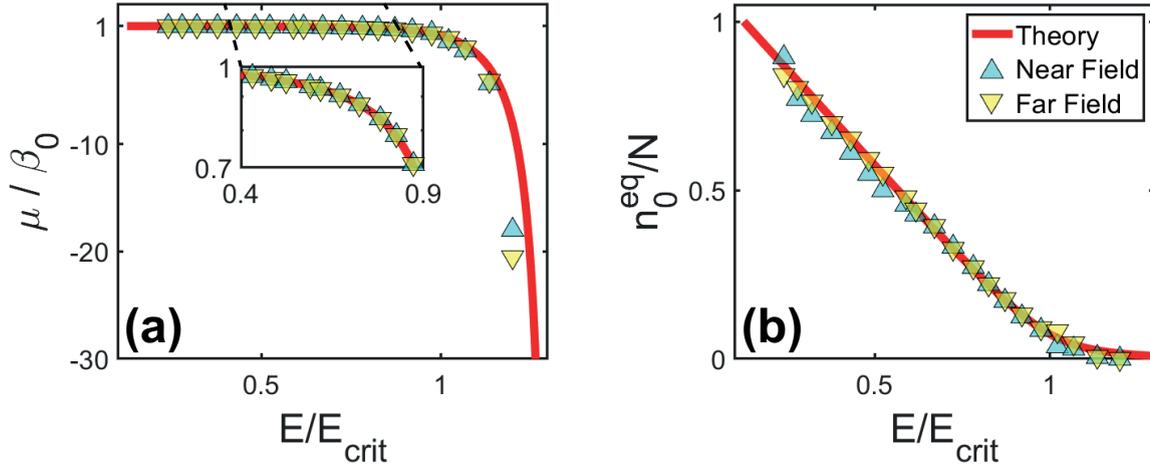


FIGURE 3.9 – Condensation RJ prenant en compte l'enroulement de la fibre : La courbure de la fibre réduit de manière effective le nombre de modes de  $M = 120$  à  $M_{\text{eff}} \simeq 111$ . Nous reportons les résultats théoriques et expérimentaux de la Figure 3.7 (a-b) en considérant  $M_{\text{eff}} = 111$  au lieu de  $M = 120$ . Les lignes rouges reportent la théorie de Rayleigh-Jeans avec 111 modes, voir équations (3.18-3.19). Les triangles bleus (jaunes) reportent les résultats expérimentaux extraits du champ proche (lointain). La réduction de  $M = 120$  à  $M_{\text{eff}} = 111$  modes n'affecte pas le bon accord entre la théorie et l'expérience.

## 3.5 Propriétés thermodynamiques de la condensation d'ondes classiques

### 3.5.1 Aspects théoriques

Nous discutons dans cette partie les propriétés thermodynamiques de la condensation d'ondes classiques. Nous discutons notamment le comportement de la chaleur spécifique lors de la transition de phase de condensation, ce qui va nous permettre de distinguer les propriétés de la condensation d'ondes classiques de celles de la condensation de Bose-Einstein quantique.

L'entropie à l'équilibre est définie par

$$\tilde{S}^{eq} = \sum_p \log(n_p^{eq}). \quad (3.22)$$

Il est préférable de décaler l'expression de l'entropie par une constante  $S^{eq} = \tilde{S}^{eq} - M \log N$ . Ainsi, en éliminant la température, nous obtenons les équations de base pour l'étude des propriétés thermodynamiques de l'effet de condensation d'ondes classiques :

$$S^{eq}(\mu) = - \sum_p \log(\beta_p - \mu) - M \log \left( \sum_m \frac{1}{\beta_m - \mu} \right), \quad (3.23)$$

$$\frac{T}{T_{crit}}(\mu) = \frac{\varrho}{\sum_p \frac{\beta_0}{\beta_p - \mu}}, \quad (3.24)$$

$$\frac{E}{E_{crit}}(\mu) = \frac{\sum_p \frac{\beta_p}{\beta_p - \mu}}{(1 + (M - 1)/\varrho) \sum_p \frac{\beta_0}{\beta_p - \mu}}, \quad (3.25)$$

où  $E_{crit}$  et  $T_{crit}$  sont l'énergie critique et la température critique, données en équation (3.20). Les équations (3.23) et (3.25) dépendent du paramètre  $\mu$ , en les combinant on obtient  $S^{eq}(E)$ . La fonction  $S^{eq}$  vs  $E$  est reportée en Figure 3.10(a). On note en particulier la concavité de l'entropie par rapport à la variable extensive de l'énergie  $E$ , en accord avec les propriétés thermodynamiques usuelles de l'entropie. Par ailleurs, on peut tracer les équations (3.24-3.25) de façon paramétrique par rapport à  $\mu$ , ce qui donne  $E(T)$ .

La chaleur spécifique  $C_V$  est une quantité importante caractérisant la transition vers la condensation dans un gaz de Bosons quantique [131]. La chaleur spécifique est définie par l'équation suivante

$$C_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_{N,M}. \quad (3.26)$$

Elle peut être calculée depuis  $E = \sum_p \beta_p n_p^{eq}$  :  $(\partial E / \partial T)_{N,M} = \sum_p (\beta_p - \mu)^{-1} + T \sum_p \beta_p \partial_\mu \left( (\beta_p - \mu)^{-1} \right) \partial_T \mu$ . En utilisant l'équation (3.24), nous obtenons

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_{N,M} = - \frac{1}{T} \frac{\sum_p \frac{1}{\beta_p - \mu}}{\sum_p \frac{1}{(\beta_p - \mu)^2}}, \quad (3.27)$$

ce qui mène à

$$C_V(E) = M - \frac{\{\sum_p [\beta_p - \mu(E)]^{-1}\}^2}{\sum_p [\beta_p - \mu(E)]^{-2}}. \quad (3.28)$$

L'expression (3.28) peut aussi être obtenue depuis  $S^{eq}$

$$\left. \frac{\partial S^{eq}}{\partial T} \right|_{N,M} = \frac{M}{T} - \frac{1}{T} \frac{\left(\sum_p \frac{1}{\beta_p - \mu}\right)^2}{\sum_p (\beta_p - \mu)^{-2}}. \quad (3.29)$$

En écrivant la chaleur spécifique sous la forme  $C_V = (\partial E / \partial S^{eq})_{N,M} (\partial S^{eq} / \partial T)_{N,M}$  et en rappelant la définition de la température  $1/T = (\partial S^{eq} / \partial E)_{N,M}$ , l'équation (3.29) mène également à l'expression (3.28).

Dans la limite continue où les sommes discrètes peuvent être remplacées par des intégrales (voir section 3.4.1), la chaleur spécifique  $C_V$  est obtenue sous la forme explicite :

$$\frac{C_V}{M} = 1 + \frac{2[1 + (\bar{\mu}/V_0) \log(\bar{\mu}/(\bar{\mu} + V_0))]^2}{V_0/(V_0 + \bar{\mu}) + \log(\bar{\mu}/\bar{\mu} + V_0)}, \quad (3.30)$$

où  $\bar{\mu} = \beta_0 - \mu$ . L'analyse de l'équation (3.30) et des relations pour  $N$  et  $E$  en équations (3.12) et (3.14) révèlent que  $C_V$  présente une singularité à la transition vers l'état condensé :

$$\lim_{T \rightarrow T_{crit}^+} \frac{\partial C_V}{\partial T} = \lim_{E \rightarrow E_{crit}^+} \frac{\partial C_V}{\partial E} = +\infty. \quad (3.31)$$

Par ailleurs, dans la limite des hautes températures ( $T/T_{crit} \gg 1$ ), la chaleur spécifique décroît vers zéro comme

$$\frac{C_V(T)}{M} \simeq \frac{2}{9} \left(\frac{T_{crit}}{T}\right)^2 \quad \text{pour } T \gg T_{crit}.$$

### 3.5.2 Comparaison aux propriétés de la condensation de Bose-Einstein

Dans cette partie nous comparons brièvement le comportement de la chaleur spécifique pour la condensation d'ondes classiques et la condensation de Bose-Einstein quantique. Pour un système d'ondes classiques dans l'état condensé où  $E < E_{crit}$ , nous avons  $\mu \rightarrow \beta_0$ . Alors en écrivant l'énergie sous la forme  $E = TM + \beta_0 N$  on obtient  $C_V = M$ , voir Figure 3.10(c-d). Ce résultat est conforme à celui attendu par le théorème de l'équipartition d'énergie inhérent à la mécanique statistique d'un système classique à l'équilibre thermodynamique. En revanche, ceci est en contraste avec le comportement d'un gaz quantique, où  $C_V \rightarrow 0$  dans la limite  $T \rightarrow 0$ , comportement qui résulte de la notion quantique de «degrés de libertés gelés» [131]. Au-dessus de la transition où  $T > T_{crit}$ , un gaz quantique se comporte comme un gaz classique caractérisé par une equipartition d'énergie parmi les particules et donc par une chaleur spécifique constante non nulle  $C_V(T) = \text{const}$  [131]. Contrairement à un gaz classique, nous observons dans le système d'ondes classiques que  $C_V \rightarrow 0$  pour  $E > E_{crit}$  (ou  $T > T_{crit} = N\beta_0/\varrho$ ), voir Figure 3.10(c-d). En réalité, les propriétés d'équilibre d'ondes classiques sont d'une nature différente que celles d'un gaz.

Au-dessus de la transition, l'état d'équilibre ne présente plus d'équipartition d'énergie, mais une équipartition de puissance parmi les modes

$$n_p^{eq} \sim T/(-\mu) \quad (3.32)$$

pour le potentiel chimique  $-\mu \gg \beta_p$ . Cet état correspond à l'état d'équilibre le plus désordonné avec pour entropie

$$S_{\max}^{eq} = -M \log M, \quad (3.33)$$

et pour énergie

$$E_t = \frac{2}{3}NV_0,$$

avec la température

$$1/T = (\partial S/\partial E)_{N,M} \rightarrow 0.$$

Cette propriété  $1/T \rightarrow 0$  est propre au système d'ondes classiques et ne se rencontre pas pour un gaz quantique ou classique. Notons que l'équilibre *n'est pas contraint par la conservation de l'énergie  $E$*  (le multiplicateur de Lagrange  $1/T$  est nul), mais uniquement par la conservation de  $N$ , ce qui explique l'équipartition modale de puissance discutée en équation (3.32), voir aussi la référence [106]. En conséquence, une variation de la température  $T$  n'affecte pas l'énergie  $E$ , ce qui implique  $C_V \rightarrow 0$ . Ces aspects seront discutés plus en détail en [Conclusion](#), notamment en relation avec l'existence d'états d'équilibre caractérisés par une température négative. Notons enfin qu'en approchant la limite thermodynamique, la chaleur spécifique  $C_V$  présente une singularité caractérisée par une dérivée infinie à  $E = E_{\text{crit}}$  (ou  $T = T_{\text{crit}}$ ) comme prédit par l'équation (3.31), voir Figure 3.10(c-d).

### 3.5.3 Comparaison aux valeurs extraites de l'expérience

Dans cette partie nous allons comparer les propriétés thermodynamiques théoriques de la condensation d'ondes classiques avec des valeurs qui peuvent être extraites de l'expérience. Nous soulignons que dans l'expérience nous ne «mesurons» pas l'entropie ou la chaleur spécifique. Ces quantités sont en fait extraites d'autres données expérimentales. Par exemple, en utilisant l'équation (3.23) qui exprime l'entropie à l'équilibre  $S^{eq}$  vs  $\mu$ , nous reportons en Figure 3.10(a) l'évolution de  $S^{eq}$  vs  $E/N$  en utilisant les données expérimentales  $\mu$  vs  $E$  en Figure 3.7(a). D'une façon similaire, en utilisant l'équation (3.24) qui exprime la température  $T$  vs  $\mu$ , nous reportons en Figure 3.10(b) l'évolution de  $T$  vs  $E$  en utilisant les données expérimentales  $\mu$  vs  $E$  en Figure 3.7(a). Nous rappelons que dans notre expérience la transition de condensation est étudiée en faisant varier l'énergie  $E$  tout en gardant la puissance  $N$  et le nombre de modes  $M$  constant ( $M$  jouant un rôle analogue au volume du système [24]).

Afin de comparer les distributions d'intensités (champ proche et champ lointain) mesurées expérimentalement aux distributions théoriques de Rayleigh-jeans en Figure 3.5, nous avons utilisé le fait que le couple énergie-puissance  $(E, N)$  mesuré fixe le couple  $(\mu, T)$ . Ceci peut être constaté en Figure 3.10(a) où le rapport  $E/N$  fixe de façon unique

le potentiel chimique  $\mu$ . Par ailleurs, la Figure 3.10(b) montre que le couple  $(E, N)$  fixe également la température  $T$  de façon unique. Enfin, nous rappelons que  $\beta_0$  et  $M$  sont fixés par la fibre multimode voir section 3.2.1.

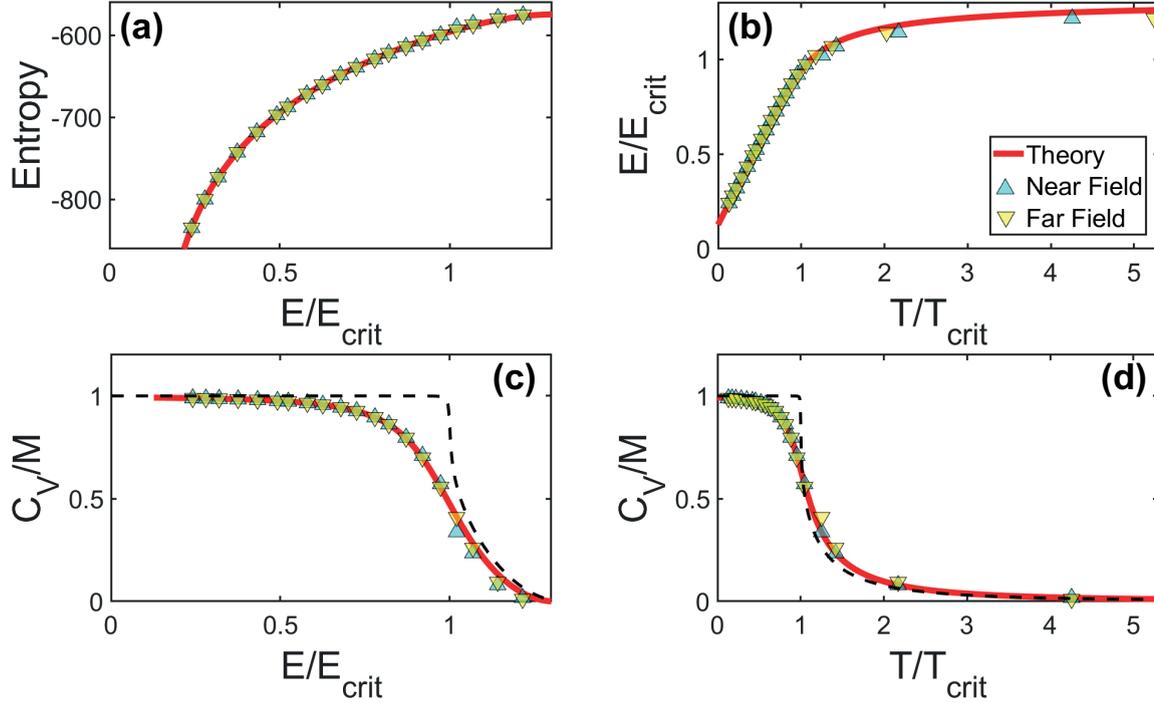


FIGURE 3.10 – **Thermodynamique de la condensation d’ondes classique.** (a) Entropie  $S^{eq}$  vs  $E/E_{\text{crit}}$  ; (b)  $E/E_{\text{crit}}$  vs  $T/T_{\text{crit}}$ . Chaleur spécifique  $C_V/M$  vs  $E/E_{\text{crit}}$  (c), et  $T/T_{\text{crit}}$  (d). Les triangles bleus (jaunes) reportent les résultats extraits des mesures expérimentales des distributions d’intensités (moyennées sur les réalisations), comme discuté dans le texte. Les lignes rouges pleines reportent la théorie RJ sans paramètres ajustables ( $M = 120$  modes), voir les équations (3.23-3.25), et (3.28). Pour  $E < E_{\text{crit}}$  (ou  $T < T_{\text{crit}}$ ) le système présente une équipartition d’énergie entre les modes de sorte que  $C_V/M \rightarrow 1$ , tandis que pour  $E > E_{\text{crit}}$  (ou  $T > T_{\text{crit}}$ ) l’équipartition de puissance entre les modes (voir équation (3.32)) entraîne  $C_V \rightarrow 0$ . Les lignes noires hachurées sont pour  $M = 500500$ , ce qui montre qu’en s’approchant de la limite thermodynamique, la chaleur spécifique exhibe une singularité à la transition de phase de condensation, comme discuté en équation (3.31). On peut noter en (a) que l’entropie est une fonction concave de l’énergie.

## 3.6 Conclusion et perspectives

Pour résumer, nous avons présenté le dispositif expérimental utilisé pour les expériences. Nous avons discuté le rôle essentiel du diffuseur pour l’observation de l’effet de condensation, lequel permet de varier l’énergie (Hamiltonien) du faisceau injecté dans la fibre multimode tout en maintenant la puissance constante. Nous avons présenté le dispositif expérimental qui permet de mesurer les distributions d’intensités en champ proche et en champ lointain. Après avoir vérifié que l’effet Raman peut être négligé au sein de la courte longueur de fibre considérée dans notre expérience, nous avons montré que la propagation de la lumière dans la MMF se déroule dans le régime faiblement non linéaire. En

mesurant la puissance et l'énergie du faisceau optique en entrée (20cm) et en sortie (12m) de fibre, nous avons démontré la conservation de l'énergie et de la puissance durant la propagation dans la MMF. En réalisant des moyennes sur plusieurs réalisations sur une plage complète de  $E/E_{\text{crit}}$ , nous avons vérifié expérimentalement l'équipartition d'énergie pour les contributions cinétiques et potentielles.

Afin d'observer la thermalisation vers la distribution de Rayleigh-Jeans, nous avons extrait à partir des moyennes sur les distributions d'intensités la fraction de puissance au sein du mode fondamental  $n_0/N$  ainsi que le potentiel chimique  $\mu$ . Pour chaque distribution moyenne, ce couple de paramètres est déterminé en minimisant les erreurs quadratiques associées à la procédure d'extraction. Les erreurs sont inférieures à 2% sur toute la plage d'énergie, ce qui corrobore le processus de thermalisation vers l'équilibre de Rayleigh-Jeans. Nous avons ensuite présenté différents profils individuels et moyennés des distributions d'intensités du champ proche et du champ lointain enregistrées en entrée et en sortie de la MMF. Nous avons observé une réduction des fluctuations pour les réalisations individuelles entre l'entrée et la sortie de la fibre, cette réduction met en évidence le rôle «d'attracteur statistique» de la distribution de Rayleigh-Jeans. Enfin, nous avons caractériser le processus d'attraction vers Rayleigh-Jeans en introduisant une distance qui mesure le degré de similarité entre la distribution d'intensité radiale d'un faisceau enregistré expérimentalement et l'intensité théorique de Rayleigh-Jeans. La forte réduction de cette distance entre le faisceau en entrée et en sortie de la MMF montre l'attraction vers le profil d'intensité théorique et confirme donc la thermalisation vers l'équilibre de Rayleigh-Jeans.

Nous avons discuté la théorie de condensation de Rayleigh-Jeans dans le cas de la limite thermodynamique. L'analyse met en évidence la transition de phase pour des valeurs de l'énergie plus petites qu'une valeur critique  $E_{\text{crit}}$ . Dans notre expérience, la fibre possède un nombre fini de modes, et les effets de taille finie inhérents à la MMF sont pris en compte en considérant une somme discrète sur les modes (au lieu des intégrales continues). Nous avons montré que les effets de taille finie du système rendent la transition vers l'état condensé «plus douce» et continue. Nous avons ensuite reporté les courbes théoriques du potentiel chimique et de la fraction de puissance condensée en fonction de l'énergie afin de les comparer aux données expérimentales extraites par la méthode des moindres carrés pour les distributions d'intensités en champ proche et en champ lointain. Les résultats expérimentaux sont en accord quantitatif avec la théorie de Rayleigh-Jeans sans paramètres ajustables. Enfin, nous avons discuté l'impact du rayon de courbure de la fibre due à son enroulement autour du tambour. La courbure de la fibre a un impact négligeable sur les valeurs propres  $\beta_p$  et entraîne une réduction de 7% du nombre de modes par rapport à la fibre droite. Nous avons alors appliqué la procédure des moindres carrés avec  $M = 111$  modes (au lieu de  $M = 120$ ) et avons montré que la courbure n'affecte pas le bon accord entre la théorie et l'expérience.

Nous avons discuté les propriétés thermodynamiques de la condensation d'ondes classiques afin de les comparer à celles de la condensation de Bose-Einstein quantique. Nous avons montré qu'en dessous de la transition ( $E < E_{\text{crit}}$ ), la chaleur spécifique tend vers le nombre de modes  $C_V \rightarrow M$ , ce qui est attendu par le théorème de l'équipartition d'énergie inhérent à la mécanique statistique d'un système classique à l'équilibre thermodynamique. Ceci est en contraste avec le comportement d'un gaz quantique  $C_V \rightarrow 0$  dans

la limite  $T \rightarrow 0$ , lequel résulte de la notion quantique de «degrés de libertés gelés» [131]. Au-dessus de la transition  $E > E_{\text{crit}}$ , nous avons observé que  $C_V \rightarrow 0$  pour un système d'ondes classiques, l'état d'équilibre ne présente plus d'équipartition d'énergie, mais une équipartition de puissance parmi les modes. Cette particularité est propre aux systèmes d'ondes classiques avec un nombre fini de degrés de libertés (nombre de modes), elle n'est pas présente pour un gaz quantique ou classique. Enfin, nous avons comparé les propriétés thermodynamiques de la condensation d'ondes classiques avec les mesures expérimentales en utilisant le fait que le couple énergie-puissance  $(E, N)$  mesuré fixe le couple  $(\mu, T)$ . Nous avons ainsi observé un bon accord entre la théorie et l'expérience.

Notons enfin que les faisceaux incohérents avec  $E > E_t$  peuvent être en principe excités avec des conditions initiales artificielles caractérisées par une population modale inversée (état de température négative) [24]. Cet aspect sera discuté en [Conclusion](#) de ce manuscrit. Nous discuterons également en [Conclusion](#) du mécanisme responsable du processus de thermalisation observé expérimentalement en relation avec les cascades (directe et inverse) de turbulence d'ondes.

## Appendice A : Stabilité du condensat en fibre optique multimode à gradient d'indice

La description de la condensation d'ondes en absence de potentiel de piégeage (c-a-d, dans le cas homogène  $V(\mathbf{r}) = 0$ ) nécessite l'approche de Bogoliubov, qui montre que la fraction de puissance condensée  $n_0^{eq}/N$  dépend fortement de la non linéarité  $\gamma$  [16, 132–134]. Dans cet Appendice, nous montrons que l'approche de Bogoliubov n'est pas nécessaire pour décrire le régime faiblement non linéaire de notre expérience.

Le désordre structurel de la fibre optique multimode considéré dans l'équation NLS modale (2.16) conduit à une dynamique de phase aléatoire entre les modes. Comme décrit par l'équation cinétique (2.37), le désordre a alors un effet stabilisant dans le processus de condensation dans le régime faiblement non linéaire. Cependant, comme discuté en Chapitre 2, le désordre ne domine pas les effets non linéaires dans les expériences. Dans cet Appendice, nous montrons que le condensat est stable face à la non linéarité focalisante même en absence des effets de désordre. Par conséquent, dans ce qui suit nous négligeons l'impact du désordre en polarisation et posons  $\mathbf{D}_p = 0$ ,  $\mathbf{a}_p \rightarrow a_p$  en équation (2.16).

En suivant une approche de type analyse de stabilité linéaire, nous supposons que le mode fondamental est fortement occupé ( $|a_0| \gg |a_m|$ ,  $m \neq 0$ ) et nous considérons le régime faiblement non linéaire  $\epsilon = L_{\text{lin}}/L_{\text{nl}} = \gamma N/\beta_0 \ll 1$ . Les équations linéarisées s'écrivent

$$\begin{aligned}\partial_z a_0 &= -i\beta_0 a_0 + i\gamma |a_0|^2 a_0 + i\gamma \sum_{p \neq 0} s_{p0} (2|a_0|^2 a_p + a_0^2 a_p^*), \\ \partial_z a_m &= -i\beta_m a_m + i\gamma s_{m0} |a_0|^2 a_0 + i\gamma \sum_{p \neq 0} s_{mp} (2|a_0|^2 a_p + a_0^2 a_p^*),\end{aligned}$$

où  $s_{mn} = S_{mn00}$ . En écrivant  $s_{mn} = w_{m_x n_x} w_{m_y n_y}$ , nous avons

$$w_{m_x n_x} = \frac{(-1)^{\frac{m_x - n_x}{2}} (m_x + n_x)!}{2^{m_x + n_x} \sqrt{m_x! n_x!} \left(\frac{m_x + n_x}{2}\right)!}, \quad (3.34)$$

où  $m_x$  et  $n_x$  ont la même parité, et  $w_{m_x n_x} = 0$  autrement (idem pour  $w_{m_y n_y}$ ). Nous cherchons une solution particulière de la forme  $a_0 = \sqrt{n_0} e^{-i\bar{\beta}_0 z}$ , où  $\bar{\beta}_0$  sera défini ci-dessous, et  $a_m = d_m e^{-i\bar{\beta}_0 z}$  avec  $\bar{\beta}_m = \beta_m - \bar{\beta}_0$  ( $d_m$  est une réel). L'ansatz ci-dessus est une solution si

$$-\bar{\beta}_0 n_0^{1/2} = -\beta_0 n_0^{1/2} + \gamma n_0^{3/2} + 3\gamma n_0 \sum_{p \neq 0} s_{p0} d_p,$$

$$\bar{\beta}_m d_m = +\gamma s_{m0} n_0^{3/2} + 3\gamma n_0 \sum_{p \neq 0} s_{mp} d_p, \quad m \neq 0.$$

Donc le vecteur  $\mathbf{d}$  est solution du système linéaire  $(\mathbf{I} - \mathbf{K})\mathbf{d} = \mathbf{y}$ , avec les éléments de  $\mathbf{y}$  donnés par  $y_m = \gamma n_0^{3/2} s_{m0} / \bar{\beta}_m$  et la matrice  $\mathbf{K} = (K_{mp})$  donnée par  $K_{mp} = 3\gamma n_0 s_{mp} / \bar{\beta}_m$  pour  $m \neq p$  et 0 autrement. La matrice  $\mathbf{I} - \mathbf{K}$  est inversible si  $\sup_m \sum_p |K_{mp}| < 1$ , ce qui est vérifié puisque  $\epsilon \ll 1$ . Donc il y a une solution vectorielle unique qui est  $\mathbf{d} = (\mathbf{I} - \mathbf{K})^{-1} \mathbf{y}$ . En considérant seulement les corrections au premier ordre  $O(\epsilon^2 \beta_0)$ , nous avons  $d_m = \gamma n_0^{3/2} s_{m0} / (\beta_m - \beta_0)$ ,  $\bar{\beta}_0 = \beta_0 - \gamma n_0$ ,  $\bar{\beta}_m = \beta_m - \beta_0 + \gamma n_0$ , et le mode fondamental non linéaire est de la forme

$$\bar{u}_0(\mathbf{r}, z) = \sqrt{n_0} e^{-i\bar{\beta}_0 z} \left( u_0(\mathbf{r}) + \sum_{m \neq 0} \frac{\gamma n_0 s_{m0}}{\beta_m - \beta_0} u_m(\mathbf{r}) \right).$$

Le champ total est alors constitué de la superposition du condensat dans le mode (légèrement déformé)  $\bar{u}_0$  et des fluctuations de modes incohérents  $a_{m \neq 0}$ , qui peuvent être écrits en terme de  $\tilde{a}_m(z) = a_m(z) e^{i\bar{\beta}_0 z}$  :

$$\partial_z \tilde{a}_m = -i\bar{\beta}_m \tilde{a}_m + i\gamma n_0 \sum_{p \neq 0} s_{mp} (2\tilde{a}_p + \tilde{a}_p^*). \quad (3.35)$$

L'analyse de la stabilité du système est réalisée en calculant les valeurs propres de la matrice, qui révèle que les valeurs propres sont purement imaginaires pour  $\epsilon \ll 1$ , c-a-d, le condensat est stable. Cette conclusion est confirmée par la remarque suivante. On note d'abord que pour  $m_x, m_y \gg 1$ , nous avons  $s_{m0} \simeq 1/[\sqrt{\pi}(m_x m_y)^{1/4} 2^{(m_x + m_y)/2}]$ , et  $s_{mm} \simeq 4/[\pi(m_x m_y)^{1/2}]$ , de sorte que  $s_{m0}$  présente une décroissance rapide vers 0 comparé à  $s_{mm}$ . Donc en supposant  $s_{mm} \gg s_{mp}$  ( $p \neq m$ ), les valeurs propres sont obtenues sous forme analytique avec la relation de dispersion de Bogoliubov

$$\bar{\beta}_m^B = \sqrt{(\bar{\beta}_m - 3\gamma n_0 s_{mm})(\bar{\beta}_m - \gamma n_0 s_{mm})}. \quad (3.36)$$

En considérant le régime faiblement non linéaire de l'expérience  $\epsilon = \gamma N / \beta_0 < 10^{-3}$ ,  $\bar{\beta}_m^B$  est réel et  $\bar{\beta}_m^B \simeq \bar{\beta}_m \simeq \beta_m - \beta_0$ , c-a-d, la relation de dispersion de Bogoliubov de  $a_m(z)$  en présence du condensat ( $\sqrt{n_0} \gg |a_m|$ ) est bien approximée par l'expression linéaire  $\beta_m^B \simeq \beta_m$ . En d'autres termes, la renormalisation non linéaire de Bogoliubov de la relation de dispersion linéaire est négligeable. Notons enfin qu'une analyse des simulations de l'équation NLS révèle que même le mode fortement condensé  $p = 0$  évolue dans le régime faiblement non linéaire [22], ce qui confirme la validité de l'équation cinétique dans le régime où le mode fondamental est fortement peuplé.



## Chapitre 4

# Formation de solitons «cachés» dans des structures gravitationnelles incohérentes

*Comme discuté dans les précédents chapitres avec l'exemple de condensation d'ondes classiques, l'évolution d'un système turbulent peut être caractérisée par la formation d'une structure cohérente. La génération spontanée d'un soliton peut être également interprétée comme un effet de «condensation» d'ondes dans le sens où il se forme une structure cohérente à grande échelle qui reste immergée dans une mer turbulente aux petites échelles. Ce phénomène a été très étudié en présence d'interactions à courte portée où l'effet de thermalisation peut avoir lieu efficacement. Dans ce Chapitre nous étudions ce problème en présence d'interactions (gravitationnelles) à longue portée, lesquelles ralentissent de façon significative l'effet de thermalisation. Nous considérons ce problème dans le cadre de l'équation de Schrödinger-Poisson (ou Newton-Schrödinger) qui a également fait l'objet de différentes études expérimentales en optique. Nous mettons en évidence un nouveau régime qui se caractérise par la formation de solitons «cachés» dans le sens où ils sont entièrement immergés dans les fluctuations environnantes du champ incohérent (l'amplitude des solitons est du même ordre que celle des fluctuations incohérentes, et leur largeur est plus importante que la longueur de cohérence de ces fluctuations). Ces solitons peuvent donc être difficilement identifiés dans l'évolution spatio-temporelle du champ, alors que leur existence peut être clairement dévoilée dans l'espace des phases (spectrogramme optique). Sur la base d'un formalisme de Vlasov de turbulence d'ondes, nous montrons que les solitons sont piégés et stabilisés par les fluctuations incohérentes environnantes. De cette façon nous avons identifié numériquement et décrit théoriquement des solitons binaires qui orbitent l'un autour de l'autre dans l'espace des phases.*

## Sommaire

---

|   |   |     |
|---|---|-----|
| 4.1   | Introduction . . . . .  | 71  |
| 4.2   | Equation de Newton-Schrödinger . . . . .                        | 73  |
| 4.3   | Mise en évidence du soliton dans l'espace des phases . . . . .  | 75  |
| 4.4   | Formalisme couplé cohérent-incohérent . . . . .                 | 82  |
| 4.5   | Soliton piégé par la structure incohérente localisée . . . . .  | 85  |
| 4.6   | Stabilisation du soliton par la structure incohérente . . . . . | 92  |
| 4.7   | Conclusion et perspectives . . . . .                            | 94  |
| Appendice A : Simulation de Newton-Schrödinger dans une boîte<br>finie . . . . .                                  |   | 101 |
| Appendice B : Transformation d'échelle pour les équations cou-<br>plées Newton-Schrödinger et WT-Vlasov . . . . . |   | 101 |
| Appendice C : Soliton binaire, dynamique 3D . . . . .   |   | 104 |
| Appendice D : Le théorème du viriel pour l'équation WT-Vlasov<br>en dimension spatiale $d$ . . . . .              |   | 108 |
| Appendice E : La structure incohérente pour $d = 1$ et $d = 3$ . . . . .  |   | 109 |

---

## 4.1 Introduction

La compréhension des mécanismes responsables de processus d’auto-organisations dans les systèmes conservatifs (Hamiltonien) est un problème difficile qui a généré beaucoup d’intérêt. Un progrès remarquable a été accompli quand Zakharov et ses collaborateurs ont identifié un processus de «turbulence de solitons» dans l’équation NLS non-intégrable focalisante [35, 135]. En partant d’une condition initiale homogène, l’onde développe l’instabilité modulationnelle qui donne lieu à la génération d’un train de solitons. En raison de la nature non-intégrable du système, les solitons interagissent de façon inélastique, c-a-d, lors d’une collision on observe un transfert de masse du petit soliton vers le grand. De cette façon, le système relaxe irréversiblement vers un état d’équilibre dans lequel un soliton de grande amplitude reste immergé dans des fluctuations de faible amplitude [37, 38, 136, 137]. Le soliton joue donc le rôle d’un «attracteur statistique» pour le système Hamiltonien. Il est important de souligner que la solution soliton réalise le minimum de l’énergie (Hamiltonien) : Le système relaxe donc vers l’état d’énergie minimum, ce qui permet aux fluctuations de faible amplitude d’emmagasiner le maximum d’énergie cinétique [37, 38, 136]. De ce point de vue, ce processus d’auto-organisation a une origine thermodynamique : Il est thermodynamiquement avantageux pour le système de générer un soliton, parce que ceci lui permet d’augmenter la quantité de désordre («entropie») sous forme de fluctuations aux petites échelles.

Ce scénario devient plus complexe lorsque le système présente des interactions à longue portée, c’est-à-dire lorsque le potentiel non linéaire non local décroît algébriquement dans l’espace. Dans ce cas, le processus de thermalisation ralentit de façon dramatique et une compréhension détaillée de la dynamique de thermalisation reste encore un problème ouvert [48, 49]. À cet égard, l’équation de Newton-Schrödinger (NS) apparaît comme un cadre théorique naturel pour étudier un système d’ondes avec des interactions à longue portée. L’équation de NS a été proposée dans le but d’étudier l’effondrement de la fonction d’onde quantique en présence d’un potentiel gravitationnel Newtonien [138, 139]. L’équation de NS peut également être obtenue comme limite non relativiste de l’équation auto-gravitante de Klein-Gordon [140, 141], et décrit ainsi le couplage des champs gravitationnels classiques aux états de particules quantiques de masses non nulles. Dans ce sens, des solutions solitons de l’équation de NS [142] ont été utilisées dans le passé afin d’introduire le concept d’étoile de Bosons [143], bien qu’aucune application astrophysique de ces objets ne fut connue à l’époque. Plus récemment, l’équation de NS a été utilisée pour développer une formulation quantique de la matière noire qui résoudrait la «crise de la matière noire froide», c’est-à-dire la formation d’une singularité dans la description classique de la matière noire [144–155]. En effet, des simulations numériques 3D récentes de l’équation de NS réalisées dans le cadre cosmologique révèlent que, en règle générale, le système s’auto-organise en un noyau soliton de grande amplitude, lequel est entouré d’une structure incohérente qui est consistante avec la description classique [156–163]. En d’autres termes, le potentiel quantique répulsif (issu du principe d’incertitude) inhérent à l’équation de NS conduit à la formation d’un noyau solitonique qui résout le problème de singularité dans la description classique de la «matière noire froide». Ce modèle Bosonique de la matière noire a reçu différents noms dans la littérature, tels que «wave-dark matter» ou «fuzzy-dark matter», ou «ultralight dark matter», ou «BEC-dark matter».

Notre objectif dans ce chapitre est de mettre en évidence un nouveau régime des systèmes d’ondes à longue portée. Nous montrons qu’en augmentant la non-linéarité, l’équation de NS exhibe un régime incohérent spécifique contenant des structures solitons «cachés». Plus précisément, à partir d’une condition initiale homogène, l’onde exhibe l’instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir (ou instabilité gravitationnelle de Jeans) puis, après un transitoire, elle s’auto-organise en une structure localisée incohérente caractérisée par un spectre à support compact. Une telle structure incohérente contient des solitons «cachés» au sens suivant : (i) L’amplitude du soliton est du même ordre que les fluctuations de la structure incohérente environnante ; (ii) La largeur du soliton est beaucoup plus grande que la longueur de corrélation des fluctuations de la structure incohérente, mais beaucoup plus petite que le rayon de la structure incohérente, voir équation (4.15). Par conséquent, le soliton peut être difficilement identifié dans les domaines spatiaux ou spectraux habituels, alors que son existence est clairement dévoilée dans la représentation de l’espace des phases (ou spectrogramme). Notre approche théorique fournit une description couplée de la composante cohérente (le soliton régi par une équation de NS effective) et de la composante incohérente (la structure incohérente régie par une équation cinétique de turbulence d’ondes formellement analogue à une équation de Vlasov-Poisson). Un résultat de ce travail est que le soliton caché est stabilisé par la structure incohérente, dans le sens où c’est la structure incohérente qui soutient et piège le soliton. En conséquence de ce mécanisme de piégeage, le soliton présente un profil de densité Gaussien, une caractéristique qui diffère de la solution soliton (ajustée) algébrique de l’équation de NS [156–159]. Alors que nous développons la théorie dans le cas général à  $d$ -dimensions spatiales, nous concentrons notre étude numérique à une seule dimension spatiale car pour  $d = 1$  la quantité de non-linéarité et la séparation des échelles spatiales peuvent être augmentées de manière significative par rapport aux simulations tri-dimensionnelles. De plus, bien que nous considérons spécifiquement le cas de l’équation de NS gravitationnelle, nos résultats sont généraux pour les systèmes d’ondes à longue portée caractérisés par une décroissance algébrique du potentiel d’interaction.

Nous pensons que ce travail possède différentes ramifications possibles pour les recherches futures.

(i) Premièrement, il devrait stimuler des expériences. Il y a un regain d’intérêt actuel dans le développement de phénomènes analogues à la gravité dans des expériences d’optique en laboratoire, c’est-à-dire l’étude des effets gravitationnels à l’aide de systèmes artificiels qui recréent certains aspects spécifiques du système gravitationnel complet [164]. La gravité étant par nature non linéaire et non locale, les états de solitons cachés prédits dans ce travail pourraient être observés et étudiés dans des expériences d’optique non linéaire impliquant des non-linéarités fortement non locales [59, 60].

(ii) Ce travail devrait stimuler la réalisation de simulations numériques à trois dimensions pour tester l’existence de ce régime de solitons «cachés» à 3 dimensions. Selon le modèle de matière noire Bosonique basé sur l’équation de NS, des états solitons peuvent se former, bien que leur existence soit cachée dans des structures incohérentes. Cela devrait également aider à comprendre la correspondance de l’équation de NS vers Vlasov-Poisson dans la limite  $\hbar/m \rightarrow 0$ , comme discuté en détail dans un travail récent [160]. Selon cette correspondance quantique-classique, les états solitons identifiés dans [156–159] devraient disparaître dans la limite asymptotique purement classique  $\hbar/m \rightarrow 0$  [160]. Le régime de solitons «cachés» peut alors être considéré comme le régime ultime précédant la limite

classique - le soliton «caché» apparaît comme une correction quantique résiduelle de la description purement classique fournie par l'équation de Vlasov-Poisson.

(iii) Notre théorie basée sur des formalismes couplés cohérents-incohérents peut ouvrir la voie au développement d'une approche plus générale pour étudier les régimes de turbulence forte [14, 15, 34, 38, 165], dans lesquels une composante cohérente de type soliton (régie par une équation d'onde) interagit avec la composante turbulente incohérente (régie par une équation cinétique).

## 4.2 Equation de Newton-Schrödinger

### 4.2.1 Modèle à $d$ -dimensions spatiales

Ce travail est à l'origine motivé par l'étude de l'équation de NS, qui s'écrit généralement sous la forme suivante

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + mV\psi, \quad (4.1)$$

$$\nabla^2V = 4\pi G|\psi|^2. \quad (4.2)$$

Cette équation décrit l'évolution 3D d'un gaz de Bosons auto-gravitant non relativiste avec pour fonction d'onde  $\psi(x, t)$  et densité  $\rho(x, t) = |\psi|^2(x, t)$ . Le gaz de Bosons évolue sous l'influence de son potentiel de gravitation auto-induit  $V(x, t)$  satisfaisant l'équation de Newton (ou de Poisson) (4.2), où  $m$  est la masse des bosons et  $G$  la constante gravitationnelle de Newton.

Dans ce qui suit, nous considérons la forme générale de l'équation de NS à  $d$  dimensions spatiales :

$$i\partial_t\psi = -\frac{\alpha}{2}\nabla^2\psi + V\psi, \quad (4.3)$$

$$\nabla^2V = \gamma\eta_d|\psi|^2, \quad (4.4)$$

avec le coefficient de dispersion  $\alpha > 0$ , le coefficient non linéaire  $\gamma > 0$ , et avec  $\eta_1 = 2$ ,  $\eta_2 = 2\pi$ ,  $\eta_3 = 4\pi$ . En conséquence, nous avons :

$$V = -\gamma U_d * |\psi|^2 = -\gamma \int U_d(\mathbf{x} - \mathbf{y})|\psi(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}, \quad (4.5)$$

où le potentiel gravitationnel à  $d$ -dimensions s'écrit

$$U_1(x) = -|x|, \quad U_2(\mathbf{x}) = -\log(|\mathbf{x}|), \quad U_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}. \quad (4.6)$$

L'équation de NS conserve la «masse» totale

$$\mathcal{M} = \int |\psi|^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (4.7)$$

Notons à cet égard que l'ajout d'une constante  $c_d$  à  $U_d$  ne multiplierait  $\psi$  que par  $\exp(i\gamma c_d \mathcal{M} t)$ , ce qui ne modifie pas la dynamique. Une autre quantité importante conservée par l'équation de NS est l'Hamiltonien  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_l + \mathcal{H}_{nl}$ , avec la contribution linéaire

$$\mathcal{H}_l(t) = \frac{\alpha}{2} \int |\nabla\psi|^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (4.8)$$

et la contribution non linéaire

$$\mathcal{H}_{nl}(t) = \frac{1}{2} \int V(\mathbf{x}, t) |\psi|^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (4.9)$$

On remarque également que l'équation de NS  $d$ -dimensionnelle (4.3-4.5) est invariante (à un facteur de phase global) sous la transformation d'échelle

$$\{t, \mathbf{x}, U_d, \psi\} \rightarrow \{\mu^{-2}t, \mu^{-1}\mathbf{x}, \mu^{d-2}U_d, \mu^2\psi\}. \quad (4.10)$$

### 4.2.2 «Healing length»

La «healing length» représente l'échelle spatiale caractéristique pour laquelle les effets linéaires et non linéaires sont du même ordre (c'est par exemple la taille typique d'un soliton). Afin de définir la «healing length», on considère une structure incohérente caractérisée par une densité  $\bar{\rho}$  typique de  $|\psi|^2$  et  $\ell$  sa taille typique, c'est-à-dire son rayon de variation caractéristique. En conséquence, l'amplitude typique du potentiel gravitationnel  $V$  est  $\gamma\bar{\rho}\ell^2$  et son rayon de variation typique est  $\ell$ . L'échelle de temps caractéristique de l'évolution non linéaire est donnée par  $\tau_{nl} = 1/(\gamma\bar{\rho}\ell^2)$ . D'autre part, l'échelle de temps caractéristique due aux effets de dispersion linéaire est  $\tau_l = \lambda_c^2/(\alpha/2)$ , lorsque la longueur de corrélation du champ  $\psi$  est  $\lambda_c$ . On peut alors définir un analogue de la healing length  $\xi$  représentant l'échelle spatiale telle que les effets linéaires et non linéaires sont du même ordre

$$\xi = \frac{1}{\ell} \left( \frac{\alpha}{2\gamma\bar{\rho}} \right)^{1/2}. \quad (4.11)$$

Notons que  $\tau_l/\tau_{nl} = \lambda_c^2/\xi^2$ . En conséquence, dans le régime faiblement non linéaire  $\lambda_c \ll \xi$ , également appelé régime cinétique, la théorie cinétique de turbulence d'ondes récemment développée pour l'équation de NS en référence [166] peut être utilisée. Ce n'est pas ce régime que nous aborderons dans ce Chapitre.

Il est intéressant de noter que l'équation de NS ne possède pas de paramètres libres. Pour observer cela, considérons le changement de variable suivant dans les équations (4.3-4.5) :  $\mathbf{x} = \Lambda\tilde{\mathbf{x}}$ ,  $t = \tau\tilde{t}$  et  $\psi(t, \mathbf{x}) = \sqrt{\bar{\rho}}\tilde{\psi}(t/\tau, \mathbf{x}/\Lambda)$ ,

$$\Lambda = \left( \frac{\alpha}{2\gamma\bar{\rho}} \right)^{1/4} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2\Lambda^2}{\alpha}. \quad (4.12)$$

Le champ normalisé  $\tilde{\psi}$  satisfait alors l'équation de NS sans dimension et normalisée :

$$i\partial_{\tilde{t}}\tilde{\psi} = -\nabla_{\tilde{d}}^2\tilde{\psi} - \tilde{\psi} \int U_d(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) |\tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{y}})|^2 d\tilde{\mathbf{y}}. \quad (4.13)$$

À  $d$ -dimensions spatiales, la healing length normalisée  $\tilde{\xi} = \xi/\Lambda$  s'écrit alors

$$\tilde{\xi} = \frac{\Lambda}{\ell}. \quad (4.14)$$

Notons que ce paramètre sans dimension est invariant sous la transformation d'échelle (4.10) de l'équation de NS  $d$ -dimensionnelle (4.3-4.5).

Notons aussi que le taux de croissance de l'instabilité modulationnelle est donné par  $\sigma_{\text{inst}} = \sqrt{\alpha\gamma\eta_d\bar{\rho} - \alpha^2k^4/4}$ , de sorte que les modes  $k \geq k_J = 2\pi/\Lambda_J$  avec  $\Lambda_J = \sqrt{2}\pi(\alpha/(\gamma\eta_d\bar{\rho}))^{1/4} \simeq \Lambda$  sont stables. La longueur de Jeans  $\Lambda_J$  joue donc un rôle important, c'est la longueur de coupure spatiale en dessous de laquelle une onde homogène est stable.

## 4.3 Mise en évidence du soliton dans l'espace des phases

### 4.3.1 Séparation d'échelles spatiales

Il est important de noter que le paramètre  $\tilde{\xi}$  défini par l'équation (4.14) est directement lié au paramètre  $\Xi$  qui régit la correspondance quantique-classique (c'est-à-dire la correspondance entre l'équation NS et l'équation Vlasov-Poisson) dans la limite  $\hbar/m \rightarrow 0$  : Par l'équation (4.41) dans [160] et par l'équation (4.16) en-dessous, nous avons  $\Xi \sim \tilde{\xi}^4$  [158, 159]. En conséquence, pour des valeurs modérées de  $\Xi \sim 1$ , le terme de dispersion linéaire dans l'équation NS joue un rôle fondamental et le système présente une dynamique cohérente (c'est-à-dire sensible à la phase) qui est essentiellement dominée par des structures de type soliton. En diminuant le paramètre  $\tilde{\xi} \ll 1$  (ou  $\Xi \ll 1$ ), les solitons devraient disparaître progressivement. Le système entre dans un régime collectif, caractérisé par la génération d'une structure incohérente à grande échelle [160].

Le résultat principal de ce Chapitre est qu'une telle structure incohérente peut encore contenir des solitons «cachés». Plus précisément, dans le régime  $\tilde{\xi} \ll 1$  (ou  $\Xi \ll 1$ ), une structure localisée incohérente d'amplitude  $\bar{\rho}$ , de rayon typique  $\ell$  et caractérisée par une longueur de corrélation  $\lambda_c \sim \xi$  peut être observée. Nous montrerons qu'une telle structure permet de stabiliser un soliton d'amplitude  $\bar{\rho}$  et de rayon typique  $R_S$ , où  $R_S$  satisfait

$$\lambda_c \sim \xi \ll R_S \ll \ell. \quad (4.15)$$

Plus précisément, l'analyse révèle que  $R_S$  est la moyenne géométrique de  $\ell$  et  $\xi$ ,  $R_S \sim \sqrt{\xi\ell}$ .

Comme discuté dans l'introduction, nous abordons plus spécifiquement le problème d'une condition initiale homogène, qui développe l'instabilité modulationnelle. Notons que la condition initiale homogène est pertinente en cosmologie où la formation de structures à grande échelle telles que les galaxies et les amas de galaxies se produisent via des instabilités gravitationnelles issues de petites fluctuations [163]. On considère l'instabilité modulationnelle par des simulations numériques de l'équation de NS dans une boîte finie de taille  $L$  avec des conditions aux limites périodiques et une densité initiale uniforme. On note à ce propos que le paramètre  $\tilde{\xi}$  dans (4.14) ne dépend pas de la dimension spatiale  $d$  (notons que dans l'ensemble de ce Chapitre nous calculons le paramètre  $\tilde{\xi}$  avec une taille typique de la structure incohérente  $\ell \simeq L/2$ ). Puisque les simulations numériques en trois dimensions spatiales ( $d = 3$ ) sont extrêmement couteuses en temps de calcul, il s'avère pratique d'étudier le régime incohérent collectif avec  $\tilde{\xi} \ll 1$  en dimensions inférieures,  $d = 2$  ou  $d = 1$ . En d'autres termes, en dimensions inférieures, il est possible de réaliser des simulations numériques avec une séparation significative des trois échelles

$\lambda_c \ll R_S \ll L$  (voir 4.15), qui est le régime dans lequel des solitons cachés peuvent être observés. En effet, nous considérons dans les simulations des valeurs de  $\Xi \sim 5.10^{-8}$ , valeurs qui apparaissent inaccessibles pour  $d = 3$ , où typiquement  $\Xi > 10^{-4}$  [160]. En d'autres termes, le nouveau régime de solitons «cachés» (4.14) ne semble pas accessible avec les simulations 3D actuellement disponibles.

### 4.3.2 Structures cachées cohérentes de type soliton

Dans ce qui suit, nous reportons la théorie dans le cas général à  $d$ -dimensions et nous la comparons aux simulations à une dimension ( $d = 1$ ), voir Appendice A. Notons cependant que des simulations à deux dimensions spatiales seront présentées ultérieurement pour des valeurs modérément petites de  $\tilde{\xi}$ . La condition initiale est une onde homogène  $\psi(x, t = 0) = \sqrt{\bar{\rho}}$  avec un faible bruit pour initier le processus d'instabilité modulationnelle. Comme largement discuté dans la littérature [156–163], chaque modulation périodique de l'instabilité subit un effondrement gravitationnel, qui est régularisé par la formation d'une collection de structures incohérentes qui tendent lentement à fusionner dans l'évolution à long terme en raison de l'interaction gravitationnelle à longue portée.

Nous reportons dans les Figures 4.1-4.2 les résultats des simulations de l'équation de NS pour deux valeurs différentes de healing length normalisée  $\tilde{\xi} = 1$  et  $\tilde{\xi} = 3.5 \times 10^{-3}$ . Après le développement de l'instabilité modulationnelle, le système présente deux régimes radicalement différents. Comme discuté dans la sous-section précédente, pour des valeurs relativement «grandes» de  $\tilde{\xi} \sim 1$ , le système présente un régime cohérent sensible à la phase qui est essentiellement dominé par des structures de type soliton, voir Figure 4.1. Dans ce régime  $\tilde{\xi} \sim 1$ , la largeur du soliton a une taille comparable à la longueur de corrélation des fluctuations de la structure incohérente environnante,  $R_S \sim \lambda_c$ . Notons que ce régime présente des similitudes avec celui étudié au moyen de simulations numériques tridimensionnelles dans le contexte de «fuzzy dark matter» [156–159]. Cependant, dans le cas unidimensionnel considéré ici, les structures de type soliton n'apparaissent pas aussi robustes qu'en dimension  $d = 3$ , dans le sens où, une fois formés, les solitons ne présentent pas de comportement persistant.

En diminuant le paramètre  $\tilde{\xi}$ , le système entre dans un nouveau régime qui sera étudié tout au long de ce Chapitre. Le régime est illustré en Figure 4.2 qui montre l'émergence d'une structure incohérente de grande échelle qui est localisée dans l'espace. Notons que la Figure 4.2 (a) montre l'évolution à long terme où les structures incohérentes ont fusionné en une seule structure.

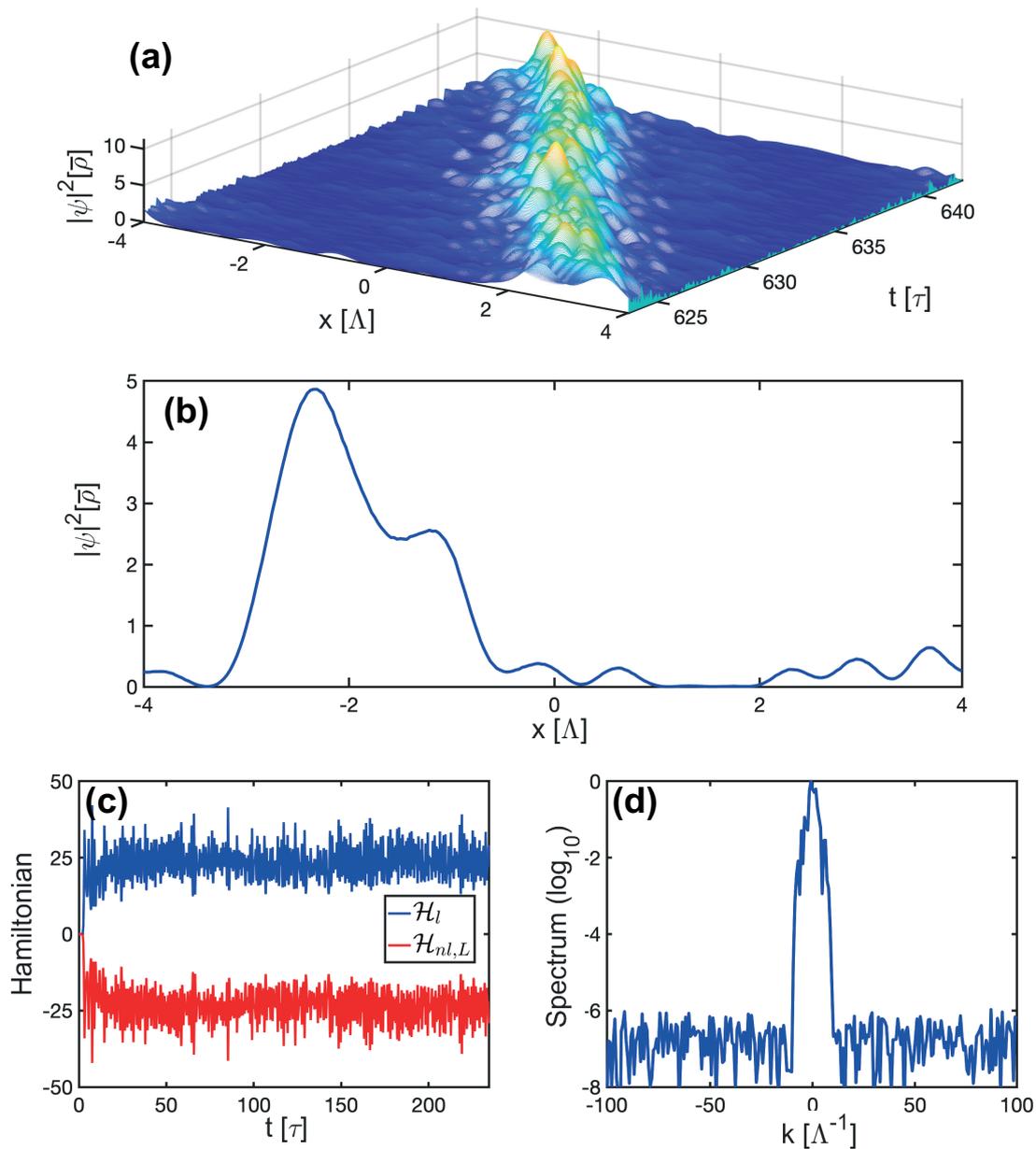


FIGURE 4.1 – Régime cohérent de type soliton ( $d = 1$ ) : Simulation numérique de l'équation de NS (4.3-4.5) dans le domaine spatial 1D  $[-L/2, L/2]$  avec conditions aux limites périodiques démarrant d'une condition initiale homogène d'intensité  $\bar{\rho}$ . Ici  $L = 8\Lambda$  de sorte que  $\xi = 0.25$ . L'onde initiale développe l'instabilité modulationnelle et après un transitoire, le système exhibe une dynamique cohérente de type soliton en présence de fluctuations environnantes. Évolution spatio-temporelle de la densité  $|\psi|^2(x, t)$  (a), et profil spatial correspondant à  $t = 64\tau$  (b). (c) Évolutions de l'énergie linéaire  $\mathcal{H}_l$  et non-linéaire  $\mathcal{H}_{nl,L}$ . (d) Spectre de l'onde  $|\tilde{\psi}|^2(k)$  à  $t = 64\tau$ , où  $\tilde{\psi}$  est la transformée de Fourier de  $\psi(x)$ .

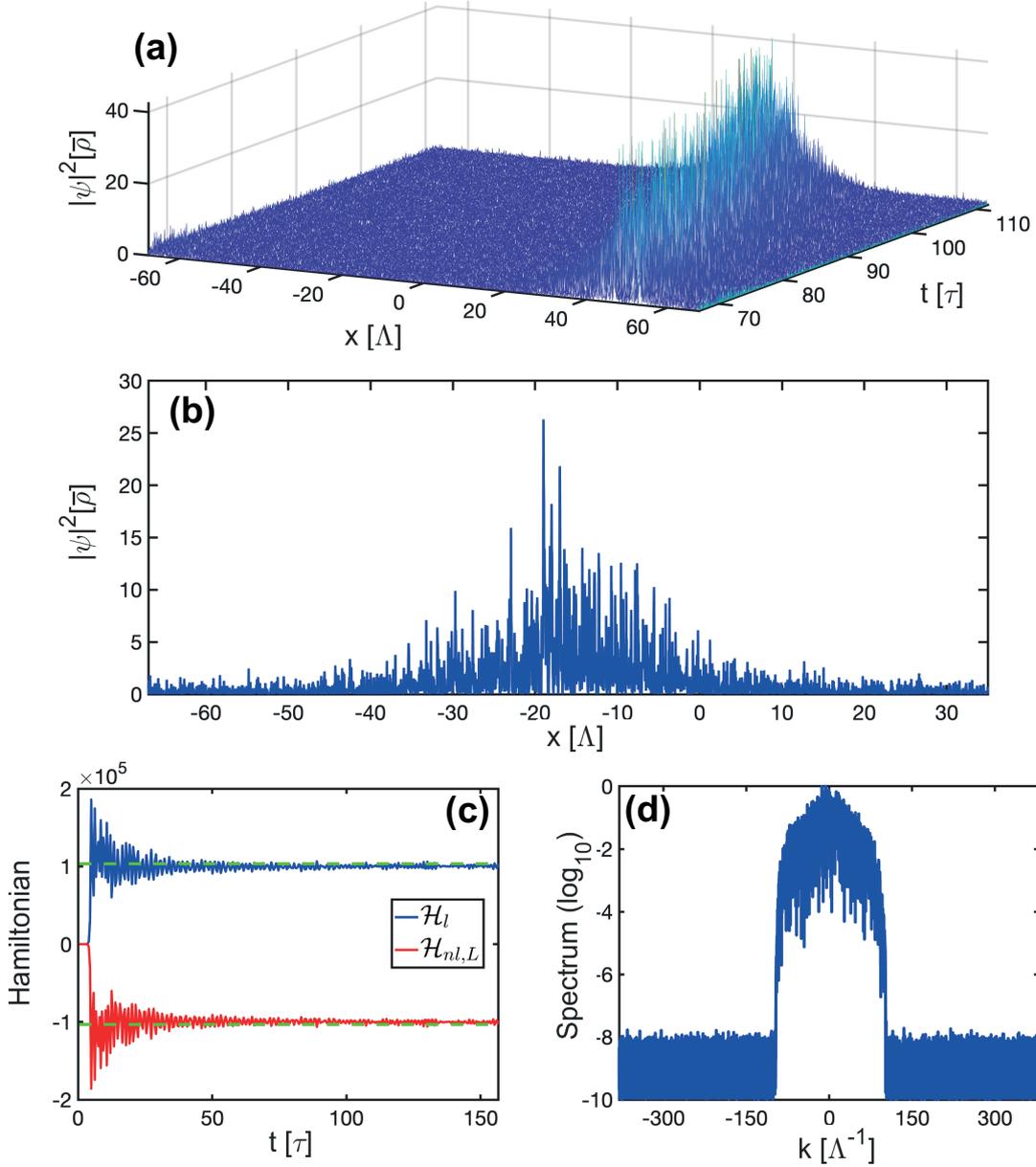


FIGURE 4.2 – **Structure incohérente avec soliton caché** : Simulation numérique de l'équation de NS (4.3-4.5) dans le domaine spatial 1D  $[-L/2, L/2]$  avec conditions aux limites périodiques démarrant d'une condition initiale homogène d'intensité  $\bar{\rho}$ . Ici  $L = 135\Lambda$  ( $\xi = 1.5 \times 10^{-2}$ ). L'onde homogène initiale subit l'instabilité gravitationnelle et après un transitoire, le système s'auto-organise en une structure localisée incohérente à grande échelle qui contient des solitons cachés. Évolution spatio-temporelle de la densité  $|\psi|^2(x, t)$  (a), et profil spatial correspondant à  $t = 143\tau$  (b). (c) Évolutions de l'énergie linéaire  $\mathcal{H}_l$  et non-linéaire  $\mathcal{H}_{nl,L}$ . Les lignes hachurées vertes indiquent les valeurs théoriques de  $\mathcal{H}_l$  et non-linéaire  $\mathcal{H}_{nl,L}$  prédites par la théorie une fois qu'un état quasi-stationnaire a été atteint, voir l'équation (4.51). (d) Spectre de l'onde  $|\tilde{\psi}|^2(k)$  à  $t = 143\tau$ , où  $\tilde{\psi}(k)$  est la transformée de Fourier de  $\psi(x)$  - notons que le spectre présente un support compact. La structure localisée incohérente caractérisée dans cette figure contient des solitons cachés, voir Figure 4.3.

La différence fondamentale entre la structure incohérente en Figure 4.2 par rapport à la Figure 4.1 est que pour de petites valeurs de  $\tilde{\xi}$ , la structure incohérente ne présente pas de solitons cohérents apparents. Cette observation semble consistante avec la correspondance selon laquelle l'équation de NS (4.1-4.2) devrait tendre vers l'équation classique Vlasov-Poisson dans la limite  $\hbar/m \rightarrow 0$ , comme discuté en détail en référence [160] pour  $d = 3$ . En effet, en considérant l'équation de NS (4.1-4.2) où  $\alpha = \hbar/m$  et  $\gamma = mG/\hbar$ , le paramètre de healing length normalisé (4.14) devient

$$\tilde{\xi} = \frac{(\hbar/m)^{1/2}}{\ell(2\bar{\rho}G)^{1/4}}. \quad (4.16)$$

Comme anticipé ci-dessus,  $\tilde{\xi}$  est directement lié à un paramètre qui contrôle la correspondance entre l'équation NS et l'équation Vlasov-Poisson, à savoir  $\Xi \sim \tilde{\xi}^4$  (équation (4.41), [160]) (en effet nous avons  $|\mathcal{H}_{nl}| \sim GM/\ell$  et  $\bar{\rho} \sim \mathcal{M}/\ell^3$ ). En conséquence, la limite  $\tilde{\xi} \rightarrow 0$  correspond à l'équation classique de Vlasov-Poisson. Etant donnée la nature cinétique de cette équations de Vlasov-Poisson, celle-ci n'est pas en mesure de décrire les structures cohérentes de type solitons. Le résultat inattendu révélé par les simulations est que la structure incohérente (SI) en Figure 4.2 n'est pas purement incohérente, mais contient en fait des solitons cachés. Une telle structure soliton est dévoilée par une analyse dans l'espace des phases du champ  $\psi(x)$  fournie par la représentation de Husimi, qui est en substance une version lissée de la transformée de Wigner [160] :

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \int \psi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}/2, t) \psi^*(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}/2, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (4.17)$$

La transformée de Wigner n'est pas statistiquement stable (son écart-type est supérieur à sa moyenne statistique). Il est nécessaire de la lisser par rapport à  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{x}$  pour obtenir une quantité statistiquement stable. Nous considérons la transformée de Wigner lissée, ou fonction de Husimi

$$W_\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi^2} \iint W(\mathbf{k}', \mathbf{x}', t) \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{\sigma^2} - \sigma^2|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2\right) d\mathbf{k}' d\mathbf{x}', \quad (4.18)$$

qui peut aussi être écrite comme

$$W_\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \left| \int \psi(\boldsymbol{\xi}) \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right|^2. \quad (4.19)$$

Cette quantité est statistiquement stable pour tout  $\sigma > 0$ . Quand le champ est purement incohérent l'écart-type de  $W_\sigma$  est égal à sa moyenne. Un lissage comparable en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{k}$  peut être obtenu en choisissant le compromis  $\sigma = \sqrt{\Delta x/\Delta k}$  pour un rayon de la distribution  $\Delta k$  en  $\mathbf{k}$  et  $\Delta x$  en  $\mathbf{x}$ . La transformée de Husimi correspondante à la simulation est reportée en Figure 4.3, où nous avons  $\Delta k \sim 66\Lambda^{-1}$  et  $\Delta x \sim 36\Lambda$ , et l'on a considéré  $\sigma = 0.74\Lambda$ . Le soliton est caractérisé dans l'espace des phases par un spot de haute intensité immergé dans une mer de fluctuations à petite échelle représentant la structure incohérente. On peut remarquer en Figure 4.3 que le nombre de solitons diminue au cours de l'évolution temporelle, conduisant finalement à un seul soliton dans l'évolution à long terme du système.

Le point important à noter est que le soliton possède une largeur spectrale  $\Delta k_S$  beaucoup

plus petite que la largeur spectrale de la structure incohérente,  $\Delta k_{SI} \gg \Delta k_S$ , ce qui signifie que la largeur du soliton,  $R_S \sim 2\pi/\Delta k_S$  est beaucoup plus grande que la longueur de corrélation  $\lambda_c \sim 2\pi/\Delta k_{SI}$  de la structure incohérente localisée. En notant par ailleurs que le rayon du soliton est bien plus petit que celui de la structure incohérente, on observe en Figure 4.4 la séparation des échelles spatiales qui était anticipée en équation (4.15), à savoir

$$\lambda_c \sim 2\pi/\Delta k_{SI} \ll R_S \simeq 2\pi/\Delta k_S \ll \ell \sim L/2. \quad (4.20)$$

De plus, nous verrons que le soliton possède une densité  $|A|^2$  qui est du même ordre de grandeur que les fluctuations de la densité de la structure incohérente  $|\phi|^2$ , qui se traduit par

$$|A|^2 \sim |\phi|^2. \quad (4.21)$$

Du fait de ces propriétés, le soliton peut difficilement être identifié dans la représentation spatio-temporelle habituelle.

### 4.3.3 Piégeage de solitons par la structure incohérente

Un résultat remarquable révélé par les simulations numériques est que les solitons cachés sont piégés par la structure incohérente, comme le montre l'évolution des solitons dans l'espace des phases en Figure 4.3. Cela indique que la structure incohérente joue le rôle d'un potentiel effectif de piégeage pour le soliton, une caractéristique qui sera confirmée par la théorie présentée en section 4.4. Cette interprétation est corroborée par la dynamique de l'espace des phases à un stade antérieur de l'évolution, qui montre que plusieurs solitons sont piégés par la structure incohérente à grande échelle, voir Figure 4.3 de  $t = 13\tau$  à  $t = 143\tau$ . Notons que ce régime est assez complexe du fait qu'il est régi par l'interaction des solitons entre eux - les solitons peuvent entrer en collision, parfois fusionner ou se détériorer via des interactions aléatoires. Deux solitons peuvent également orbiter l'un autour de l'autre dans l'espace des phases ce qui donne lieu à un mouvement binaire robuste, voir Figure 4.5. En règle générale, le nombre de solitons cachés a tendance à diminuer au cours de l'évolution du système, comme illustré en Figure 4.3. Cela conduit finalement à un seul soliton, qui présente un mouvement périodique ellipsoïdal dans l'espace des phases, comme cela sera discuté en détail à travers la Figure 4.6. Notons que la réduction du nombre de solitons ne peut être liée à un processus de fusion car la masse du soliton unique dans l'évolution à long terme  $t \simeq 206\tau$  est comparable aux masses des solitons individuels à un stade antérieur, par exemple  $t \simeq 13\tau$ .

Comme discuté ci-dessus à travers la Figure 4.1, dans le régime de type soliton  $\tilde{\xi} \sim 1$ , les solitons présentent une faible robustesse, dans le sens où leur interaction avec les fluctuations peut détériorer leur structure au cours de l'évolution du système. Ceci apparaît en contraste avec la dynamique des solitons cachés révélés en Figure 4.3 pour  $\tilde{\xi} \ll 1$ , où les solitons présentent une grande robustesse. Cela indique qu'en créant un potentiel de piégeage, la structure incohérente renforce la stabilité des solitons cachés, une caractéristique qui sera confirmée par l'analyse théorique et numérique ultérieure.

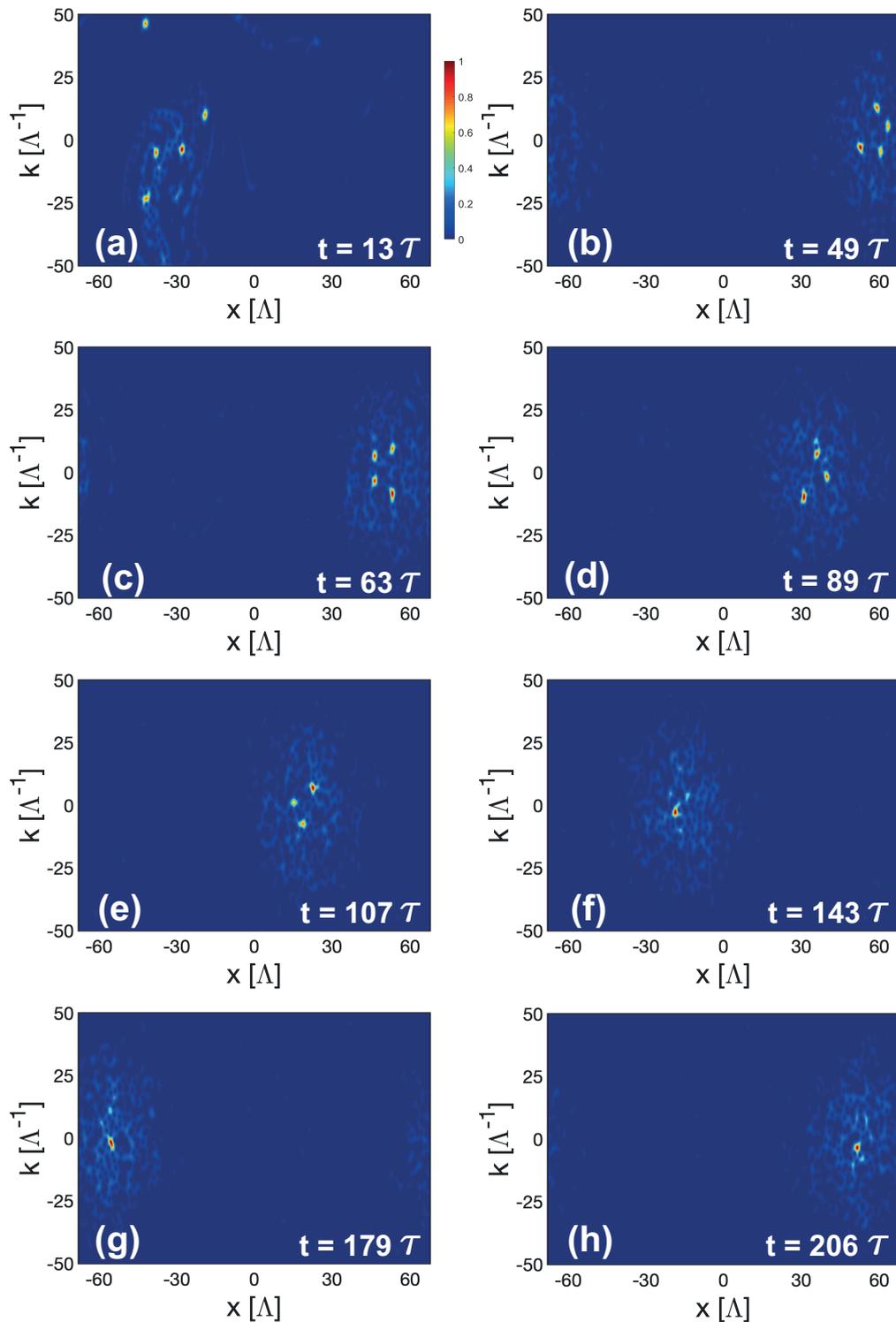


FIGURE 4.3 – **Solitons dévoilés dans l’espace des phases :** Analyse dans l’espace des phases (transformée de Husimi  $W_\sigma(k, x)$  du champ  $\psi(x)$ , voir équation (4.19)) de la simulation numérique rapportée en Figure 4.2. L’ensemble des solitons est caractérisé dans l’espace des phases par des spots de haute intensité immergés dans une mer de fluctuations à petite échelle en raison de la structure incohérente discutée en Figure 4.2. Au cours de l’évolution temporelle, le nombre de solitons diminue, conduisant finalement à un seul soliton à long terme. Tous les panels se réfèrent à la même échelle de couleur, voir (a).

### 4.3.4 Structure incohérente au-delà du régime cinétique faiblement non linéaire

Avant de discuter plus en détail du caractère caché du soliton, nous notons que la structure incohérente est caractérisée par un spectre qui présente un support compact, voir Figure 4.2(d). Ceci révèle l'existence d'une fréquence de coupure  $k_c$ , dont l'origine va être expliquée par les propriétés stationnaires auto-consistantes de la structure incohérente. Une telle forme spectrale à support compact est en contraste avec un *spectre en loi-puissance*  $n_k \sim 1/k^\nu$ , qui est une solution stationnaire de l'équation cinétique de turbulences d'ondes (collisionnelle) [166], que ce soit loin de l'équilibre où à l'équilibre thermodynamique pour  $\nu = 2$  (distribution de Rayleigh-Jeans), comme discuté en Chapitre 3. Ainsi la structure incohérente évoquée ici évolue dans un régime très éloigné de l'équilibre. Cependant, la structure incohérente est extrêmement robuste pour des temps d'interaction très importants comme illustré par l'évolution des énergies  $\mathcal{H}_l$  et  $\mathcal{H}_{nl,L}$  en Figure 4.2(c). Par conséquent, nous associons cet état incohérent collectif à un état de quasi-équilibre, en analogie avec les états quasi-stationnaires étudiés dans des systèmes d'interaction à longue portée [48, 49].

Il est également important de noter que la structure incohérente discutée dans ce chapitre évolue dans le *régime d'interaction fortement non linéaire*, c'est-à-dire que la structure incohérente est caractérisée par une longueur de corrélation du même ordre que la healing length,  $\lambda_c \sim \xi$  (ou  $\tau_l \sim \tau_{nl}$ ). En d'autres termes, les composantes de fréquence les plus élevées de la structure incohérente sont de l'ordre  $k_c \sim 1/\xi$  et n'évoluent donc pas dans le régime faiblement non linéaire (cinétique). Cela a été anticipé ci-dessus en équation (4.15), et sera confirmé par la théorie en équations (4.54-4.55) et les simulations, voir Figure 4.7. De plus, la structure incohérente est caractérisée par des fluctuations spatiales qui ne sont pas homogènes dans l'espace. Cela signifie que la description de la structure incohérente n'est pas capturée par une équation cinétique de turbulence d'ondes faiblement non linéaire [166]. Dans la section suivante, nous montrerons que la description appropriée de la structure incohérente est fournie par l'équation WT-Vlasov à longue portée.

## 4.4 Formalisme couplé cohérent-incohérent

### 4.4.1 Équation NS couplée à WT-Vlasov

Dans cette section, nous dérivons un formalisme qui décrit la dynamique couplée cohérente-incohérente régissant l'évolution de la structure incohérente et du soliton sous-jacent. La structure incohérente est décrite théoriquement dans le cadre général du formalisme de turbulence d'ondes [7, 50]. Comme discuté en [Introduction](#), il a été démontré que la théorie de turbulence d'ondes fournit une fermeture asymptotique naturelle de la hiérarchie des équations des moments pour un système d'ondes dispersives faiblement non linéaires [12, 14, 15, 34, 38]. Ici, la structure incohérente est caractérisée par des fluctuations qui ne sont pas homogènes dans l'espace, de sorte que, à l'ordre principal, la dynamique est dominée par une version longue portée de l'équation cinétique de WT-Vlasov [7, 50, 167, 168].

Notons que l'équation WT-Vlasov diffère de l'équation traditionnelle de Vlasov décrivant

les ondes aléatoires (comme les instabilités modulationnelles incohérentes, ou solitons incohérents) en optique [7, 53] hydrodynamique [10, 169] ou plasmas [47], alors que sa structure est analogue à celle décrivant des systèmes de particules à longue portée, par exemple gravitationnelles [48]. De plus, contrairement aux approches conventionnelles de turbulence faible [12, 38], l'équation WT-Vlasov à longue portée est valable au-delà du régime d'interaction faiblement non linéaire [50], comme le révèle une étude récente des ondes de choc incohérentes se développant dans le régime fortement non linéaire [167]. En effet, grâce à la nature longue portée de l'interaction, le système présente une propriété d'auto-moyennage de la réponse non linéaire,  $\int U_d(\mathbf{x} - \mathbf{y})|\psi(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \simeq \int U_d(\mathbf{x} - \mathbf{y})\langle |\psi(\mathbf{y})|^2 \rangle d\mathbf{y}$ . La substitution de cette propriété dans l'équation de NS conduit donc à une fermeture automatique de la hiérarchie des équations des moments. Plus précisément, en utilisant des arguments statistiques similaires à ceux en référence [170], on peut montrer que, du fait d'une réponse fortement non locale, la statistique de l'onde incohérente se révèle Gaussienne. Nous verrons dans ce qui suit que le formalisme WT-Vlasov fournit une description précise des structures incohérentes observées dans les simulations, qui évoluent dans le régime fortement non linéaire  $\lambda_c \sim \xi$  (voir équations (4.54-4.55) et Figure 4.7).

Afin de décrire la dynamique couplée cohérente-incohérente de la structure incohérente et du soliton sous-jacent, nous dérivons ici un système couplé d'équations de NS et WT-Vlasov à longue portée. En effet, le soliton se caractérise par une moyenne non nulle  $\langle \psi \rangle \neq 0$  de sorte qu'en opposition à la dérivation habituelle de l'équation de Vlasov, nous décomposons ici le champ en une composante cohérente  $A(\mathbf{x}, t)$  et une composante incohérente  $\phi(\mathbf{x}, t)$  de moyenne nulle ( $A = \langle A \rangle \neq 0, \langle \phi \rangle = 0$ ) :

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t) + \phi(\mathbf{x}, t). \quad (4.22)$$

Suivant la procédure usuelle [7], le spectre de la structure incohérente est défini comme  $n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \int B(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$ , où la fonction de corrélation

$$B(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \langle \phi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}/2, t) \phi^*(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}/2, t) \rangle, \quad (4.23)$$

est définie comme une moyenne sur les réalisations  $\langle \cdot \rangle$ . En partant de l'équation de NS, on obtient

$$i\partial_t A = -\frac{\alpha}{2} \nabla^2 A + AV, \quad (4.24)$$

$$\partial_t n(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \alpha \mathbf{k} \cdot \partial_x n(\mathbf{k}, \mathbf{x}) - \partial_x V \cdot \partial_k n(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = 0. \quad (4.25)$$

Ces équations sont couplées l'une à l'autre par le potentiel gravitationnel longue-portée moyenné

$$V(\mathbf{x}, t) = -\gamma \int U_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (|A|^2(\mathbf{y}, t) + N(\mathbf{y}, t)) d\mathbf{y}, \quad (4.26)$$

$$N(\mathbf{x}, t) = \langle |\phi(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{k}. \quad (4.27)$$

Notons que  $N(\mathbf{x}, t)$  représente la *densité moyenne* de la structure incohérente, qui dépend de la variable d'espace  $\mathbf{x}$  car la structure incohérente exhibe des fluctuations qui ne sont pas homogènes dans l'espace. Notons que  $N(\mathbf{x}, t)$  ne doit pas être confondu avec la densité *non moyennée*  $\rho(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2$  (voir Figure 4.8 où  $\rho(\mathbf{x})$  et  $N(\mathbf{x})$  sont superposés).

### 4.4.2 Équation NS effective couplée à WT-Vlasov

Le système d'équations couplées NS et WT-Vlasov (4.24-4.27) est relativement compliqué. Cependant le régime de solitons cachés identifiés dans les simulations en section 4.3 est caractérisée par le paramètre  $\varepsilon \equiv \tilde{\xi} \ll 1$ . En conséquence, nous allons effectuer un développement multi-échelle avec le petit paramètre  $\varepsilon$ . On peut montrer que le régime de soliton caché est décrit par le développement suivant (voir Appendice B)

$$A(\mathbf{x}, t) = A^{(0)}(\mathbf{x}, t), \quad (4.28)$$

$$n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \varepsilon^d n^{(0)}(\varepsilon \mathbf{k}, \varepsilon \mathbf{x}, t). \quad (4.29)$$

Avec ce développement nous avons  $N(\mathbf{x}, t) = N^0(\varepsilon \mathbf{x}, t)$  (avec  $N^0(\varepsilon \mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-d} \int n^{(0)}(\varepsilon \mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{k}, t) d(\varepsilon \mathbf{k})$ ). Cela signifie que l'amplitude de la densité du soliton, à savoir  $|A|^2(x)$ , est du même ordre que la densité moyenne  $N(x)$  de la structure incohérente, c'est-à-dire que le soliton est caché dans la structure incohérente comme discuté à travers l'équation (4.21). Cependant le soliton est dévoilé dans l'espace des phases  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  comme un pic d'ordre un par rapport à l'amplitude de fond  $n(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  qui est de l'ordre de  $\varepsilon^d$ , voir Figure 4.4. De cette façon, les relations (4.28-4.29) pour la variable d'espace  $\mathbf{x}$  signifient que la taille de la structure incohérente est de l'ordre de  $1/\varepsilon \gg 1$  par rapport à la taille du soliton qui est de l'ordre de 1. D'autre part, les relations (4.28-4.29) pour la variable de fréquence  $\mathbf{k}$  signifient que la longueur de corrélation de la structure incohérente  $\lambda_c \sim 2\pi/\Delta k_{SI}$  est de l'ordre de  $\varepsilon \ll 1$  par rapport à la taille  $R_S$  du soliton qui est de l'ordre de un, voir équation (4.20). De plus, la masse de la structure incohérente est  $M_{SI} = \varepsilon^{-d} \int N^0(\varepsilon \mathbf{x}) d(\varepsilon \mathbf{x})$ , qui est de l'ordre de  $\sim \varepsilon^{-d}$  par rapport à la masse du soliton  $M_S = \int |A^{(0)}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ , qui est de l'ordre de un. En conséquence

$$M_{SI} \gg M_S, \quad (4.30)$$

de sorte que la structure incohérente fournit la principale contribution à la masse totale  $\mathcal{M} \simeq M_{SI}$ . Cette séparation d'échelle entre le soliton et la structure incohérente a été anticipée à travers l'étude de résultats numériques discutés en Figure 4.4 et la théorie que nous allons présenter va confirmer cette analyse.

Le développement multi-échelle reporté en Appendice B montre que les équations couplées NS et WT-Vlasov (4.24-4.25) prennent une forme redimensionnée

$$i\partial_t A = -\frac{\alpha}{2} \nabla^2 A + V_S A + \gamma q_d N(0, t) |A|^2 A, \quad (4.31)$$

$$V_S(\mathbf{x}, t) = -\gamma \int U_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |A|^2(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}. \quad (4.32)$$

La constante  $q_d$  dépend de la dimension spatiale,  $q_3 = 2\pi/3$ ,  $q_2 = \pi/2$ ,  $q_1 = 1$ . L'équation WT-Vlasov (4.25) se réduit à

$$\partial_t n(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \alpha \mathbf{k} \cdot \partial_x n(\mathbf{k}, \mathbf{x}) - \partial_x V_{SI} \cdot \partial_k n(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = 0, \quad (4.33)$$

$$V_{SI}(\mathbf{x}, t) = -\gamma \int U_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) N(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (4.34)$$

où nous rappelons que  $N(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-d} \int n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{k}$ . Cette analyse révèle alors 3 résultats importants :

- (i) L'équation WT-Vlasov redimensionnée (4.25) qui gouverne l'évolution de la structure incohérente n'est pas affectée par le soliton caché, car le potentiel gravitationnel auto-consistant  $V_{SI}$  ne dépend pas du soliton, mais uniquement de la composante incohérente  $N(\mathbf{x}, t)$ . Ce résultat est consistant avec le fait que la masse du soliton est négligeable par rapport à la masse de la structure incohérente, comme discuté en équation (4.30).
- (ii) Le soliton ressent son potentiel d'auto-gravitation  $V_S$ , ainsi qu'un potentiel parabolique qui piège le soliton, comme indiqué par le dernier terme en équation (4.31). Comme discuté dans la prochaine section 4.5, ce potentiel parabolique de piégeage induit par la structure incohérente explique le mouvement circulaire du soliton dans l'espace des phases qui peut être observé dans les simulations, voir Figure 4.6.
- (iii) Les masses du soliton et de la structure incohérente sont conservées durant l'évolution, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'échange de masse entre eux. Notons que ce résultat est valide, strictement parlant, pour une séparation «infinie» des échelles spatiales  $\lambda_c \ll R_S$ , tandis qu'un faible échange de masse entre le soliton et la structure incohérente peut être observé dans les simulations numériques. En effet, lorsque la séparation des échelles est «finie», l'évolution du spectre de la structure incohérente n'est pas indépendante du soliton (comme décrit par (4.34)). En réalité, le spectre «ressent» la présence du soliton (voir les équations (4.25-4.26)), qui affecte le potentiel effectif vu par le soliton. Le soliton voit alors un potentiel qui n'est pas purement quadratique mais localement modifié par sa présence, ce qui introduit de petites fluctuations dans la dynamique du soliton et un échange faible de masse avec la structure incohérente.

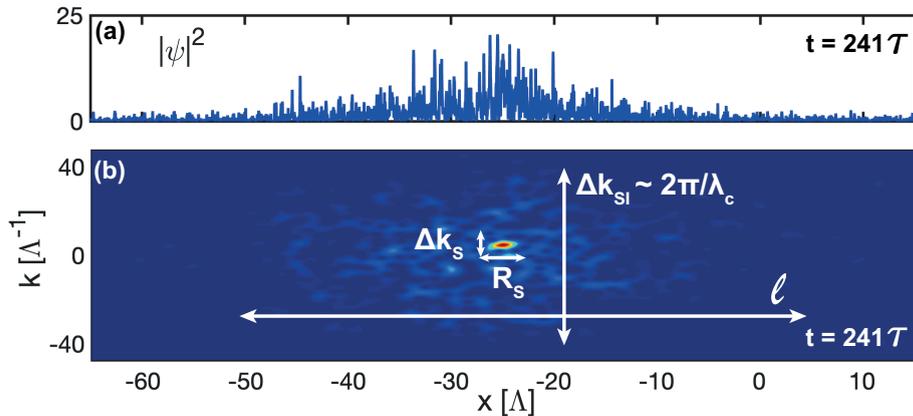


FIGURE 4.4 – **Séparation des échelles dans l'espace des phases** : Zoom sur le champ  $\psi(x)$  (a), et sa transformée de Husimi (b), reportés en Figure 4.3 au temps  $t = 2417$ . La taille du soliton ( $R_S$ ) est beaucoup plus petite que la taille de la structure incohérente,  $R_S \ll \ell \sim L$ , tandis que  $R_S$  est beaucoup plus grand que la longueur de corrélation des fluctuations de la structure incohérente,  $R_S \sim 1/\Delta k_S \gg \lambda_c \sim 1/\Delta k_{SI}$ , voir (4.20).

## 4.5 Soliton piégé par la structure incohérente localisée

### 4.5.1 Dynamique du soliton

Nous avons pu identifier en Figure 4.5 la formation d'un soliton binaire, lequel est caractérisé par une rotation de deux solitons l'un autour de l'autre dans l'espace des phases.

Nous décrivons la forme générale de ce soliton binaire en utilisant l'approche variationnelle (pour  $d = 1, 3$ ), le lecteur est renvoyé à l'Appendice D pour le détail de l'analyse théorique. Nous considérons le Lagrangien de l'équation de NS effective avec l'ansatz Gaussien :

$$A(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^2 a_j(t) \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{o,j}(t)|^2}{2R_{S,j}^2(t)} + i\Phi_j(\mathbf{x}, t)\right),$$

où  $\Phi_j(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k}_{o,j}(t) \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{x}_{o,j}(t)] + b_j(t)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{o,j}(t)|^2 + \nu_j(t)$ . L'évolution des coordonnées dans l'espace des phases du  $j$ -ème soliton  $[\mathbf{x}_{o,j}(t), \mathbf{k}_{o,j}(t)]$  sont obtenues à partir du principe de moindre action à travers les équations d'Euler-Lagrange, voir Appendix C.

La dynamique du soliton binaire peut être décomposée en un mouvement du centre de masse et le déplacement relatif mutuel des deux solitons dans le référentiel du centre de masse. Les équations pour le centre de masse,  $\mathbf{X}_{\text{cm}} = (M_{S,1}\mathbf{x}_{o,1} + M_{S,2}\mathbf{x}_{o,2})/(M_{S,1} + M_{S,2})$ , et  $\mathbf{K}_{\text{cm}} = (M_{S,1}\mathbf{k}_{o,1} + M_{S,2}\mathbf{k}_{o,2})/(M_{S,1} + M_{S,2})$ , peuvent être réécrites sous forme Hamiltonienne  $\partial_t \mathbf{X}_{\text{cm}} = \partial_{\mathbf{K}_{\text{cm}}} H_{\text{cm}}$ ,  $\partial_t \mathbf{K}_{\text{cm}} = -\partial_{\mathbf{X}_{\text{cm}}} H_{\text{cm}}$  avec

$$H_{\text{cm}} = q_d \gamma N_0 |\mathbf{X}_{\text{cm}}|^2 + \frac{\alpha}{2} |\mathbf{K}_{\text{cm}}|^2, \quad (4.35)$$

où l'on a noté  $N_0(t) = N(\mathbf{x} = 0, t)$ . Le barycentre du soliton binaire présente alors un mouvement périodique ellipsoïdal dans l'espace des phases avec une période de révolution

$$\tau_{\text{cm}} = \sqrt{2\pi} / \sqrt{\alpha \gamma q_d N_0}. \quad (4.36)$$

Nous décrivons d'abord le cas  $d = 1$  à travers les simulations de l'équation de NS reportée en Figure 4.5. Nous observons d'abord dans la simulation une densité moyenne  $N_0 = (3.9 \pm 0.2)\bar{\rho}$  ce qui donne  $\tau_{\text{cm}} = (1.56 \pm 0.04)\tau$  par l'équation (4.36). Ce résultat est en accord avec les simulations où nous avons pu mesurer ( $\tau_{\text{cm}}^{\text{num}} \simeq 1.56\tau$ ).

La période de révolution (4.36) s'applique également au mouvement ellipsoïdal d'un *soliton seul* où le centre de masse coïncide avec la position du soliton. Dans le cas de la Figure 4.6,  $N_0 = (4.2 \pm 0.2)\bar{\rho}$  donne  $\tau_{\text{cm}} = (1.53 \pm 0.04)\tau$ , ce qui est en accord avec les simulations de l'équation de NS où nous avons pu mesurer  $\tau_{\text{cm}}^{\text{num}} \simeq 1.52\tau$ .

Les équations Hamiltoniennes gouvernant la position relative du soliton binaire, à savoir  $\mathbf{X}_o = \mathbf{x}_{o,1} - \mathbf{x}_{o,2}$ ,  $\mathbf{K}_o = \mathbf{k}_{o,1} - \mathbf{k}_{o,2}$ , s'écrivent  $\partial_t \mathbf{X}_o = \partial_{\mathbf{K}_o} H_o$ ,  $\partial_t \mathbf{K}_o = -\partial_{\mathbf{X}_o} H_o$ , avec

$$H_o = q_d \gamma N_0 |\mathbf{X}_o|^2 + \gamma (M_{S,1} + M_{S,2}) |\mathbf{X}_o|^{2-d} + \frac{\alpha}{2} |\mathbf{K}_o|^2. \quad (4.37)$$

Pour  $d = 1$ , la trajectoire dans l'espace des phases est reportée en Figure 4.5. Le soliton binaire tournant dans l'espace des phases présente une période de révolution :

$$\tau_{\text{bin}} = 4\sqrt{2} \arcsin(\sqrt{\beta/2}) / \sqrt{\alpha \gamma N_0}, \quad (4.38)$$

où  $\beta = 1 - (M_{S,1} + M_{S,2})/\sqrt{\chi}$ , et  $\chi = (M_{S,1} + M_{S,2})^2 + 4N_0 f(N_0 f + M_{S,1} + M_{S,2})$ , avec  $f$  la distance maximale entre les deux solitons. La rotation du soliton binaire est toujours plus rapide que celle du soliton seul ( $\tau_{\text{bin}} < \tau_{\text{cm}}$ ), comme confirmé par les simulations de NS en Figure 4.5 où  $\tau_{\text{bin}} = (1.43 \pm 0.04)\tau$  est en accord avec les simulations ( $\tau_{\text{bin}}^{\text{num}} \simeq 1.43\tau$ ).

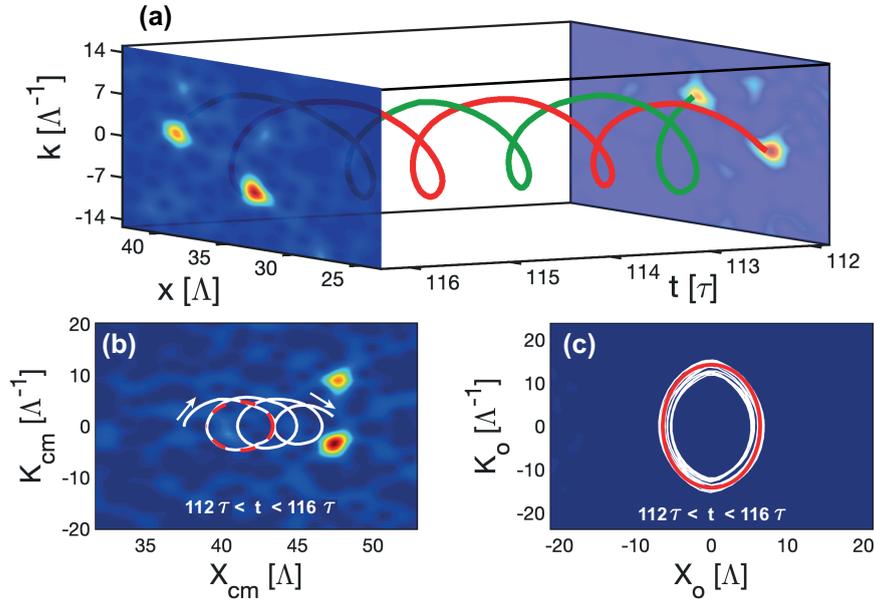


FIGURE 4.5 – **Soliton binaire caché** : (a) Simulation de l'équation de NS montrant deux solitons qui orbitent l'un autour de l'autre dans l'espace des phases (transformée de Husimi). (b) Le centre de masse présente un mouvement elliptical avec une période  $\tau_{\text{cm}}^{\text{num}} \simeq 1.56\tau$  en accord avec la théorie, voir équation (4.36) (on peut noter que le décalage horizontal est dû au mouvement de la structure incohérente). La courbe rouge hachurée reporte l'ellipse théorique  $H_{\text{cm}}$  en équation (4.35)(c). Le période de rotation des solitons tournant l'un autour de l'autre  $\tau_{\text{bin}}^{\text{num}} \simeq 1.43\tau$  est en accord avec la théorie, voir équation (4.38). La courbe rouge reporte la prédiction théorique  $H_o$  en équation (4.37).

Nous signalons enfin que cette étude peut être étendue au cas tri-dimensionnel. On peut ainsi obtenir une expression analytique des trajectoires pour le centre de masse et pour le mouvement relatif du système binaire de solitons pour  $d = 3$ . En particulier, l'analyse montre que la trajectoire du mouvement relatif n'est pas fermée en général et le mouvement planaire présente alors une précession du périhélie, voir [Appendice C](#).

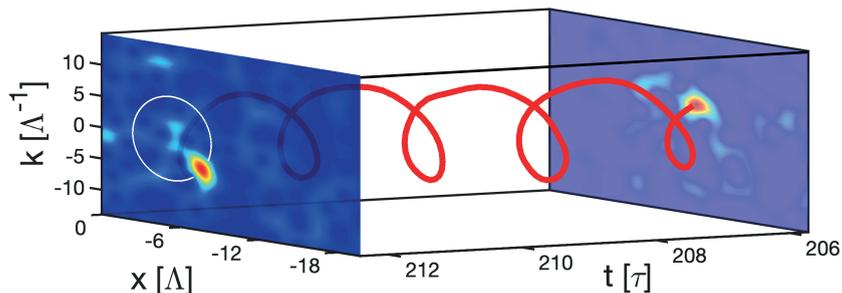


FIGURE 4.6 – **Soliton unique caché** : Simulation de l'équation de NS montrant l'évolution dans l'espace des phases d'un soliton unique. Le soliton présente un mouvement elliptical dans l'espace des phases (transformée de Husimi) avec pour période  $\tau_{\text{cm}}^{\text{num}} \simeq 1.52\tau$  en accord avec la théorie, voir équation (4.36). La courbe blanche reporte l'ellipse théorique  $H_{\text{cm}}$  prédite en équation (4.35).

### 4.5.2 Solution stationnaire pour la structure incohérente

Nous avons vu dans le précédent paragraphe que le soliton est piégé par la structure incohérente à grande échelle. Dans le but de caractériser un tel potentiel de piégeage parabolique ( $\gamma q_d N(0)|x|^2$  en équation (4.31)), nous avons besoin de trouver une solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov (4.33-4.34). À cette fin, nous suivons une procédure générale reportée en référence [171]. Nous verrons qu'une telle solution stationnaire doit être adaptée à notre problème afin de la comparer aux simulations numériques de l'équation de NS avec une onde aléatoire  $\psi(\mathbf{x}, t)$ . Nous anticipons qu'un accord raisonnable est obtenu entre la solution stationnaire et les simulations (voir Figure 4.7). Notons également que la formation de structures incohérentes a été largement étudiée par les distributions statistiques à l'équilibre de Lynben-Bell [48, 49, 172–174] ou via des approches alternatives basées sur les fonctions de corrélations [161].

Le point de départ est l'observation que toute solution stationnaire des équations couplées WT-Vlasov (4.33-4.34) peut être exprimée comme une fonction arbitraire de l'Hamiltonien réduit  $h = \frac{\alpha}{2}\kappa^2 + V_{st}(x)$ . Dans la littérature, il existe une large variété de solutions à l'équilibre pour les systèmes d'équations de type Vlasov (non-collisionnel), comme largement documenté en [171]. Notre but ici est de suivre la procédure naturelle visant à expliquer la nature du support compact du spectre observé dans les simulations de l'équation de NS, voir Figure 4.2. L'idée de la méthode consiste à faire valoir que les «particules» qui constituent la structure incohérente stationnaire, soit  $n_{st}(h)$ , sont piégées par le potentiel auto-consistant  $V_{st}(x)$  à condition que leur énergie soit négative  $h \leq 0$ . Ceci détermine un intervalle spécifique du moment pour les particules auto-piégées  $-k_c \leq k \leq k_c$ , où  $k_c = \sqrt{-2V_{st}(0)/\alpha}$  apparaîtra comme la fréquence de coupure du spectre à support compact, forme observée dans les simulations de l'équation de NS.

D'après l'équation (4.27), nous avons  $N_{st}(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-k_c}^{k_c} n_{st}(k, x) dk$ , et en utilisant le changement ( $k \rightarrow h$ ) nous obtenons

$$N_{st}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha}} \int_{V_{st}}^0 \frac{n_{st}(h)}{\sqrt{h - V_{st}}} dh. \quad (4.39)$$

En suivant le modèle polytrophe [171], nous cherchons une solution de la forme

$$n_{st}(h) = d_0 |h|^{p-1/2}, \quad (4.40)$$

où  $d_0$  est une constante et  $p > 1$ . Par l'intégration de (4.39) nous obtenons

$$N_{st}(x) = r_p \left( -V_{st}(x) \right)^p, \quad (4.41)$$

où  $r_p = \frac{d_0}{\sqrt{2\pi\alpha}} \frac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(p+1)}$ ,  $\Gamma(x)$  étant la fonction Gamma. En rappelant l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel incohérent  $\partial_x^2 V_{st}(x) = 2\gamma N_{st}(x)$ , et en prenant la dérivée seconde de l'équation (4.41), on obtient alors la forme suivante de l'équation d'Emden pour la structure incohérente stationnaire  $N_{st}(x)$  :

$$\partial_x^2 N_{st}^{\frac{1}{p}}(x) = -2\gamma r_p^{\frac{1}{p}} N_{st}(x). \quad (4.42)$$

Il s'avère pratique de reformuler l'équation (4.42) sous la forme générique de l'équation d'Emden. Cela peut se faire en introduisant la variable spatiale  $\bar{x} = \sqrt{\eta_p x}$  et l'amplitude

$u(\bar{x}) = (N_{st}(\bar{x}/\sqrt{n_p})/N_{st}(0))^{1/p}$ , avec  $n_p = 2\gamma r_p^{1/p} N_{st}^{1-1/p}(0)$  et  $u(\bar{x}) \geq 0$ . L'équation (4.42) retrouve alors la forme standard de l'équation d'Emden

$$\partial_{\bar{x}}^2 u(\bar{x}) = -u^p(\bar{x}), \quad (4.43)$$

avec les conditions de bord  $u(0) = 1$  et  $\partial_{\bar{x}} u(0) = 0$ . L'équation d'Emden (4.43) est connue pour présenter une famille de solutions qui dépendent du paramètre libre  $p$ . Ces solutions sont à support compact dans  $[-\bar{x}_p, \bar{x}_p]$  pour certains  $\bar{x}_p$  pour tout  $p > 1$ . Dans la suite, on note l'intégrale  $F_{1,p} = \int_0^{\bar{x}_p} u^p(\bar{x}) d\bar{x}$  où  $u(\bar{x})$  est la solution à l'équation d'Emden à une dimension (4.43).

La structure incohérente stationnaire est caractérisée par la masse

$$\mathcal{M} = g_{\mathcal{M}}(p) F_{1,p} N_{st}^{\frac{p+1}{2p}}(0), \quad (4.44)$$

où  $g_{\mathcal{M}}(p) = (2/\gamma)^{-\frac{1}{2}} (\sqrt{2\pi\alpha}/d_0)^{\frac{1}{2p}} \left( \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{2p}}$ , et par la contribution linéaire de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_l = \frac{\alpha}{4\pi} \iint k^2 n_{st}(k, x) dk dx$ ,

$$\mathcal{H}_l = g_{\mathcal{H}}(p) \frac{F_{1,p+1}}{p+1} N_{st}^{\frac{p+3}{2p}}(0), \quad (4.45)$$

où  $g_{\mathcal{H}}(p) = (2\gamma)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2\pi\alpha}/d_0)^{\frac{3}{2p}} \left( \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \right)^{\frac{3}{2p}}$ , et enfin par la contribution non linéaire  $\mathcal{H}_{nl} = \frac{\gamma}{2} \iint |x-y| N_{st}(x) N_{st}(y) dx dy$  :

$$\mathcal{H}_{nl} = g_{\mathcal{H}}(p) \frac{G_{1,p}}{4} N_{st}^{\frac{p+3}{2p}}(0), \quad (4.46)$$

où  $G_{1,p} = \iint_{[-\bar{x}_p, \bar{x}_p]^2} |\bar{x} - \bar{y}| u(\bar{x})^p u(\bar{y})^p d\bar{x} d\bar{y}$ . Nous avons

$$\frac{F_{1,p+1}}{p+1} = \frac{G_{1,p}}{8}, \quad (4.47)$$

pour tout  $p > 1$ . La dérivation détaillée de ces expressions est reportée en [Appendice E](#). Nous obtenons alors  $\mathcal{H}_{nl} = 2\mathcal{H}_l$ . Ceci est en accord avec le théorème du viriel, qui fournit une relation générale entre le moment d'inertie  $I(t) = \int x^2 N(x, t) dx$  et les contributions linéaires et non linéaires de l'Hamiltonien de l'équation Vlasov (4.33-4.34). En considérant l'équation WT-Vlasov pour  $d = 1$ , le théorème du viriel stipule que dans un état stationnaire,  $\partial_t^2 I = 0$  de sorte que l'énergie doit vérifier  $\mathcal{H}_{nl} = 2\mathcal{H}_l$ , voir [Appendice D](#). Puisque  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_l + \mathcal{H}_{nl}$  est préservé, nous avons  $\mathcal{H}_l = \mathcal{H}/3$  et  $\mathcal{H}_{nl} = 2\mathcal{H}/3$  avec

$$\mathcal{H} = g_{\mathcal{H}}(p) \frac{3F_{1,p+1}}{p+1} N_{st}^{\frac{p+3}{2p}}(0). \quad (4.48)$$

Notons finalement que  $V_{st}$  n'est pas égal au potentiel  $V = -\gamma U_1 * N_{st}$ , ils ne sont égaux qu'à une constante additive près  $V(x) - V_{st}(x) = V(0) - V_{st}(0)$ , avec

$$V(0) = g_V(p) H_{1,p} N_{st}(0)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.49)$$

$$V_{st}(0) = -g_V(p) N_{st}(0)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.50)$$

où  $g_V(p) = (\sqrt{2\pi\alpha}/d_0)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{p}}$  et  $H_{1,p} = \int_0^{\bar{x}_p} \bar{x} u^p(\bar{x}) d\bar{x}$ .

### 4.5.3 La structure incohérente dans les simulations numériques

Dans la section précédente, nous avons présenté une famille de solutions théoriques stationnaires de l'équation WT-Vlasov qui peuvent être paramétrisées par les valeurs de  $N_{st}(0)$ ,  $d_0/N_{st}(0)$ , et  $p$ . Il s'avère que les simulations numériques de l'équation de NS effectuées dans ce chapitre produisent des solutions dont la structure incohérente a tendance à converger vers ces solutions stationnaires. Les paramètres de ces solutions stationnaires peuvent être déterminés à partir des conditions initiales des simulations numériques. En effet, la condition initiale des simulations est uniforme dans la boîte  $[-L/2, L/2]$  avec une densité  $\bar{\rho}$ , de sorte que la masse et l'Hamiltonien numériques sont  $\mathcal{M} = \bar{\rho}L$  et  $\mathcal{H} = \gamma\mathcal{M}^2L/8$  (car  $\mathcal{H}_{nl,L}(t=0) = \mathcal{H}_l(t=0) = 0$ ). Une fois l'état quasi-stationnaire atteint, nous avons  $\mathcal{H}_l = \mathcal{H}/3$  et  $\mathcal{H}_{nl} = 2\mathcal{H}/3$  de sorte que

$$\mathcal{M} = \bar{\rho}L, \quad \mathcal{H}_l = \frac{\gamma\bar{\rho}^2L^3}{24}, \quad \mathcal{H}_{nl,L} = -\frac{\gamma\bar{\rho}^2L^3}{24}. \quad (4.51)$$

Les équations (4.44) et (4.45) donnent alors deux équations indépendantes pour déterminer les 3 paramètres  $N_{st}(0)$ ,  $d_0/N_{st}(0)$ , et  $p$ . Notons que les équations (4.46) et (4.48) sont équivalentes à (4.45) et ne peuvent être utilisées comme une troisième équation indépendante. Il est cependant possible d'avoir une troisième équation indépendante en utilisant une hypothèse additionnelle, vérifiée numériquement, qui est que le support de la structure incohérente stationnaire couvre essentiellement la boîte  $[-L/2, L/2]$ . En utilisant cette hypothèse, on peut montrer que le paramètre  $p$  est égal à

$$p \simeq 4.76, \quad (4.52)$$

et le paramètre  $N_{st}(0)$  est donné par

$$N_{st}(0) = \frac{6F_{1,p+1}}{(p+1)F_{1,p}^3} \bar{\rho} \simeq 2.72\bar{\rho}. \quad (4.53)$$

De plus, il y a une quantité importante qui caractérise la structure incohérente stationnaire, à savoir la fréquence de coupure  $k_c$  du spectre compact sur  $[-k_c, k_c]$  avec  $k_c = \sqrt{2/\alpha}(-V_{st}(0))^{1/2}$  :

$$k_c = \frac{\sqrt{\gamma\bar{\rho}L}}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{F_{1,p}(p+1)}{6F_{1,p+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1.03 \frac{\sqrt{\gamma\bar{\rho}L}}{\sqrt{\alpha}}. \quad (4.54)$$

La fréquence de coupure  $k_c$  possède une signification physique simple, à savoir que les «particules» avec une quantité de mouvement  $|k| \leq k_c$  sont caractérisées par une énergie négative  $h = (\alpha/2)k^2 + V_{st}(x) \leq 0$ , de sorte qu'elles sont piégées par le potentiel auto-induit  $V_{st}(x)$  de la structure incohérente. Cela signifie que les effets linéaires et non linéaires s'équilibrent et sont donc du même ordre de grandeur : en utilisant la définition de la healing length  $\xi$  en équation (4.11), la (plus petite) longueur de corrélation de la structure structure incohérente est

$$\lambda_c \sim 1/k_c \sim \xi, \quad (4.55)$$

comme prévu ci-dessus à travers la séparation des échelles spatiales en équation (4.15). Cela confirme que la structure incohérente n'évolue pas dans le régime faiblement non linéaire (i.e.,  $\lambda_c \ll \xi$ ) décrit par l'équation cinétique de turbulence faible [166].

Nous avons comparé les résultats des simulations numériques de l'équation de NS avec la solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov discutée dans cette section. Nous rappelons que les simulations démarrent d'une condition initiale homogène, qui présente l'instabilité modulationnelle entraînant la formation d'une série de structures incohérentes localisées. Les structures incohérentes fusionnent alors en une seule et le système atteint un état quasi-stationnaire, comme indiqué ci-dessus en Figure 4.2. La convergence des valeurs numériques de  $\mathcal{H}_l$  et  $\mathcal{H}_{nl,L}$  aux valeurs théoriques (4.51) peut être observée en Figure 4.2(c). À ce stade nous pouvons comparer la structure incohérente obtenue dans les simulations NS avec la solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov dans laquelle les paramètres  $p$  et  $N_{st}(0)$  sont donnés par les équations (4.52-4.53). Cette comparaison est reportée en Figure 4.7 pour une petite valeur du paramètre  $\tilde{\xi} = 1.5 \times 10^{-2}$  (correspondant à la Figure 4.2).

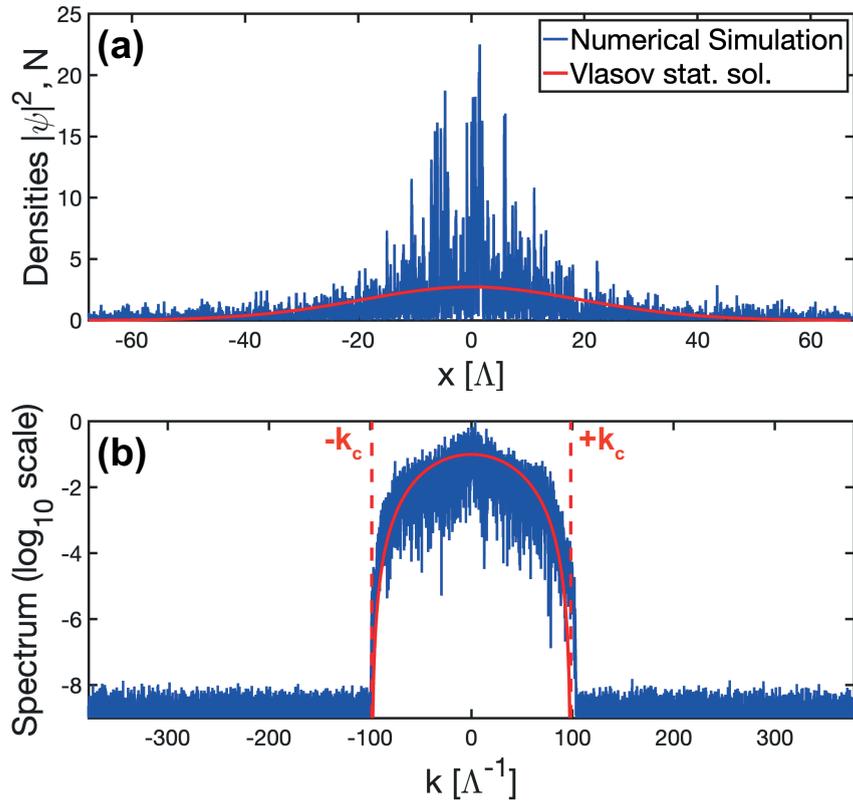


FIGURE 4.7 – **Structure incohérente localisée : NS vs WT-Vlasov.** Simulations numériques de l'équation de NS (trait bleu) avec  $\tilde{\xi} = 1.5 \times 10^{-2}$  (comme en Figure 4.2),  $L = 135\Lambda$  présentant la densité  $|\psi|^2(x)$  (a), et le spectre  $|\tilde{\psi}|^2(k)$  en échelle  $\log_{10}$  (b), à  $t = 188\tau$ . En partant d'une condition initiale homogène, l'onde s'auto-organise en une structure incohérente localisée (a), caractérisée par un support compact du spectre (b). Comparaison avec la solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov (4.41) (trait rouge), dont les paramètres ( $p = 4.76$ ,  $N_{st}(0) = 2.72\bar{\rho}$ ) ont été obtenus par les équations (4.52-4.53). Notons en particulier le bon accord entre la forme spectrale à support compact et la fréquence de coupure correspondante  $k_c \simeq 1.03\sqrt{\gamma\bar{\rho}}L/\sqrt{\alpha} \simeq 98\Lambda^{-1}$  donnée par l'équation (4.54). En conséquence, la structure incohérente évolue dans un régime fortement non linéaire puisque la fréquence la plus élevée est  $k_c \sim \xi^{-1}$ , voir l'équation (4.55)

Nous pouvons noter qu'un bon accord a été obtenu entre les simulations NS et la solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov - notons cependant qu'un si bon accord n'est pas obtenu dans la queue de la structure incohérente localisée en raison des conditions aux limites périodiques. D'autre part, nous soulignons l'accord quantitatif entre le spectre en échelle logarithmique et la fréquence de coupure correspondante  $k_c$  donnée par l'équation (4.54). Nous remarquons que le bon accord montré en Figure 4.7 a été obtenu avec une grande variété de paramètres numériques (dans le régime  $\xi \ll 1$ ).

## 4.6 Stabilisation du soliton par la structure incohérente

Dans cette section nous étudions la stabilisation du soliton caché par la structure incohérente. En effet, l'analyse théorique reportée en section 4.5 a révélé que la structure incohérente introduit un potentiel effectif parabolique qui confine le soliton sous-jacent. Pour vérifier cette prédiction, nous avons effectué des simulations numériques du système d'équations couplées NS et WT-Vlasov (4.24-4.27). Il est important de noter que ces équations couplées pour les contributions cohérentes et incohérentes, ont été dérivées directement de l'équation de NS. Dans ce qui suit, nous montrons que la solution stationnaire pour le soliton obtenu dans la section 4.5 est robuste lorsqu'elle est remplacée dans le système d'équations couplées NS et WT-Vlasov (4.24-4.27).

Nous avons effectué des simulations numériques des équations couplées NS et WT-Vlasov (4.24-4.27) à une dimension spatiale,  $d = 1$ , voir Figure 4.8. Le soliton est gouverné par l'équation de NS (4.24) avec le potentiel (4.26), et la condition initiale  $A(x, t = 0)$  est de forme Gaussienne telle qu'obtenue par la solution stationnaire compatible avec la présence de la structure incohérente, voir section 4.5.1. Dans cet exemple la densité du soliton a été choisie pour être égale à  $|A|^2(x = 0, t = 0) = N_{st}(0)/2$ . La simulation numérique de l'ensemble d'équations couplées NS et WT-Vlasov (4.24-4.27) montre que la structure incohérente reste presque stationnaire durant l'évolution (sauf pour un petit réajustement du fond homogène constant ajouté à la solution stationnaire dans la région de l'espace des phases  $h = (\alpha/2)k^2 + V_{st}(x) > 0$  où la solution n'est pas définie). Cela signifie que la présence du soliton n'affecte pas l'évolution de la structure incohérente stationnaire, comme prédit par l'analyse multi-échelle développée en section 4.4.2. Il est important de noter que le soliton  $A(x, t)$  gouverné par l'équation (4.24) reste également stationnaire au cours de l'évolution, sauf pour une petite oscillation dans la queue lointaine ( $\sim 10^{-10}$ ) du profil Gaussien.

Cette évolution du soliton est en contraste avec la dynamique correspondante obtenue *en l'absence de la structure incohérente*. Ceci est illustré en Figure 4.9, qui montre l'évolution de la densité du soliton  $|A|^2(x, t)$  en partant de la même condition initiale qu'en Figure 4.8, mais *sans la structure incohérente*, c'est-à-dire, en fixant  $N(x, t) = 0$  dans le potentiel  $V(x, t)$  en équation (4.26). Dans ce cas, le soliton est soumis à son potentiel d'auto-gravitation et son évolution se caractérise par un élargissement significatif de la structure localisée, comme en témoigne la représentation en échelle logarithmique de la densité  $|A|^2(x, t)$  rapportée en Figure 4.9.

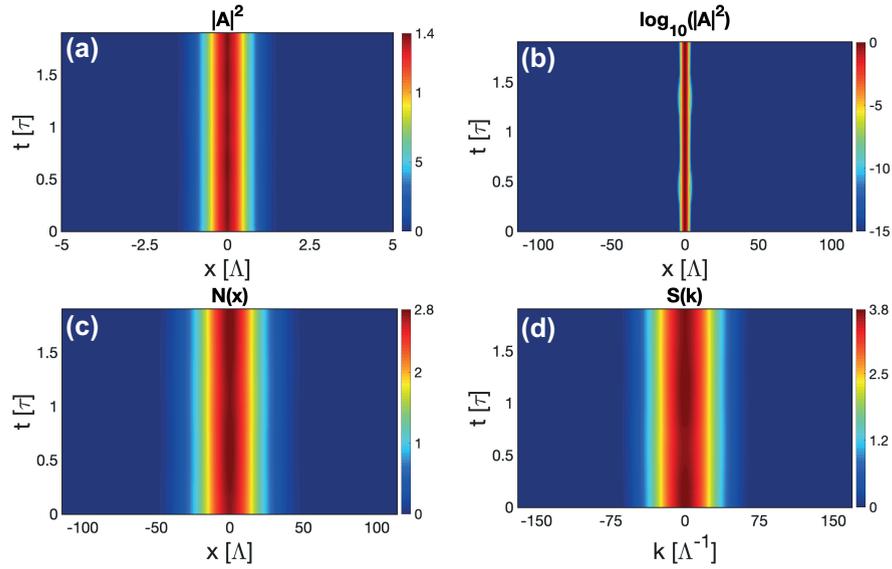


FIGURE 4.8 – **Soliton stabilisé par la structure incohérente localisée.** Simulation numérique du système d'équations couplées NS et WT-Vlasov (4.24-4.27) pour  $\tilde{\xi} = 1.7 \times 10^{-2}$  ( $L = 114\Lambda$ ,  $d = 1$ ). Évolution de la densité du soliton  $|A|^2(x, t)$  en échelle normale (a), et en échelle logarithmique (b). Évolution de la densité de la structure incohérente  $N(x, t) = \int n(k, x, t) dk$  (a) et spectre correspondant  $S(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int n(k, x, t) dx$  (b), en partant de la solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov (4.41). La condition initiale pour le soliton correspond à la solution stationnaire de forme Gaussienne obtenue par l'approche variationnelle. Comme prédit par la théorie, la structure incohérente fournit un confinement spatial qui stabilise le soliton, comme mis en évidence par l'évolution correspondante du soliton en absence de la structure incohérente, voir Figure 4.9. Les densités  $|A(x)|^2$  et  $N(x)$  sont en unité de  $\bar{\rho}$ .

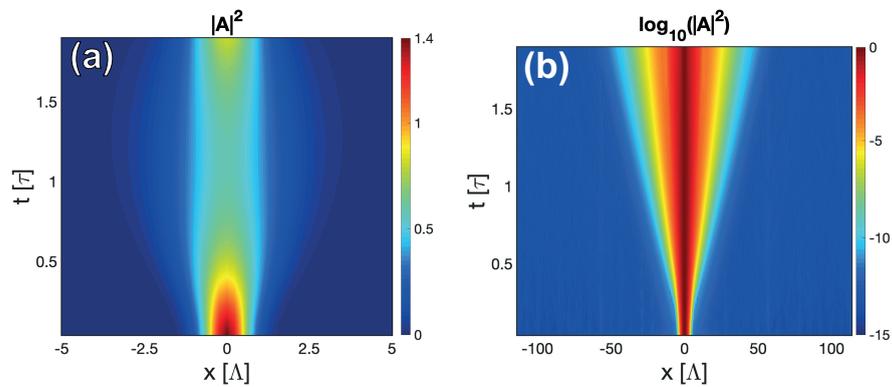


FIGURE 4.9 – **Dynamique du soliton en l'absence de la structure incohérente.** Evolution de la densité  $|A|^2(x, t)$  en échelle normale (a), et en échelle logarithmique (b), du soliton obtenu par simulation de NS pour les mêmes paramètres et la même condition initiale qu'en Figure 4.8, mais sans aucun couplage avec la structure incohérente. Le soliton présente un élargissement rapide et significatif de son profil spatial, qui est en contraste avec la dynamique stationnaire reportée en Figure 4.8 en présence de la structure incohérente. La densité  $|A(x)|^2$  est en unité de  $\bar{\rho}$ .

La comparaison de cette évolution avec celle obtenue en Figure 4.8 montre clairement que la structure incohérente fournit un confinement spatial qui stabilise le soliton de forme Gaussienne. Nous notons que la même évolution du soliton reportée en Figure 4.8 en présence de la structure incohérente est également obtenue par la simulation numérique de l'équation de NS seule (4.31), dans laquelle la structure incohérente introduit un confinement parabolique du soliton. Ces simulations numériques fournissent alors une confirmation de la prédiction théorique reportée en section 4.5.1.

## 4.7 Conclusion et perspectives

En résumé, nous avons montré qu'en diminuant la healing length adimensionnée  $\tilde{\xi}$  (ou le paramètre  $\Xi$  en [159]), le système d'interaction à longue-portée décrit par l'équation de NS entre dans un régime collectif incohérent caractérisé par la formation d'une structure incohérente à grande échelle qui contient des solitons cachés. Bien que le soliton ne soit pas identifié dans le domaine spatio-temporel conventionnel, sa présence est révélée par une analyse dans l'espace des phases. Nous avons dérivé un ensemble d'équations décrivant l'évolution de la composante soliton gouvernée par une équation de NS effective et la composante incohérente gouvernée par l'équation WT-Vlasov. De cette manière, nous avons obtenu une solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov qui est en accord avec les simulations numériques de l'équation de NS, notamment pour la description du support compact du spectre observé dans les simulations. Le principal résultat de cette théorie est que la composante incohérente introduit un potentiel parabolique effectif qui confine et aide la stabilisation de la composante solitonique. En conséquence, le soliton présente un profil de densité Gaussien et la solution stationnaire correspondante a été vérifiée par des simulations numériques du système d'équations couplées NS et WT-Vlasov. La largeur typique du soliton est beaucoup plus grande que la longueur de corrélation de la structure incohérente et beaucoup plus petite que la largeur typique de la structure incohérente,  $\lambda_c \sim \xi \ll R_S \ll \ell \sim L$ .

Dans ce qui suit, nous discutons de l'extension naturelle de notre travail à deux et trois dimensions spatiales  $d = 2, d = 3$ . De plus, nous montrons ci-dessous que le comportement phénoménologique discuté tout au long de ce chapitre n'est pas limité à l'interaction gravitationnelle, et peut être étendu aux interactions à longue portée caractérisées par une décroissance algébrique du potentiel d'interaction. Enfin, nous discuterons des implémentations expérimentales possibles du régime de solitons cachés.

### 4.7.1 Extension à deux dimensions spatiales

Les simulations présentées jusqu'à présent ont été réalisées à une dimension spatiale  $d = 1$ . Cela nous a permis d'étudier numériquement une grande séparation des trois échelles,  $\lambda_c \sim \xi \ll R_S \ll \ell$  avec de petites valeurs de la healing length normalisée  $\tilde{\xi} \ll 1$ , comme discuté en (4.15). Dans ce qui suit, nous reportons des simulations avec  $d = 2$  pour des valeurs relativement petites de  $\tilde{\xi}$ , qui confirment qualitativement le scénario discuté ci-dessus à une dimension spatiale. On remarque que l'étude du cas bidimensionnel peut également être pertinente en astrophysique comme le suggèrent les simulations de «fuzzy dark matter» que les structures cosmologiques développent à partir de fluctuations aléatoires en filaments quasi cylindriques avant de s'effondrer en structures sphériques [163].

Nous avons simulé l'équation de NS avec le potentiel gravitationnel bidimensionnel  $U_2(\mathbf{x}) = -\log(\mathbf{x})$  en partant d'une condition initiale homogène avec un petit bruit superposé, voir équation (4.6). Par analogie avec le précédent cas uni-dimensionnel, le système développe l'instabilité modulationnelle, laquelle est suivie d'un régime de turbulence de solitons caractérisé par l'interaction des solitons avec les fluctuations environnantes. Pour une valeur modérée de  $\tilde{\xi}$  (typiquement  $\tilde{\xi} \sim 0.3$ ), la dynamique quasi-stationnaire du système est dominée par un soliton. Ceci est analogue au cas unidimensionnel  $d = 1$ , excepté qu'ici pour  $d = 2$  la formation du soliton apparaît plus robuste et donc persistante dans l'évolution du système. Ce régime est caractérisé par deux aspects : L'amplitude du soliton est beaucoup plus grande que celle des fluctuations de la structure incohérente, et la largeur typique du soliton est du même ordre que la longueur de corrélation des fluctuations de la structure incohérente.

En diminuant le paramètre  $\tilde{\xi}$  le système entre dans le régime incohérent collectif caractérisé par la formation d'une structure incohérente à grande échelle. Un exemple typique est rapporté en Figure 4.10 pour une valeur modérément petite de  $\tilde{\xi} \simeq 0.063$  qui est accessible dans nos simulations numériques. Comme pour  $d = 1$ , les évolutions des énergies  $\mathcal{H}_l$  et  $\mathcal{H}_{nl,L}$  reportées en Figure 4.10(a) reflètent une relaxation vers un état quasi-stationnaire. Il est intéressant de noter que, à la différence du cas  $d = 1$ , le théorème du viriel fixe la valeur stationnaire de l'énergie linéaire seulement en fonction de la masse du système, voir [Appendice D](#) :

$$\mathcal{H}_l = \gamma \mathcal{M}^2 / 4. \quad (4.56)$$

Dans les simulations, la condition initiale est homogène, de sorte que  $\mathcal{H}_l(t = 0) = \mathcal{H}_{nl,L}(t = 0) = 0$ ,  $\mathcal{M} = \bar{\rho}L^2$  et donc par conservation du Hamiltonien, l'énergie non linéaire de la structure incohérente dans son état stationnaire est  $\mathcal{H}_{nl,L} = -\gamma \mathcal{M}^2 / 4$ . Ces prédictions théoriques du théorème du viriel sont en accord avec la structure incohérente observée dans les simulations 2D de l'équation de NS, voir Figure 4.10(a). Par analogie avec  $d = 1$ , la structure incohérente est localisée dans l'espace par son potentiel gravitationnel à longue portée et elle est caractérisée par un spectre à support compact, voir Figure 4.10(b). L'analyse de l'espace des phases reportée le long de deux lignes  $x$  et  $y$  représentatives indique la présence d'une structure cohérente. Le portrait de l'espace des phases montre que la largeur du soliton est plus grande que la longueur de corrélation des fluctuations d'un facteur  $\sim 3$ . Ce petit facteur est dû à la valeur modérément petite de  $\tilde{\xi} \simeq 0.063$  considérée ici. Selon l'analyse multi-échelle décrite ci-dessus à travers les équations (4.28-4.29), les fluctuations de densité de la structure incohérente sont du même ordre que le pic du soliton. Cela explique pourquoi le soliton n'est pas véritablement «caché» dans la structure incohérente. Malheureusement, en raison du temps de calcul limité à deux dimensions, nous ne sommes pas en mesure de réduire le paramètre  $\tilde{\xi}$  à des valeurs aussi petites que celles considérées pour  $d = 1$  (c'est-à-dire  $\tilde{\xi} \simeq 10^{-2}$ ). Pour cette raison, nous n'atteignons pas pour  $d = 2$  la séparation requise des échelles  $\lambda_c \ll R_S$  discutée dans l'équation (4.20), comme le révèle la comparaison de l'espace des phases pour  $d = 1$  (voir Figure 4.4) et pour  $d = 2$  (voir Figure 4.10(f-g)).

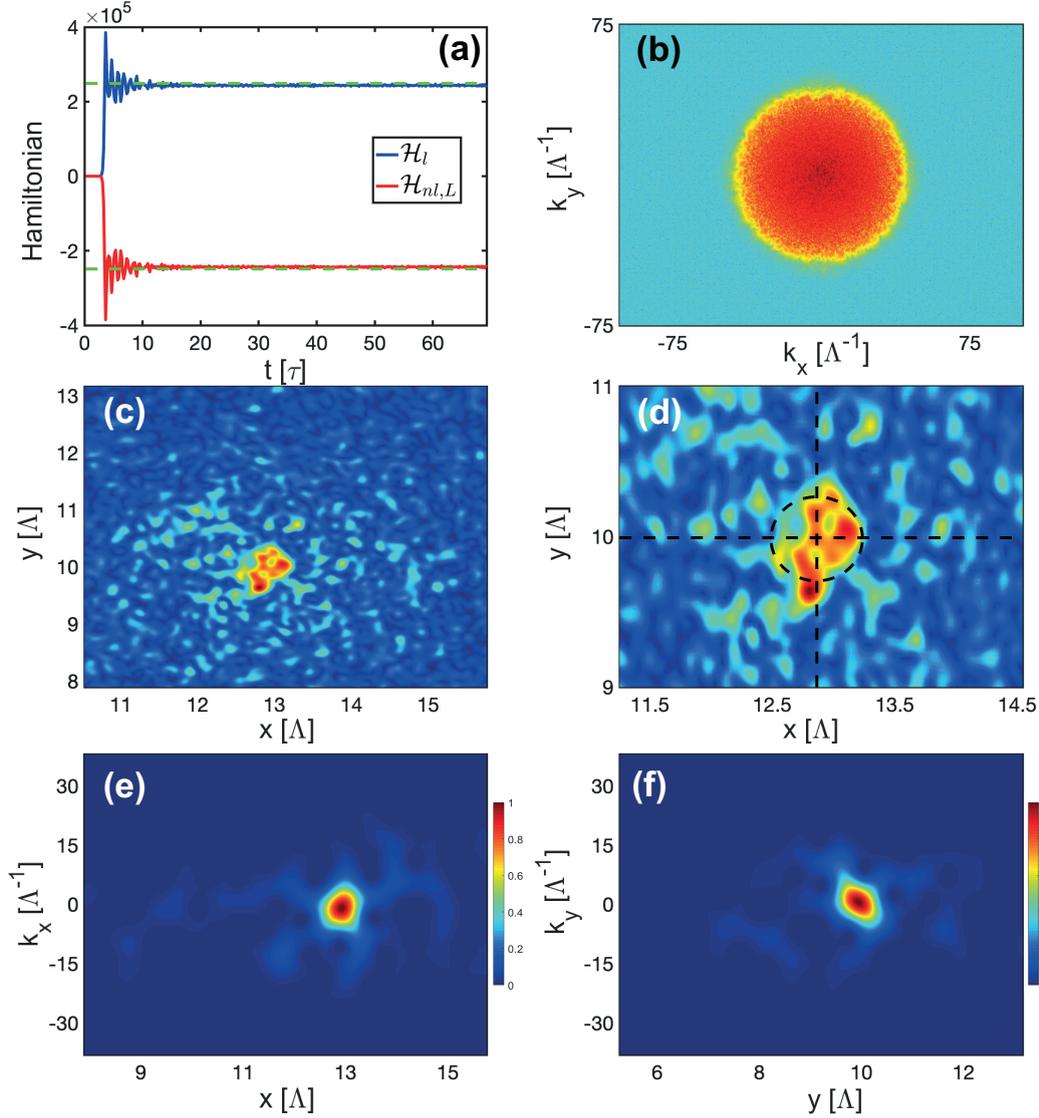


FIGURE 4.10 – **Structure incohérente et soliton partiellement caché à deux dimensions spatiales** ( $d = 2$ ). Simulation numérique de l'équation de NS pour une valeur modérément petite de  $\tilde{\xi} = 0.063$  à deux dimensions spatiales ( $L = 32\Lambda, d = 2$ ) partant d'une condition initiale homogène. L'onde initiale développe l'instabilité modulationnelle et après un transitoire le système s'auto-organise en une structure incohérente localisée qui contient un soliton partiellement «caché». (a) Évolutions des contributions linéaires  $\mathcal{H}_l$  (bleue) et non linéaire  $\mathcal{H}_{nl,L}$  (rouge) de l'Hamiltonien. (b) Spectre à deux dimensions  $|\tilde{\psi}|^2(\mathbf{k})$  à  $t = 81\tau$  en échelle  $\log_{10}$ . Notons que le spectre présente un support compact. (c) Densité à deux dimensions  $|\psi|^2(\mathbf{x})$  à  $t = 81\tau$ . (d) Zoom à proximité du soliton. Transformée de Husimi correspondantes dans l'espace des phases  $(x, k_x)$  (e), et  $(y, k_y)$  (f), le long des lignes horizontales et verticales montrées en (d) : la présence d'un spot de forte amplitude dans l'espace des phases indique la présence d'un soliton 2D mis en évidence schématiquement en (d) par un cercle. En raison de la valeur modérément petite de  $\tilde{\xi}$  considérée dans la simulation, nous avons  $\lambda_c \lesssim R_S$  : Il n'y a pas de séparation nette des échelles entre la longueur de corrélation de la structure incohérente et le rayon du soliton (voir Figure 4.4 pour une comparaison avec  $d = 1$  où  $\lambda_c \ll R_S$ ).

### 4.7.2 Extension à trois dimensions spatiales : la correspondance quantique-classique

Le régime de solitons cachés peut être étendu à trois dimensions spatiales [62]. En diminuant le paramètre  $\tilde{\xi}$ , le système entre dans un régime collectif incohérent caractérisé par la formation d'une structure incohérente à grande échelle [décrite par les équations WT-Vlasov (4.68-4.69)], laquelle cache et maintient le soliton cohérent [décrit par l'équation de NS effective (4.65)]. Dans cette section, nous combinons la solution stationnaire pour la structure incohérente avec la relation masse-rayon pour le soliton afin d'obtenir une relation plus précise pour le rayon et la masse du soliton en fonction de la healing length normalisée  $\tilde{\xi}$ , ce qui clarifie la correspondance quantique vers classique à 3D.

Tout d'abord, nous appliquons l'approche variationnelle à l'équation de NS effective (4.65) pour décrire la dynamique oscillatoire générique du soliton de forme Gaussienne, voir [Appendice E](#) et référence [62]. L'analyse révèle en particulier l'existence d'un soliton stationnaire stable à 3D caractérisé par un profil Gaussien

$$|A|^2(\mathbf{x}) = a^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2R_S^2}\right), \quad (4.57)$$

où la masse  $M_S = \pi^{3/2}a^2R_S^3$  et le rayon du soliton sont reliés par

$$M_S = \frac{\sqrt{2\pi}}{\gamma} \left( \frac{3\alpha}{2R_S} - 2\pi\gamma N_{st}(\mathbf{0})R_S^3 \right). \quad (4.58)$$

La solution  $R_S(M_S)$  est une fonction décroissante de  $M_S$  qui démarre de  $R_{\max} = \left(3\alpha/(4\pi\gamma N_{st}(\mathbf{0}))\right)^{1/4}$  pour une masse  $M_S$  nulle, et tend vers 0 pour  $M_S \rightarrow +\infty$ . L'amplitude  $N_{st}(\mathbf{0})$  du soliton incohérent en (4.58) est obtenue à partir de la solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov (4.68-4.69). Le lecteur peut trouver en détails la dérivation de la solution stationnaire 3D en [Appendice E](#). En particulier, la solution stationnaire à 3D est caractérisée par un spectre à support compact  $|\mathbf{k}| \in (0, k_c)$  avec la fréquence de coupure  $k_c$  donnée par l'équation (4.107).

D'après la correspondance quantique-classique entre l'équation NS et l'équation cinétique de Vlasov-Poisson (ou équation de Boltzmann sans collision), les états solitons disparaissent dans la limite classique  $\hbar/m \rightarrow 0$ , puisque ce sont des objets cohérents qui ne peuvent être décrits par la limite classique [160]. Nous discutons cet aspect à travers le régime de solitons cohérents cachés caractérisés par un profil de densité de forme Gaussienne. Dans ce but, nous considérons l'équation (4.58) exprimée en fonction du pic d'intensité  $a^2 = M_S/(\pi^{3/2}R_S^3)$  du soliton au lieu de sa masse. En suivant l'analyse multi-échelle pour  $\tilde{\xi} \ll 1$  [voir équations (4.28-4.29)], la densité du soliton est du même ordre que la densité de la structure incohérente, alors nous posons  $a^2 = \eta N_{st}(\mathbf{0})$  avec  $\eta \sim 1$  pour avoir

$$R_S^4 = \frac{3\alpha}{\sqrt{2\pi}(\eta + 2^{3/2})\gamma N_{st}(\mathbf{0})}. \quad (4.59)$$

Ensuite nous utilisons l'hypothèse que la condition initiale du champ est homogène, de sorte que nous obtenons une expression explicite pour  $N_{st}(\mathbf{0})$ , voir équation (4.109) en

Appendice E. Cela donne la relation fermée suivante pour le rayon à 3 dimensions du soliton

$$\frac{R_S}{L} = \varrho^{\frac{1}{4}} \left( \frac{12\pi F_{3,p+1}}{(p+1)c_3} \right)^{\frac{3}{4}} F_{3,p}^{-\frac{5}{4}} \tilde{\xi}, \quad (4.60)$$

où le préfacteur  $\varrho = 3\sqrt{2}/(\pi(\eta+2^{3/2})) \sim 1$ . Nous pouvons alors nous attendre à  $R_s/L \rightarrow 0$  quand  $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ , c-a-d, le soliton doit disparaître de façon cohérente avec la correspondance cinétique Vlasov-Poisson. La même conclusion est obtenue depuis l'analyse de la masse du soliton de forme Gaussienne :

$$\frac{M_S}{M_{SI}} = \eta \varrho^{\frac{3}{4}} \left( \frac{\pi(p+1)c_3}{12\pi F_{3,p+1}} \right)^{\frac{3}{4}} F_{3,p}^{\frac{5}{4}} \tilde{\xi}^3, \quad (4.61)$$

où  $M_{SI}$  est la masse de la structure incohérente, voir équation (4.30). Notons que la dépendance  $M_S/M_{SI} \sim \tilde{\xi}^3 \sim \Xi^{3/4}$  est proche mais pas égale à la dépendance  $\sim \Xi^{2/3}$  prédite en [160] pour un profil de structure donné possédant une singularité. Nous remarquons finalement que, bien que le soliton disparaît comme attendu dans la limite purement classique  $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ , pour une toute petite valeur de  $\tilde{\xi}$ , le soliton survit encore sous la forme d'une structure cohérente de forme Gaussienne avec un pic de densité du même ordre que la densité moyenne des fluctuations de la structure incohérente  $|A|^2 \sim N_{st}(\mathbf{0})$  et son rayon typique  $R_S$  donné par la moyenne harmonique de  $\xi$  et  $L$ .

### 4.7.3 Extension aux interactions à longue portée non gravitationnelles

Nous avons considéré dans ce chapitre les exemples concrets de potentiels gravitationnels dans différentes dimensions spatiales. Cependant, il est important de noter que le régime de solitons cachés décrit ici est général et peut être étendu à des potentiels à longue portée non gravitationnels. Nous illustrons ceci à une dimension spatiale en considérant une forme générale de l'équation de Schrödinger non linéaire (4.3-4.4) avec le potentiel suivant qui décroît algébriquement dans l'espace

$$U_\nu(x) = -|x|^\nu, \quad \nu \in (0, 1). \quad (4.62)$$

En suivant la même procédure qu'en section 4.4, le développement multi-échelle fournit les deux fonctions

$$A(x, t) = A^{(0)}(x, t), \quad (4.63)$$

$$n(k, v, t) = \varepsilon^\nu n^{(0)}(\varepsilon k, \varepsilon x, t). \quad (4.64)$$

La composante cohérente du soliton satisfait l'équation de NS effective

$$i\partial_t A = -\frac{\alpha}{2}\partial_{xx}A + V_S A + \gamma Q(t)|x|^2 A, \quad (4.65)$$

$$Q(t) = -\nu \int_0^{+\infty} y^{\nu-1} \partial_y N(y) dy, \quad (4.66)$$

$$V_S(x, t) = -\gamma \int U_\nu(x - y) |A|^2(y, t) dy. \quad (4.67)$$

Par ailleurs, la composante incohérente vérifie l'équation WT-Vlasov

$$\partial_t n(k, x) + \alpha k \partial_x n(k, x) - \partial_x V_{SI} \partial_k n(k, x) = 0, \quad (4.68)$$

$$V_{SI}(x, t) = -\gamma \int U_\nu(x - y) N(y, t) dy. \quad (4.69)$$

Ces équations NS et WT-Vlasov généralisent celles dérivées ci-dessus pour le cas particulier du potentiel gravitationnel  $\nu = 1$  (notons en particulier que  $Q(t) = N(0, t)$  pour  $\nu = 1$ ). En suivant la même procédure, une solution soliton stable de l'équation de NS effective (4.65) peut être obtenue par l'approche Lagrangienne, qui donne une relation entre la masse de la structure cohérente  $M_S = a^2 \sqrt{\pi} R_S$  et la largeur du profil Gaussien  $|A|^2(x) = a^2 \exp(-x^2/(2R_S))$  :

$$M_S = \frac{1}{2\nu\gamma c_\nu} \left( \frac{\alpha}{R^{2+\nu}} - 2\gamma Q R_S^{2-\nu} \right), \quad (4.70)$$

où l'amplitude  $Q$  peut être obtenue depuis la solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov (4.68-4.69), comme discuté ci-dessus pour  $\nu = 1$ .

L'analyse multi-échelle révèle une différence majeure par rapport au potentiel gravitationnel  $\nu = 1$ . Puisque  $N(x, t) = \varepsilon^{\nu-1} N^{(0)}(\varepsilon x, t)$ , avec  $N^{(0)}(\varepsilon x, t) = \frac{1}{2\pi} \int n^{(0)}(\varepsilon x, \varepsilon k, t) d(\varepsilon k)$ , la densité du soliton  $|A|^2$  est plus petite que la densité moyenne  $N(x)$  des fluctuations de la structure incohérente, c-a-d, le soliton devient «mieux caché» que dans le cas gravitationnel  $\nu = 1$ . Comme discuté précédemment, la présence du soliton peut être identifiée dans la représentation de l'espace des phases. En effet, le soliton apparaît comme un pic dans l'espace des phases d'amplitude d'ordre un comparé au fond  $n(k, x)$  dont l'amplitude est de l'ordre de  $\varepsilon^\nu$ . En conséquence, pour une valeur modéré de  $\nu \sim 0.5$ , l'identification du soliton peut devenir difficile même dans l'espace des phases. Nous avons effectué des simulations numériques préliminaires de l'équation de Schrödinger non linéaire (4.3-4.4) avec le potentiel (4.62), qui semblent confirmer les prédictions théoriques.

#### 4.7.4 Implémentations expérimentales possibles

Le travail présenté dans ce chapitre pourrait stimuler des expériences dans différents domaines, comme les condensats dipolaires de Bose-Einstein, qui sont connus pour présenter un véritable potentiel non local à longue portée [41, 175]. Dans le contexte de l'optique non linéaire, une non-linéarité non locale peut être rencontrée dans les vapeurs atomiques [42], les cristaux liquides nématiques [39, 44, 176] ou les milieux non linéaires thermiques [2, 46, 167, 177]. La propagation du faisceau optique dans le milieu non linéaire peut être décrite dans l'approximation paraxiale par une forme générique de l'équation de Schrödinger non linéaire non locale (4.3-4.4), où la variable  $t$  joue le rôle de la distance de propagation dans le milieu alors que l'opérateur Laplacien s'applique aux deux dimensions transverses du faisceau optique. Ainsi, une analogie formelle a été mise en évidence entre l'équation de NS (4.1-4.2) pour  $d = 2$  et l'équation de Schrödinger non linéaire non locale régissant la propagation de la lumière dans des milieux non linéaires fortement non locaux, ce qui a permis d'émuler une tranche 2D du système gravitationnel 3D complet [59, 60].

Plus précisément, en choisissant des conditions opératoires appropriées, il a été montré que la réponse moyenne dans le plan transverse du faisceau optique peut être optimisée pour mimer la nature longue portée du potentiel gravitationnel. Cette procédure a permis l'étude expérimentale de l'évolution d'une étoile de Bosons en rotation avec un moment angulaire quantifié en utilisant un faisceau lumineux intense se propageant dans une plaque de verre [60]. Suite à cette procédure expérimentale, nous pouvons envisager l'observation expérimentale du régime de solitons cachés rapportés dans ce travail. De plus, nous remarquons que l'analyse dans l'espace des phases d'un faisceau type speckle 2D a déjà été implémentée expérimentalement en [167, 178], et la même procédure peut être utilisée pour révéler la présence du soliton dans la structure incohérente.

## Appendice A : Simulation de l'équation de Newton-Schrödinger dans une boîte finie

Les simulations numériques sont effectuées pour un système dans un domaine borné avec des conditions aux limites périodiques. Dans ce cadre nous avons

$$i\partial_t\psi + \frac{\alpha}{2}\Delta_{\mathbf{x}}\psi - V_L\psi = 0, \quad (4.71)$$

$$V_L = -\gamma U_{d,L} * |\psi|^2, \quad (4.72)$$

dans  $[-L/2, L/2]^d$  avec conditions aux limites périodiques. Ici  $U_{d,L}(\mathbf{x})$  est la fonction périodique égale à  $U_d(\mathbf{x}) - c_{d,L}$  dans  $[-L/2, L/2]^d$  et  $c_{d,L} = L^{-d} \int_{[-L/2, L/2]^d} U_d(\mathbf{x})$  tel que  $U_{d,L}$  a pour moyenne zéro. L'équation (4.72) est équivalente à

$$V_L = -\gamma U_d * (|\psi|^2 - \bar{\rho}_L), \quad (4.73)$$

avec  $\bar{\rho}_L = L^{-d} \int_{[-L/2, L/2]^d} |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ . En conséquence, le potentiel  $V_L$  dans les simulations numériques a pour moyenne zéro et l'énergie non linéaire correspondante

$$\mathcal{H}_{nl,L} = \frac{1}{2} \int V_L(\mathbf{x}, t) |\psi|^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (4.74)$$

est reportée en Figures 4.1, 4.2, 4.10 avec ce potentiel. Cette énergie non linéaire est différente de l'énergie non linéaire  $\mathcal{H}_{nl}$  en équation (4.9) à une constante près

$$\mathcal{H}_{nl,L} = \mathcal{H}_{nl} + \gamma \mathcal{M}^2 c_{d,L}/2, \quad (4.75)$$

où  $\mathcal{M} = \int_{[-L/2, L/2]^d} |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ . Le potentiel  $V_L$  est déterminé numériquement par transformation de Fourier [159]. Notons que les formulations (4.3-4.5) en milieu ouvert (utilisé pour les analyses théoriques) et (4.71-4.72) en milieu périodique (utilisé pour les analyses numériques) ont un écart apparent dans les définitions du potentiels  $U$  qui diffèrent par une constante. Cependant, une constante supplémentaire dans le potentiel peut être absorbée de l'équation de NS au moyen d'un changement de phase globale de  $\psi$ , ce qui n'affecte pas la dynamique.

## Appendice B : Analyse multi-échelle pour les équations couplées Newton-Schrödinger et WT-Vlasov

Le champ partiellement cohérent  $\psi$  est de la forme (4.22). Il est composé du soliton  $A(\mathbf{x}, t)$  et de la structure incohérente caractérisée par son spectre  $n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$ . Ils satisfont les équations couplées (4.24-4.25) avec le potentiel à longue portée (4.26). La densité moyenne  $N(\mathbf{x}, t)$  peut être exprimée en fonction du spectre  $n$  comme en équation (4.27). Dans cet Appendice, nous montrons par analyse multi-échelle que le régime décrit par la transformation d'échelle (4.28-4.29) permet de décrire un soliton stabilisé par la structure incohérente. Nous cherchons des solutions de la forme

$$n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \varepsilon^p n^{(0)}(\varepsilon^q \mathbf{k}, \varepsilon^r \mathbf{x}, \varepsilon^s t), \quad A(\mathbf{x}, t) = \varepsilon^v A^{(0)}(\varepsilon^v \mathbf{x}, \varepsilon^z t), \quad (4.76)$$

où  $\varepsilon \ll 1$  est une petite quantité sans dimension qui caractérise le ratio d'échelle entre les différents longueurs caractéristiques et amplitudes des champs cohérents et incohérents. Avec (4.76) nous avons aussi  $N(\mathbf{x}, t) = \varepsilon^{p-dq} N^{(0)}(\varepsilon^r \mathbf{x}, \varepsilon^s t)$  avec  $N^{(0)}(\mathbf{X}, T) = \int n^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{X}, T) d\mathbf{K}$ . Nous cherchons des solutions avec  $r < w$ , c'est-à-dire, nous cherchons un soliton dont le rayon est petit par rapport au rayon typique de la structure incohérente.

(I) Nous regardons d'abord les équations à échelle du soliton. Si  $\mathbf{x} = \varepsilon^{-w} \mathbf{X}$ ,  $t = \varepsilon^{-z} T$ , alors

$$\begin{aligned} (U_d * |A|^2)A(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^{3v-2w} (U_d * |A^{(0)}|^2)A^{(0)}(\mathbf{X}, T), \\ \Delta_{\mathbf{x}}A(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^{v+2w} \Delta_{\mathbf{X}}A^{(0)}(\mathbf{X}, T), \\ \partial_t A(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^{v+z} \partial_T A^{(0)}(\mathbf{X}, T). \end{aligned}$$

Nous avons également

$$(U_d * N)(\mathbf{x}, t) = \varepsilon^{p-dq-2r} \int U_d(\mathbf{Y}) N^{(0)}(\mathbf{Y} + \varepsilon^{r-w} \mathbf{X}, T) d\mathbf{Y}.$$

Puisque  $r > w$  nous pouvons développer

$$\begin{aligned} \int U_d(\mathbf{Y}) N^{(0)}(\mathbf{Y} + \varepsilon^{r-w} \mathbf{X}, T) d\mathbf{Y} &= \int U_d(\mathbf{Y}) N^{(0)}(\mathbf{Y}, \varepsilon^{z-s} T) d\mathbf{Y} \\ &+ \varepsilon^{r-w} \mathbf{X} \cdot \left( \int U_d(\mathbf{Y}) \nabla_{\mathbf{Y}} N^{(0)}(\mathbf{Y}, \varepsilon^{z-s} T) d\mathbf{Y} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon^{2r-2w} \mathbf{X} \cdot \left[ \int U_d(\mathbf{Y}) \nabla_{\mathbf{Y}} \otimes \nabla_{\mathbf{Y}} N^{(0)}(\mathbf{Y}, \varepsilon^{z-s} T) d\mathbf{Y} \right] \mathbf{X} + o(\varepsilon^{2r-2w}). \end{aligned}$$

Le premier terme est une constante en  $\mathbf{X}$  qui dépend uniquement de  $T$ . Si  $N^{(0)}$  est à symétrie sphérique alors le second terme est nul et le troisième terme prend la forme

$$\begin{aligned} \int U_d(\mathbf{Y}) N^{(0)}(\mathbf{Y} + \varepsilon^{r-w} \mathbf{X}, T) d\mathbf{Y} &= cste_{\varepsilon} + \frac{1}{2d} \varepsilon^{2r-2w} \left[ \int U_d(\mathbf{Y}) \Delta_{\mathbf{Y}} N^{(0)}(\mathbf{Y}, \varepsilon^{z-s} T) d\mathbf{Y} \right] |\mathbf{X}|^2 \\ &+ o(\varepsilon^{2r-2w}). \end{aligned}$$

Après l'intégration par partie et en utilisant  $\Delta_{\mathbf{Y}} U_d(\mathbf{Y}) = -\eta_d \delta(\mathbf{Y})$ , nous avons

$$\int U_d(\mathbf{Y}) N^{(0)}(\mathbf{Y} + \varepsilon^{r-w} \mathbf{X}, T) d\mathbf{Y} = cste_{\varepsilon} - q_d \varepsilon^{2r-2w} N^{(0)}(0, \varepsilon^{z-s} T) |\mathbf{X}|^2 + o(\varepsilon^{2r-2w}), \quad (4.77)$$

où  $q_d = \eta_d / (2d)$ , et donc

$$(U_d * N)A(\mathbf{x}, t) = cst_{\varepsilon} A^{(0)}(\mathbf{X}, T) - q_d \varepsilon^{v+p-dq-2w} N^{(0)}(0, \varepsilon^{z-s} T) |\mathbf{X}|^2 A^{(0)}(\mathbf{X}, T) + o(\varepsilon^{v+p-dq-2w}).$$

Le terme  $cst_{\varepsilon} A^{(0)}$  ne joue aucun rôle car il donne uniquement un terme de phase temporelle en (4.24). Nous avons besoin que les termes en  $\varepsilon$  soient équilibrés en (4.24) car nous cherchons une forme de solution où un soliton est stabilisé par la structure incohérente. Les termes sont équilibrés si  $3v - 2w = v + p - dq - 2w = v + 2w = v + z$ , ce qui veut dire

$$\frac{p-dq}{2} = 2w = v = z. \quad (4.78)$$

(II) Nous regardons ensuite les équations à l'échelle de la structure incohérente. Si  $\mathbf{x} = \varepsilon^{-r} \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{k} = \varepsilon^{-q} \mathbf{K}$ ,  $t = \varepsilon^{-s} T$ , alors (en utilisant  $r > w$ )

$$\begin{aligned} (U_d * |A|^2)(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^{2v-r(2-d)-wd} U_d(\mathbf{X}) \int |A^{(0)}(\mathbf{X}', \varepsilon^{s-z} T)|^2 d\mathbf{X}' + o(\varepsilon^{2v-r(2-d)-wd}), \\ (U_d * N)(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^{p-dq-2r} U_d * N^{(0)}(\mathbf{X}, T). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \partial_x V(\mathbf{x}, t) \cdot \partial_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) &= \varepsilon^{2p-(d-1)q-r} \partial_{\mathbf{X}}(U_d * N^{(0)})(\mathbf{X}, T) \cdot \partial_{\mathbf{K}} n^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{X}, T) \\ &\quad + \varepsilon^{p+q+2v-r(1-d)-wd} \partial_{\mathbf{X}}(U_d(\mathbf{X}) \int |A^{(0)}(\mathbf{X}', \varepsilon^{s-z} T)|^2 d\mathbf{X}') \cdot \partial_{\mathbf{K}} n^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{X}, T), \\ \mathbf{K} \cdot \partial_{\mathbf{x}} n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) &= \varepsilon^{p-q+r} \mathbf{K} \cdot \partial_{\mathbf{X}} n^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{X}, t), \\ \partial_t n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) &= \varepsilon^{p+s} \partial_T n^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{X}, t). \end{aligned}$$

Nous cherchons des termes équilibrés en (4.25) parmi les composantes venant de la structure incohérente, car nous ne cherchons pas une solution dans laquelle la structure incohérente serait affectée par le soliton. Les termes sont équilibrés à condition que  $2p - (d-1)q - r = p - q + r = p + s$ , ce qui veut dire

$$r = \frac{p - (d-2)q}{2} \quad \text{et} \quad s = \frac{p - dq}{2}. \quad (4.79)$$

(III) Conclusion : Sans perte de généralité, nous pouvons choisir l'échelle de longueur de référence comme étant le rayon du soliton, c'est-à-dire que nous pouvons choisir  $w = 0$ . Ensuite nous obtenons des termes équilibrés dans les équations (4.24) et (4.25) si les conditions (4.78) et (4.79) sont remplies, ce qui signifie

$$w = v = s = z = 0, \quad q = r > 0, \quad p = dq. \quad (4.80)$$

Dans ce cas nous pouvons vérifier que  $p+q+2v-r(1-d)-wd = 2dq > (2d-1)q = 2p-r$ , ce qui montre que le soliton n'a pas d'influence sur la structure incohérente

$$\partial_x V \cdot \partial_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \varepsilon^{dq} \partial_{\mathbf{X}}(U_d * N^{(0)})(\mathbf{X}, T) \cdot \partial_{\mathbf{K}} n^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{X}, T) + o(\varepsilon^{dq}).$$

Nous pouvons poser sans perte de généralité  $q = r = 1$  et  $p = d$ , car le petit paramètre  $\varepsilon$  sans dimension est arbitraire. Nous obtenons alors (4.28) et (4.29), l'équation de NS (4.24) prend la forme

$$i\partial_t A^{(0)}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\alpha}{2} \nabla^2 A^{(0)}(\mathbf{x}, t) - \gamma(U_d * |A^{(0)}|^2)A^{(0)}(\mathbf{x}) + \gamma q_d N^{(0)}(\mathbf{0}, t) |x|^2 A^{(0)}(\mathbf{x}), \quad (4.81)$$

c'est-à-dire, les équations (4.31-4.32), et l'équation WT-Vlasov (4.25) prend la forme (avec  $\mathbf{X} = \varepsilon \mathbf{x}$  et  $\mathbf{K} = \varepsilon \mathbf{k}$ )

$$\partial_t n^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{X}, t) + \alpha \mathbf{K} \cdot \partial_{\mathbf{X}} n^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{X}, t) + \gamma \partial_{\mathbf{X}}(U_d * N^{(0)})(\mathbf{X}, t) \cdot \partial_{\mathbf{K}} n^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{X}, t) = 0, \quad (4.82)$$

c'est-à-dire, les équations (4.33-4.34).

Remarque : Ici nous avons considéré une situation dans laquelle le soliton est stabilisé par la structure incohérente. Nous avons trouvé que, nécessairement, le rayon du soliton est beaucoup plus grand que le rayon de la structure incohérente et beaucoup plus grand la longueur de corrélation de la structure incohérente, et les amplitudes typiques de  $N$  et  $|A|^2$  sont du même ordre. Si nous avons considéré une situation dans laquelle le soliton est stabilisé par lui-même, sans interaction avec la structure incohérente, alors l'amplitude de  $|A|^2$  aurait été plus grande que celle de  $N$ .

## Appendice C : Soliton binaire, dynamique 3D

Nous étudions la dynamique du système soliton binaire pour  $d = 1$  et  $d = 3$ . Le Lagrangien de l'équation de NS effective (4.31-4.32) est

$$\mathcal{L} = \int \frac{i}{2}(A\partial_t A^* - \partial_t A A^*) + \frac{\alpha}{2}|\nabla A|^2 + \frac{1}{2}V_S(x)|A|^2 + q_d\gamma N_0|\mathbf{x}|^2|A|^2 d\mathbf{x}, \quad (4.83)$$

où  $V_S(\mathbf{x}, t) = -\gamma \int U_d(\mathbf{x} - \mathbf{y})|A|^2(\mathbf{y}, t)d\mathbf{y}$ , avec  $q_1 = 1$ ,  $q_3 = 2\pi/3$ ,  $U_1(x) = -|x|$ ,  $U_3(\mathbf{x}) = 1/|\mathbf{x}|$ , et  $N_0(t) = N(\mathbf{x} = 0, t)$  est la densité moyenne de la structure incohérente en son centre. Nous considérons l'ansatz Gaussien pour un soliton à deux composantes :

$$A(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^2 a_j(t) \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{o,j}(t)|^2}{2R_j^2(t)} + ib_j(t)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{o,j}(t)|^2 + i\mathbf{k}_{o,j}(t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{o,j}(t)) + i\nu_j(t)\right).$$

Le Lagrangien effectif dépend de  $a_j(t)$ ,  $R_j(t)$ ,  $b_j(t)$ ,  $\nu_j(t)$ ,  $\mathbf{x}_{o,j}(t)$  et  $\mathbf{k}_{o,j}(t)$  et leurs dérivées temporelles. Il peut être décomposé en trois parties. Les deux premières parties dépendent des deux composantes individuelles, la troisième partie représente l'interaction entre les deux composantes  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j &= M_{S,j} \left( \partial_t \nu_j + d \partial_t b_j \frac{R_j^2}{2} - \mathbf{k}_{o,j} \cdot \partial_t \mathbf{x}_{o,j} \right) + \frac{\alpha M_{S,j}}{4} \left( \frac{d}{R_j^2} + 4db_j^2 R_j^2 + 2|\mathbf{k}_{o,j}|^2 \right) \\ &\quad - \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} M_{S,j}^2 R_j^{2-d} - \gamma N_0 q_d M_{S,j} \left( \frac{d}{2} R_j^2 + |\mathbf{x}_{o,j}|^2 \right), \\ \mathcal{L}_{12} &= -\gamma M_{S,1} M_{S,2} |\mathbf{x}_{o,1} - \mathbf{x}_{o,2}|^{2-d}, \end{aligned}$$

où  $M_{S,j} = a_j^2 \pi^{d/2} R_j^d$  est la masse de la  $j$ -ème composante de la structure cohérente et nous avons supposé que  $|\mathbf{x}_{o,1} - \mathbf{x}_{o,2}| \gg R_1, R_2$  dans le but de simplifier  $\mathcal{L}_{12}$ . Les équations de l'évolution des paramètres de l'ansatz sont alors dérivées du Lagrangien effectif en utilisant les équations d'Euler-Lagrange  $\delta \int \mathcal{L} dt = 0$  [179]. Nous obtenons l'équation différentielle fermée pour la largeur  $R_j$  de la  $j$ -ème composante de la structure cohérente :

$$\partial_t^2 R_j = \frac{\alpha}{R_j^3} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha \gamma M_{S,j}}{d R_j^{d-1}} - 2q_d \alpha \gamma N_0 R_j. \quad (4.84)$$

Nous obtenons également le système couplé d'équations différentielles pour les centres  $\mathbf{x}_{o,j}$  et leurs quantités de mouvement  $\mathbf{k}_{o,j}$  du soliton :

$$\partial_t \mathbf{x}_{o,j} = \alpha \mathbf{k}_{o,j}, \quad j = 1, 2, \quad (4.85)$$

$$\partial_t \mathbf{k}_{o,j} = -2q_d \gamma N_0 \mathbf{x}_{o,j} - \gamma M_{S,3-j} \frac{\mathbf{x}_{o,j} - \mathbf{x}_{o,3-j}}{|\mathbf{x}_{o,j} - \mathbf{x}_{o,3-j}|^d}, \quad j = 1, 2. \quad (4.86)$$

### A. Relation masse-rayon pour le soliton

Nous examinons d'abord l'équation (4.84) pour la largeur  $R_j(t)$  du soliton. L'énergie est de la forme  $\frac{1}{2}(\partial_t R_j)^2 + W(R_j)$ , avec le potentiel effectif

$$W_j(R_j) = \frac{\alpha^2}{2R_j^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha \gamma M_{S,j}}{d(d-2)R_j^{d-2}} + q_d \alpha \gamma N_0 R_j^2.$$

L'équation (4.84) possède un équilibre stable  $R_j = R_{S,j}$  à condition que  $\partial_{R_j} W(R_{S,j}) = 0$  et  $\partial_{R_j}^2 W_j(R_{S,j}) > 0$ . Pour toute masse positive  $M_S$ , il existe une solution stable unique avec un rayon  $R_{S,j}(M_{S,j})$  qui est la solution unique à l'équation quartique

$$M_{S,j} = \sqrt{2\pi} d R_{S,j}^d \bar{\rho} \left( (\Lambda/R_{S,j})^4 - q_d N_0 / \bar{\rho} \right). \quad (4.87)$$

### B. Mouvement du soliton dans l'espace des phases

#### 1. Période de révolution orbitale $\tau_{cm}$

Le barycentre du soliton  $\mathbf{X}_{cm} = (M_{S,1}x_{o,1} + M_{S,2}x_{o,2})/(M_{S,1} + M_{S,2})$ ,  $\mathbf{K}_{cm} = (M_{S,1}\mathbf{k}_{o,1} + M_{S,2}\mathbf{k}_{o,2})/(M_{S,1} + M_{S,2})$  satisfait

$$\partial_t \mathbf{X}_{cm} = \partial_{\mathbf{K}_{cm}} H_{cm} = \alpha \mathbf{K}_{cm}, \quad (4.88)$$

$$\partial_t \mathbf{K}_{cm} = -\partial_{\mathbf{X}_{cm}} H_{cm} = -2q_d \gamma N_0 \mathbf{X}_{cm}, \quad (4.89)$$

avec l'Hamiltonien conservé  $H_{cm} = q_d \gamma N_0 |\mathbf{X}_{cm}|^2 + \frac{\alpha}{2} |\mathbf{K}_{cm}|^2$ . Le barycentre de la structure cohérente présente alors un mouvement périodique ellipsoïdal dans l'espace des phases. La période de révolution est  $\tau_{cm} = \sqrt{2\pi} / \sqrt{q_d \alpha \gamma N_0}$ .

#### 2. Le cas $d = 3$ : Mouvement ellipsoïdal

Pour  $d = 3$ , le mouvement de  $\mathbf{X}_{cm}$  se situe dans un plan (déterminé par les conditions initiales  $\mathbf{X}_{cm}(0)$  et  $\partial_t \mathbf{X}_{cm}(0)$ ) et suit une ellipse. Dans le plan de la trajectoire, le mouvement de  $\mathbf{X}_{cm}$  prend la forme  $\mathbf{X}_{cm} = (\mathcal{R}(\theta) \cos \theta, \mathcal{R}(\theta) \sin \theta, 0)$  où

$$\mathcal{R}(\theta) = \frac{c_1^{-1/4}}{\sqrt{w_- \cos^2 \theta + w_+ \sin^2 \theta}}, \quad w_{\pm} = C \pm \sqrt{C^2 - 1}, \quad \theta(t) = \arctan \left( w_- \tan(c_o \sqrt{c_1} t) \right),$$

$c_o = \partial_t \mathbf{X}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{X}_{\text{cm}}^{\perp}$  est une constance de mouvement, avec  $\mathbf{X}_{\text{cm}}^{\perp} = (-\mathcal{R}(\theta) \sin \theta, \mathcal{R}(\theta) \cos \theta, 0)$ ,

$$C = \frac{1}{2\sqrt{c_1} |\mathbf{X}_{\text{cm}}|^2} + \frac{\sqrt{c_1} |\mathbf{X}_{\text{cm}}|^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{c_1} c_o^2} \frac{(\mathbf{X}_{\text{cm}} \cdot \partial_t \mathbf{X}_{\text{cm}})^2}{|\mathbf{X}_{\text{cm}}|^2}$$

est une constante du mouvement, et  $c_1 = \frac{4\pi\alpha\gamma N_0}{3c_o^2}$ . Le mouvement suit une ellipse

$$w_- \mathbf{X}_{\text{cm},1}^2 + w_+ \mathbf{X}_{\text{cm},2}^2 = c_1^{-1/2}, \quad (4.90)$$

où nous avons supposé que le rayon est maximal au temps  $t = 0$  et  $\theta(t = 0) = 0$ .

### C. Mouvement relatif du soliton binaire

Le mouvement relatif du soliton binaire est défini par  $\mathbf{X}_o = \mathbf{x}_{o,1} - \mathbf{x}_{o,2}$ ,  $\mathbf{K}_o = \mathbf{k}_{o,1} - \mathbf{k}_{o,2}$ , qui satisfait

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{X}_o &= \partial_{\mathbf{K}_o} H_o = \alpha \mathbf{K}_o, \\ \partial_t \mathbf{K}_o &= -\partial_{\mathbf{X}_o} H_o = -2q_d \gamma N_0 \mathbf{X}_o - \gamma (M_{S,1} + M_{S,2}) \mathbf{X}_o / |\mathbf{X}_o|^d, \end{aligned}$$

où l'Hamiltonien conservé s'écrit  $H_o = q_d \gamma N_0 |\mathbf{X}_o|^2 + \gamma (M_{S,1} + M_{S,2}) |\mathbf{X}_o|^{2-d} + \alpha |\mathbf{K}_o|^2 / 2$ .

#### 1. Le cas $d = 1$ : Période de résolution $\tau_{\text{bin}}$ du soliton binaire

La trajectoire prend la forme de deux demi-ellipses reliées par deux points auxquels la dérivée de la trajectoire est discontinue. Le mouvement relatif du soliton binaire est alors périodique dans l'espace des phases avec une période de révolution

$$\tau_{\text{bin}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\xi(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (4.91)$$

avec  $U(x) = \gamma N_0 x^2 + \gamma (M_{S,1} + M_{S,2}) x$  et

$$\xi(E) = \left( -\gamma (M_{S,1} + M_{S,2}) + \sqrt{\gamma^2 (M_{S,1} + M_{S,2})^2 + 4\gamma N_0 E} \right) / (2\gamma N_0).$$

L'intégration de l'équation (4.91) donne l'équation 4.38.

#### 2. Le cas $D = 3$ : Mouvement du soliton binaire

Le mouvement de  $\mathbf{X}_o(t)$  se situe dans un plan. Dans le plan de la trajectoire, le mouvement de  $\mathbf{X}_o$  est de la forme  $\mathbf{X}_o = (\mathcal{R}(\theta) \cos \theta, \mathcal{R}(\theta) \sin \theta, 0)$ , où  $u(\theta) = 1/\mathcal{R}(\theta)$  est solution de  $\partial_\theta^2 u + u = \frac{c_1}{u^3} + c_2$ , et  $\theta(t)$  est solution de  $\partial_t \theta = \frac{c_o}{\mathcal{R}(\theta)^2}$ , où  $c_o = \partial_t \mathbf{X}_o \cdot \mathbf{X}_o^\perp$  est une constante du mouvement,  $\mathbf{X}_o^\perp = (-\mathcal{R}(\theta) \sin \theta, \mathcal{R}(\theta) \cos \theta, 0)$ . Nous avons la constante du mouvement

$$C = \frac{1}{2\sqrt{c_1}|\mathbf{X}_o|^2} + \frac{\sqrt{c_1}|\mathbf{X}_o|^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{c_1}c_o^2} \frac{(\mathbf{X}_o \cdot \partial_t \mathbf{X}_o)^2}{|\mathbf{X}_o|^2} - \frac{c_2}{\sqrt{c_1}|\mathbf{X}_o|},$$

avec  $c_1 = 2q_d \alpha \gamma N_0 / c_o^2$ ,  $c_2 = \alpha \gamma (M_{S,1} + M_{S,2}) / c_o^2$ . Notons que la fonction  $u$  ou  $\mathcal{R}$  est périodique en  $\theta$ , mais sa période n'est pas  $2\pi$  (c'est  $2\pi$  si  $c_1 = 0$  ou  $c_2 = 0$ ). Ainsi le mouvement relatif du soliton binaire n'est pas une orbite fermée et n'est pas périodique, excepté pour certaines valeurs particulières des paramètres, voir Figure 4.11.

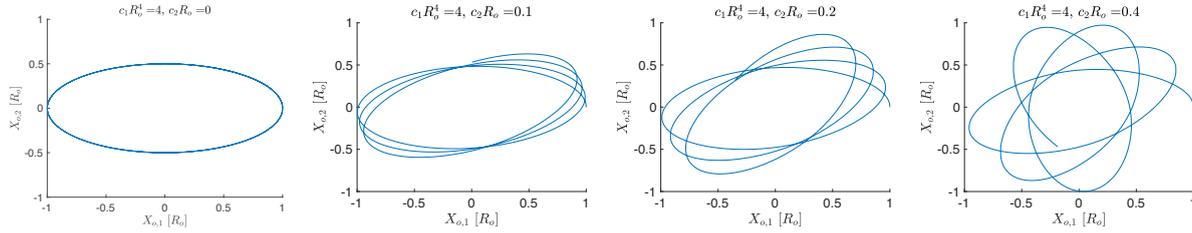


FIGURE 4.11 – **Précession du périhélie du soliton binaire 3D** : Trajectoire planaire du mouvement relatif du bisoliton  $\mathbf{X}_o(t)$  pour  $t \in [0, 10\tau_o]$ ,  $\mathbf{X}_o(0) = (R_o, 0, 0)$ ,  $\partial_t \mathbf{X}_o(0) \cdot \mathbf{X}_o(0) = 0$ ,  $c_o = \partial_t \mathbf{X}_o(0) \cdot \mathbf{X}_o(0)^\perp = R_o^2 / \tau_o$ , et pour différentes valeurs de  $(c_1, c_2)$ .

### 3. Calcul des périodes de révolution du soliton unique et du soliton binaire dans les simulations de l'équation de NS effective

L'évaluation dans les simulations de la période de révolution du soliton unique en Figure 4.6 et du centre de masse du soliton binaire en Figure 4.5 nécessite la détermination de la densité  $N_0$  au centre de la structure incohérente, ainsi que la ou les masses du ou des solitons  $M_{S,(j)}$ . La masse du soliton est calculée dans l'espace des phases depuis la fonction de Husimi  $W(k, x, t)$ . Dans le cas de la Figure 4.6, nous obtenons  $M_S/M = 0.039 \pm 0.002$ ; dans le cas de la Figure 4.5,  $M_{S,1}/M = 0.037 \pm 0.002$ ,  $M_{S,2}/M = 0.025 \pm 0.002$ . Les incertitudes sur les masses sont déterminées à partir de la variance des fluctuations sur un intervalle de temps pertinent,  $N_0$  est retrouvé en calculant les moyennes spatiales et temporelles de  $\langle |\psi(x, t)|^2 \rangle$  sur une petite fenêtre spatiale  $\Delta_x \simeq 7.5\Lambda$  et un intervalle de temps pertinent. Afin de ne prendre compte que de la contribution de la structure incohérente, nous avons retiré la contribution de la masse du ou des solitons  $M_{S,(j)}$  au calcul de  $N_0$ . Dans le cas de la Figure 4.6, nous obtenons  $N_0/\bar{\rho} = 4.2 \pm 0.2$ ; en Figure 4.5  $N_0/\bar{\rho} = 3.9 \pm 0.2$  (les incertitudes étant déterminées par la variance des fluctuations). Cela donne pour un soliton unique en Figure 4.5  $\tau_{\text{cm}}/\tau = 1.52 \pm 0.04$ ; et pour le soliton binaire en Figure 4.6  $\tau_{\text{cm}}/\tau = 1.56 \pm 0.04$ , et  $\tau_{\text{bin}}/\tau = 1.43 \pm 0.04$ . Comme discuté en section 4.5.1, ces valeurs sont en accord avec celles observées dans les simulations de l'équation de NS effective.

## Appendice D : Le théorème du viriel pour l'équation WT-Vlasov en dimension spatiale $d$

Le moment d'inertie peut être défini :

$$I = \int |\mathbf{x}|^2 N(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint |\mathbf{x}|^2 n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{k}.$$

En prenant les dérivées temporelles et en utilisant les équations WT-Vlasov (4.33-4.34), nous obtenons

$$\partial_t^2 I = \frac{2\alpha^2}{(2\pi)^d} \iint |\mathbf{k}|^2 n(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{k} - 2\alpha \int \mathbf{x} \cdot \partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}, t) N(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

avec  $V(\mathbf{x}, t) = -\gamma \int U_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) N(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}$ .

### A. Le cas $d = 1$

En prenant en compte  $U_1(x) = -|x|$ , nous obtenons

$$\int x \partial_x V(x, t) N(x, t) dx = -\frac{\gamma}{2} \iint N(x, t) U_1(x - y) N(y, t) dx dy.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2\alpha} \partial_t^2 I = 2\mathcal{H}_l(t) - \mathcal{H}_{nl}(t).$$

Si le système est dans un régime stationnaire, alors  $\partial_t^2 I = 0$  et  $2\mathcal{H}_l = \mathcal{H}_{nl}$ .

### B. Le cas $d = 2$

En prenant en compte  $U_2(\mathbf{x}) = -\log |\mathbf{x}|$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \mathbf{x} \cdot \partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}, t) N(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \gamma \iint \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} N(\mathbf{y}, t) N(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \frac{\gamma}{2} \iint (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} N(\mathbf{y}, t) N(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \frac{\gamma}{2} \mathcal{M}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent nous avons :

$$\frac{1}{4\alpha} \partial_t^2 I = \mathcal{H}_l(t) - \frac{\gamma}{4} \mathcal{M}^2.$$

Si le système est dans un régime stationnaire, alors  $\partial_t^2 I = 0$  et  $\mathcal{H}_l = \frac{\gamma}{4} \mathcal{M}^2$ .

C. Le cas  $d = 3$

En prenant en compte  $U_3(\mathbf{x}) = 1/|\mathbf{x}|$ , et en procédant de la même façon que pour le cas  $d = 2$ , nous obtenons :

$$\int \mathbf{x} \cdot \partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}, t) N(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = -\mathcal{H}_{nl}.$$

Alors

$$\frac{1}{4\alpha} \partial_t^2 I = \mathcal{H}_l(t) + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{nl}.$$

Si le système est dans un régime stationnaire, alors  $\partial_t^2 I = 0$  et  $\mathcal{H}_{nl} = -2\mathcal{H}_l$ .

## Appendice E : La structure incohérente pour $d = 1$ et $d = 3$

A. Le cas  $d = 1$

1. Masse et énergie de la structure incohérente

Dérivation de l'équation (4.44) : La masse s'écrit  $\mathcal{M} = \int N(x) dx = \frac{N_0}{\sqrt{\eta_p}} \int d\bar{x} u^p(\bar{x})$ . En utilisant  $\eta_p = 2\gamma r_p^{1/p} N_{st}(0)^{1-1/p}$  et  $r_p = \frac{d_0}{\sqrt{2\pi\alpha}} \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)}$ , on obtient après simplification l'expression de la masse  $\mathcal{M}$  en équation (4.44).

Dérivation de l'équation (4.45) : La contribution linéaire de l'Hamiltonien s'écrit pour  $d = 1$  [7]

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{2\pi} \iint dk dx \frac{\alpha k^2}{2} n(k, x, t). \quad (4.92)$$

Nous faisons la substitution  $\frac{\alpha k^2}{2} = h - V_{st}$  et nous calculons l'intégrale sur  $k$  en procédant comme pour la dérivation de la solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov

$$\mathcal{H}_l = \frac{d_0}{2\sqrt{2\pi\alpha}} \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+2)} \frac{1}{r_p^{1+1/p}} \int dx N_{st}(x)^{1+1/p}, \quad (4.93)$$

où nous avons utilisé l'équation (4.41). En procédant de la même façon que pour la masse  $\mathcal{M}$ , nous obtenons (4.45).

Dérivation de l'équation (4.46) : La contribution non linéaire de l'Hamiltonien s'écrit pour  $d = 1$  [7]

$$\mathcal{H}_{nl} = -\frac{\gamma}{2} \iint dx dy U_1(x-y) N_{st}(x) N_{st}(y) = \frac{N_{st}(0)^{\frac{p+3}{2p}}}{\sqrt{2\gamma} r_p^{\frac{3}{2p}}} \left[ \frac{1}{4} \iint_{[-\bar{x}_p, \bar{x}_p]^2} |\bar{x} - \bar{y}| u(\bar{x})^p u(\bar{y})^p d\bar{x} d\bar{y} \right],$$

ce qui donne l'équation (4.46).

Dérivation de l'équation (4.47) : D'une part nous utilisons l'équation d'Emden (4.43), en intégrant par partie, et en utilisant  $\partial_{\bar{x}}u(0) = 0$  and  $u(\bar{x}_p) = 0$ , nous avons

$$F_{1,p+1} = - \int_0^{\bar{x}_p} u \partial_{\bar{x}}^2 u d\bar{x} = -[u \partial_{\bar{x}} u]_0^{\bar{x}_p} + \int_0^{\bar{x}_p} (\partial_{\bar{x}} u)^2 d\bar{x} = \int_0^{\bar{x}_p} (\partial_{\bar{x}} u)^2 d\bar{x}. \quad (4.94)$$

D'autre part, en intégrant par partie

$$F_{1,p+1} = \int_0^{\bar{x}_p} (\partial_{\bar{x}} \bar{x}) u^{p+1}(\bar{x}) d\bar{x} = [\bar{x} u^{p+1}]_0^{\bar{x}_p} - \int_0^{\bar{x}_p} \bar{x} \partial_{\bar{x}} (u^{p+1}) d\bar{x} = -(p+1) \int_0^{\bar{x}_p} \bar{x} u^p \partial_{\bar{x}} u d\bar{x},$$

de façon à avoir en utilisant à nouveau l'équation d'Emden (4.43) et en intégrant par partie :

$$\begin{aligned} F_{1,p+1} &= (p+1) \int_0^{\bar{x}_p} \bar{x} \partial_{\bar{x}}^2 u \partial_{\bar{x}} u d\bar{x} = \frac{p+1}{2} \left( [\bar{x} (\partial_{\bar{x}} u)^2]_0^{\bar{x}_p} - \int_0^{\bar{x}_p} (\partial_{\bar{x}} u)^2 d\bar{x} \right) \\ &= \frac{p+1}{2} \left( \bar{x}_p (\partial_{\bar{x}} u)^2(\bar{x}_p) - \int_0^{\bar{x}_p} (\partial_{\bar{x}} u)^2 d\bar{x} \right). \end{aligned}$$

Nous substituons l'équation (4.94) dans cette égalité, ce qui donne :

$$F_{1,p+1} = \frac{p+1}{p+3} \bar{x}_p (\partial_{\bar{x}} u(\bar{x}_p))^2. \quad (4.95)$$

Nous avons, en utilisant l'équation d'Emden (4.43) et en intégrant par partie :

$$\begin{aligned} G_{1,p} &= - \int_{-\bar{x}_p}^{\bar{x}_p} d\bar{x} u^p(\bar{x}) \left( \int_{-\bar{x}_p}^{\bar{x}} d\bar{y} (\bar{x} - \bar{y}) \partial_{\bar{y}}^2 u(\bar{y}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}_p} d\bar{y} (\bar{x} - \bar{y}) \partial_{\bar{y}}^2 u(\bar{y}) \right) \\ &= - \int_{-\bar{x}_p}^{\bar{x}_p} d\bar{x} u^p(\bar{x}) \left( [(\bar{x} - \bar{y}) \partial_{\bar{y}} u(\bar{y})]_{-\bar{x}_p}^{\bar{x}} + \int_{-\bar{x}_p}^{\bar{x}} d\bar{y} \partial_{\bar{y}} u(\bar{y}) + [(\bar{y} - \bar{x}) \partial_{\bar{y}} u(\bar{y})]_{\bar{x}}^{\bar{x}_p} - \int_{\bar{x}}^{\bar{x}_p} d\bar{y} \partial_{\bar{y}} u(\bar{y}) \right) \\ &= -2 \int_{-\bar{x}_p}^{\bar{x}_p} d\bar{x} u^p(\bar{x}) \left( \bar{x}_p \partial_{\bar{x}} u(\bar{x}_p) + u(\bar{x}) \right). \end{aligned}$$

Puisque  $\int_{-\bar{x}_p}^{\bar{x}_p} u^p(\bar{x}) d\bar{x} = -2 \int_0^{\bar{x}_p} \partial_{\bar{x}}^2 u(\bar{x}) d\bar{x} = -2 \partial_{\bar{x}} u(\bar{x}_p)$  nous avons par (4.95) :

$$G_{1,p} = 4 \left( \frac{p+3}{p+1} - 1 \right) F_{1,p+1} = \frac{8}{p+1} F_{1,p+1},$$

ce qui est le résultat attendu.

## 2. Détermination des paramètres de la structure incohérente stationnaire dans les simulations

Le potentiel  $V_L$  a pour moyenne zéro, alors nous avons  $V_L(x) = V_{st}(x) - \langle V_{st} \rangle$  et

$$\mathcal{H}_{nl,L} = \frac{1}{2} \int_{[-L/2, L/2]} \left( V_{st}(x) - \langle V_{st} \rangle \right) N_{st}(x) dx, \quad \langle V_{st} \rangle = \frac{1}{L} \int_{[-L/2, L/2]} V_{st}(y) dy.$$

Le potentiel  $V_{st}$  est égal à  $-r_p^{-1/p}N_{st}(x)$  dans le support  $[-x_p, x_p]$  de  $N_{st}$  ( $x_p = \bar{x}_p/\sqrt{\eta_p}$ ) et est une fonction affine en dehors du support, qui s'annule au bord  $x_p$  du support avec une dérivée constante  $\gamma\mathcal{M}$  (la dérivée  $V_{st}$  est continue et  $\partial_x V_{st}(x_p) = 2\gamma \int_0^{x_p} N_{st}(x)dx = \gamma\mathcal{M}$ ). Nous trouvons

$$\begin{aligned}\langle V_{st} \rangle &= \frac{2}{L} \left\{ \int_0^{x_p} V_{st}(x)dx + \int_{x_p}^{L/2} V_{st}(x)dx \right\} \\ &= \frac{2\gamma}{L} \left\{ -\frac{F_{1,1}}{4F_{1,p}^3} N_{st}(0)^{-2} \mathcal{M}^3 + \frac{1}{2} \mathcal{M} \left( \frac{L}{2} - x_p \right)^2 \right\}.\end{aligned}$$

Si nous négligeons le dernier terme car  $x_p$  est proche de  $L/2$ , alors nous avons

$$\mathcal{H}_{nl,L} = -\frac{\gamma}{4} \frac{F_{1,p+1}}{F_{1,p}^3} N_{st}(0)^{-1} \mathcal{M}^3 + \frac{\gamma}{4L} \frac{F_{1,1}}{F_{1,p}^3} N_{st}(0)^{-2} \mathcal{M}^4.$$

En utilisant la valeur  $\mathcal{H}_{nl,L} = -\gamma\mathcal{M}^2 L/24$  par l'équation (4.51), nous obtenons la relation

$$-\frac{1}{6} = -\frac{F_{1,p+1}}{F_{1,p}^3} \left( \frac{\mathcal{M}}{N_{st}(0)L} \right) + \frac{F_{1,1}}{F_{1,p}^3} \left( \frac{\mathcal{M}}{N_{st}(0)L} \right)^2. \quad (4.96)$$

D'autre part, en utilisant (4.44) et (4.45),

$$\frac{\mathcal{H}_l}{\mathcal{M}^3} = \frac{\gamma}{4} \frac{F_{1,p+1}}{(p+1)F_{1,p}^3} N_{st}(0)^{-1}.$$

En utilisant  $\mathcal{H}_l = \gamma\mathcal{M}^2 L/24$  par l'équation (4.51), nous obtenons la relation

$$\frac{\mathcal{M}}{N_{st}(0)L} = \frac{(p+1)F_{1,p}^3}{6F_{1,p+1}}. \quad (4.97)$$

En substituant dans l'équation (4.96), nous obtenons l'équation algébrique

$$\frac{6F_{1,p+1}^2}{F_{1,1}F_{1,p}^3} = \frac{(p+1)^2}{6p}, \quad (4.98)$$

ce qui permet de déterminer  $p$  et d'obtenir (4.52). Alors nous avons  $N_{st}(0)$  depuis (4.97) ce qui donne (4.53). Finalement, nous notons qu'en utilisant l'équation (4.44) et l'expression de  $r_p = \frac{d_0}{\sqrt{2\pi\alpha}} \frac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(p+1)}$ , nous obtenons

$$\frac{N_{st}(0)}{d_0} = \left( \frac{\gamma\bar{\rho}L^2 F_{1,p}}{12F_{1,p+1}} \right)^p \frac{(p+1)^p \Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi\alpha} \Gamma(p+1)} \simeq 8.6 \cdot 10^{-3} \frac{(\gamma\bar{\rho}L^2)^p}{\sqrt{\alpha}}.$$

## B. Le cas $d = 3$

### 1. Solution stationnaire pour la structure incohérente

Le potentiel parabolique qui confine le soliton en équations (4.31-4.32) peut être caractérisé en dérivant la solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov (4.33-4.34). Ici nous étendons à  $d = 3$  l'analyse reportée pour  $d = 1$ . En suivant la procédure usuelle [155], nous rappelons que toute fonction  $n_{st}(h)$  de l'Hamiltonien réduit  $h = \frac{\alpha}{2}|\mathbf{k}|^2 + V_{st}(\mathbf{x})$  est une solution stationnaire de l'équation WT-Vlasov (4.33-4.34). En supposant une solution à symétrie sphérique pour  $x = |\mathbf{x}|$  et  $k = |\mathbf{k}|$ , nous avons  $N_{st}(x) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_c(x)} n_{st}(k, x) k^2 dk$  où la fréquence de coupure est déterminée par la condition que les particules sont piégées par le potentiel  $h \leq 0$ , c-a-d,  $k_c(x) = \sqrt{-2V_{st}(x)/\alpha}$ . Nous avons alors les équations auto-consistantes :

$$N_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2\alpha^{\frac{3}{2}}}} \int_{V_{st}}^0 n_{st}(h) \sqrt{h - V_{st}} dh, \quad (4.99)$$

$$(\partial_x^2 + 2x^{-1}\partial_x)V_{st} = 4\pi\gamma N_{st}, \quad (4.100)$$

où  $(\partial_x^2 + 2x^{-1}\partial_x)$  est le Laplacien à symétrie sphérique. Nous cherchons une solution de la forme  $n_{st}(h) = d_0 h^{p-3/2}$ , où  $d_0$  et  $p$  sont constants. Par intégration nous obtenons

$$N_{st}(x) = r_p \left( -V_{st}(x) \right)^p, \quad (4.101)$$

où  $r_p = \frac{d_0}{(2\pi\alpha)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)}$ . En appliquant le Laplacien, nous obtenons de part et d'autre de (4.101), la forme suivante de l'équation d'Emden pour la structure incohérente  $N_{st}(x)$  :

$$(\partial_x^2 + 2x^{-1}\partial_x) \left( N_{st}^{\frac{1}{p}} \right) = -4\pi\gamma r_p^{\frac{1}{p}} N_{st}. \quad (4.102)$$

Nous introduisons la variable spatiale  $\bar{x} = \sqrt{\eta_p}x$  et l'amplitude  $u(\bar{x}) = (N_{st}(\bar{x}/\sqrt{\eta_p})/N_{st}(0))^{\frac{1}{p}}$ , avec  $\eta_p = 4\pi\gamma r_p^{\frac{1}{p}} N_{st}^{1-\frac{1}{p}}(0)$  et  $u(\bar{x}) \geq 0$ . L'équation (4.102) retrouve alors la forme conventionnelle de l'équation d'Emden.

$$(\partial_{\bar{x}}^2 + 2\bar{x}^{-1}\partial_{\bar{x}})u(\bar{x}) = -u(\bar{x})^p, \quad (4.103)$$

avec les conditions initiales :  $u(0) = 1$  and  $\partial_{\bar{x}}u(0) = 0$ .

Nous avons une famille de solutions stationnaires qui dépendent des trois paramètres  $p$ ,  $N_{st}(0)$  et  $N_{st}(0)/d_0$ . En étendant l'analyse développée pour  $d = 1$ , nous pouvons calculer leurs masses et leurs énergies. La masse  $\mathcal{M} = \int d\mathbf{x} N_{st}(x) = 4\pi \int_0^\infty N_{st}(x) x^2 dx$  est

$$\mathcal{M} = N_{st}(0)^{\frac{3-p}{2p}} (4\pi\gamma)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{d_0}{(2\pi\alpha)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)} \right)^{-\frac{3}{2p}} F_{3,p}, \quad (4.104)$$

où  $F_{3,p} = 4\pi \int_0^{\bar{x}^p} \bar{x}^2 u(\bar{x})^p d\bar{x}$  et  $u(\bar{x})$  est solution de l'équation d'Emden (4.103). L'énergie totale (Hamiltonien) de l'équation de WT-Vlasov (4.33-4.34) a une contribution linéaire  $\mathcal{H}_l = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{k} \frac{\alpha k^2}{2} n_{st}(k, x) = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty x^2 dx \int_0^\infty k^2 dk \frac{\alpha k^2}{2} n_{st}(k, x)$  et une contribution non linéaire  $\mathcal{H}_{nl} = -\frac{\gamma}{2} \iint d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{N_{st}(x)N_{st}(y)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = -8\pi^2\gamma \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy xy \min(x, y) N_{st}(x)N_{st}(y)$ , nous trouvons alors

$$\mathcal{H}_l = \frac{6\pi}{p+1} N_{st}(0)^{\frac{5-p}{2p}} (4\pi\gamma)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{d_0}{(2\pi\alpha)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)} \right)^{-\frac{5}{2p}} F_{3,p+1}, \quad (4.105)$$

$$\mathcal{H}_{nl} = -2\pi N_{st}(0)^{\frac{5-p}{2p}} (4\pi\gamma)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{d_0}{(2\pi\alpha)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)} \right)^{-\frac{5}{2p}} G_{3,p}, \quad (4.106)$$

où  $G_{3,p} = \int_0^{\bar{x}^p} d\bar{x} \int_0^{\bar{y}^p} d\bar{y} \bar{x}\bar{y} \min(\bar{x}, \bar{y}) u(\bar{x})^p u(\bar{y})^p$  et  $F_{3,p+1} = \int_0^{\bar{x}^p} d\bar{x} \bar{x}^2 u(\bar{x})^{p+1}$ . Nous avons  $\frac{6F_{3,p+1}}{p+1} = G_{3,p}$ , ce qui montre que  $\mathcal{H}_{nl} = -2\mathcal{H}_l$ . Ceci est en accord avec le théorème du viriel. En effet, le théorème du viriel pour l'équation WT-Vlasov fournit une relation générale entre les moments d'inertie  $I(t) = \int |\mathbf{x}|^2 N(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ , et les contributions linéaires ainsi que non linéaire de l'Hamiltonien. Dans un état stationnaire,  $\partial_t^2 I = 0$ , les énergies vérifient  $2\mathcal{H}_l + \mathcal{H}_{nl} = 0$ , voir [Appendice D](#). Cette relation est en effet satisfaite par les solutions stationnaires présentées dans cet Appendice.

Finalement, le rayon  $k_c = \sqrt{-2V_{st}(0)/\alpha}$  du spectre à symétrie sphérique à support compact dans  $[0, k_c]$ , est

$$k_c = \sqrt{\frac{2}{\alpha} N_{st}(0)^{\frac{1}{2p}} \left( \frac{d_0}{(2\pi\alpha)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(p - \frac{1}{2})}{\Gamma(p + 1)} \right)^{-\frac{1}{2p}}}. \quad (4.107)$$

## 2. Détermination des paramètres de la structure incohérente stationnaire dans les simulations

Comme dans le cas  $d = 1$ , la solution stationnaire est caractérisée par trois paramètres  $p$ ,  $N_{st}(0)$  and  $N_{st}(0)/d$ , et nous avons deux équations indépendantes ([4.104-4.105](#)) dans le but de les déterminer depuis les conditions initiales de la simulation. En effet, l'état stationnaire a une masse et une énergie cinétique connues, car  $\mathcal{M} = \bar{\rho}L^3$ ,  $\mathcal{H}_l + \mathcal{H}_{nl} = \mathcal{H} = -\gamma\mathcal{M}^2 c_{3,L}/2$  (puisque  $\mathcal{H}_l(t=0) = 0$  et  $\mathcal{H}_{nl,L}(t=0) = 0$ ) et  $2\mathcal{H}_l + \mathcal{H}_{nl} = 0$  tel que

$$\mathcal{M} = \bar{\rho}L^3, \quad \mathcal{H}_l = \frac{2\pi c_3 \gamma \mathcal{M}^2}{L} = 2\pi c_3 \gamma \bar{\rho}^2 L^5, \quad (4.108)$$

avec  $c_3 = \int_{[-1/2, 1/2]^3} U_3(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq 3.17$ . Contrairement au cas  $d = 1$ , nous ne faisons pas l'hypothèse que la solution stationnaire remplit la boîte  $[-L/2, L/2]^3$ , car nous n'avons pas de résultats numériques pour étayer cette hypothèse, et il semble très approximatif de supposer qu'une fonction à symétrie sphérique corresponde à une boîte carré. Cela signifie que la paramètre  $p$  ne peut être déterminé depuis les conditions initiales mais par l'observation de la solution stationnaire. Étant donné le paramètre  $p$ , l'amplitude de la solution stationnaire peut être déterminée à partir de ([4.104-4.105](#)) en éliminant  $d_0$  :

$$N_{st}(0) = \frac{\mathcal{M} F_{3,p}^5 (p+1)^3 c_3^3}{L^3 (12\pi F_{3,p+1})^3}. \quad (4.109)$$



## Chapitre 5

# Diffusion Raman stimulée en fibre à coeur creux remplie de CO<sub>2</sub>

*Dans ce chapitre nous allons mettre en évidence expérimentalement la diffusion Raman stimulée en fibre à coeur creux remplie de gaz CO<sub>2</sub>. Nous décrivons le schéma de notre expérience nous permettant de contrôler la puissance injectée ainsi que la pression de gaz CO<sub>2</sub> au sein de la fibre. Par des mesures de puissance en entrée et en sortie de la fibre, nous observons que le ratio de puissance tend vers un comportement parabolique à mesure que la pression augmente. Ce dispositif expérimental nous donne également accès à la distribution d'intensité ainsi qu'au spectre du faisceau laser en sortie de fibre. Les résultats expérimentaux montrent que la génération des deux premiers pics Stokes est efficace pour des conditions de faible puissance et de faible pression. Ces conditions expérimentales sont compensées par une importante longueur d'interaction entre le faisceau laser et le gaz, par rapport aux expériences de spectroscopie utilisant des cellules de gaz. Les mesures expérimentales sont comparées à des résultats issus de simulations numériques de l'équation de Schrödinger non linéaire incluant la dispersion chromatique, l'effet Kerr, ainsi que la diffusion Raman stimulée. Nous observons ainsi un bon accord qualitatif en comparant l'évolution de la puissance en sortie en fonction de la puissance en entrée, notamment pour la première raie Stokes.*

### Sommaire

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Introduction et motivation</b>   | <b>116</b> |
| <b>5.2</b> | <b>Description de l'expérience</b>  | <b>117</b> |
| <b>5.3</b> | <b>Observation de la diffusion Raman stimulée en fibre HC-PCF remplie de CO<sub>2</sub></b> | <b>120</b> |
| <b>5.4</b> | <b>Simulations numériques de l'équation de Schrödinger non linéaire</b>                     | <b>125</b> |
| <b>5.5</b> | <b>Conclusion</b>   | <b>127</b> |

---

## 5.1 Introduction et motivation

Les peignes de fréquences optiques portent un intérêt significatif de par leurs utilisations dans divers domaines de la physique. En effet, les peignes de fréquences ont révolutionné les mesures de fréquences optiques précises en reliant directement n'importe quelle fréquence optique à une horloge micro-onde ( $\sim 1$  GHz). Ils sont également indispensables pour de nombreuses autres applications allant de la métrologie au biomédical et à la spectroscopie environnementale. Une technique intéressante pour obtenir des spectres multi-octave en forme de peigne est basée sur la diffusion Raman stimulée (SRS) d'ordre supérieur dans un gaz d'hydrogène. La spectroscopie optique Raman est une des techniques les plus courantes et les plus utilisées offrant de multiples avantages, incluant le caractère non-destructif, des mesures rapides, l'absence de préparation des échantillons, la résolution spatiale, et la haute sélectivité chimique. Cette technique consiste à focaliser un ou plusieurs faisceaux lasers intenses dans un gaz afin d'exciter les modes rotationnels et/ou vibrationnels des molécules du gaz. Les intensités des raies spectrales excitées dépendent de la puissance des lasers incidents ainsi que de la longueur d'interaction. Cette longueur est limitée en espace libre par la longueur de Rayleigh, distance sur laquelle le faisceau est focalisé, est de l'ordre de quelques millimètres seulement.

Le développement des fibres à cristaux photoniques à coeur creux (HC-PCF) [67] a fondamentalement changé le champ d'optique non linéaire basée sur les gaz, ce qui a permis l'observation de nombreux phénomènes intéressants et inédits [68–70]. En diffusion Raman stimulée dans les gaz, les HC-PCF à faibles pertes sont capables de réduire par plusieurs ordres de grandeur le seuil Raman en comparaison avec les précédentes techniques équivalentes utilisant une cellule de gaz. En effet, les techniques en espace libre nécessitent des niveaux de puissance crête de l'ordre du gigawatt pour générer la diffusion Raman stimulée basée sur des spectres optiques en forme de peigne [71, 72]. Au contraire, les HC-PCF permettent de confiner fortement les gaz ainsi que la pompe laser et de les guider sur plusieurs mètres, ce qui augmente considérablement leur longueur d'interaction. Grâce à ces propriétés uniques, les HC-PCF sont des excellentes candidates pour la génération très efficace de peignes de fréquences Raman multi-octave. La génération de spectre ultra-large en forme de peigne vibrationnel/rotationnel par la diffusion Raman stimulée a été largement étudiée, principalement en HC-PCF remplie de gaz d'hydrogène [71, 73–78]. Les résultats reportés montrent que, même si les HC-PCF offrent un seuil bas sans précédent, la puissance laser requise pour générer des raies Stokes et anti-Stokes Raman intenses est toujours de l'ordre de quelques dizaines de kilowatts. Les pressions requises en gaz d'hydrogène peuvent être réduites à quelques bars en accompagnant la pulsation pompe par une faible pulsation à la fréquence Stokes [180]. Cependant, la pression reste relativement élevée, de l'ordre de quelques dizaines de bars, dans le cas de la diffusion Raman stimulée à partir de photons Raman spontanés. De plus, un inconvénient sérieux à l'utilisation du gaz d'hydrogène en HC-PCF est la grande perméabilité de la silice avec l'hydrogène, ce qui nécessite des précautions particulières pour protéger la fibre des fuites de gaz. L'alternative intéressante nous permettant de surmonter ces problèmes indésirables est d'utiliser un gaz de CO<sub>2</sub> au lieu de l'hydrogène. Jusqu'à maintenant, le CO<sub>2</sub> a été principalement utilisé dans le but d'étudier les conditions pour obtenir une conversion efficace de l'anti-Stokes du premier ordre dans une HC-PCF relativement courte (30 cm) qui a été choisie pour son faible décalage Raman [181].

Dans ce Chapitre, nous étudions la bande rovibrationnelle  $\nu_1$  de la résonance de Fermi  $\nu_1/2\nu_2$  du gaz de CO<sub>2</sub> à travers la diffusion Raman stimulée initiée par le bruit quantique dans une HC-PCF. Nous allons explorer son application potentielle pour la génération de spectre intense large en forme de peigne. La branche Q rovibrationnelle de la branche  $\nu_1$ , décalée de 41.64 THz de la pompe laser est d'un intérêt fondamental de par sa largeur spectrale extrêmement étroite, qui est de l'ordre de 300 MHz (FWHMI) à 1 bar de CO<sub>2</sub>. En effet, pour une pression allant de quelques dizaines de millibars à 1 bar, cette bande subit une forte compression spectrale due aux effets combinés du rétrécissement de Dicke et du mélange collisionnel des raies. De plus, même s'il est bien connu que la diffusion Raman stimulée du CO<sub>2</sub> est moins efficace que celle de l'hydrogène, il est intéressant d'observer que la branche Q du CO<sub>2</sub> peut présenter un fort rétrécissement, ce qui la rend très intense [79–81]. Nous allons donc mettre en évidence la génération de façon spontanée d'un spectre Raman en utilisant une HC-PCF remplie de CO<sub>2</sub> avec une pression n'excédant pas 6 bars et pompée par un seul laser avec une puissance crête ne dépassant pas 40 kW.

## 5.2 Description de l'expérience

Dans cette section, nous fournissons une description détaillée du dispositif expérimental nous permettant d'observer la diffusion Raman stimulée en utilisant une HC-PCF remplie de CO<sub>2</sub>. Nous nous attardons notamment sur le contrôle de la puissance injectée ainsi que de la pression en gaz de CO<sub>2</sub> au sein de la fibre. Les mesures effectuées sont des mesures de puissances, que ce soit en entrée ou en sortie de fibre, ainsi que pour certaines longueurs d'onde spécifiques. Nous analyserons également les spectres ainsi que la distribution d'intensité du faisceau en sortie de fibre. Cette description mène dans une deuxième partie à étudier l'impact de la pression sur la puissance guidée au sein de la fibre. Nous verrons que cette étude sera pertinente lors de la réalisation de la procédure expérimentale en section 5.3.

### 5.2.1 Dispositif expérimental

Pour tous les résultats présents dans ce Chapitre, nous avons utilisé une fibre à cristaux photoniques à coeur creux (HC-PCF) possédant une longueur de 3 m et fournie par la société GLOphotonics. La fibre utilisée est formée de plusieurs coeurs creux ayant pour diamètre 30  $\mu\text{m}$ , de plus, les deux extrémités de la fibre sont reliées à une cellule de gaz remplie de CO<sub>2</sub>. Avec un système de vanne, nous pouvons donc contrôler la quantité de gaz qui circule au sein de la HC-PCF, avec une pression pouvant aller jusqu'à 6 bars. Afin d'observer les coeurs creux, une image de la section de la fibre enregistrée avec un microscope électronique est donnée en encart de la Figure 5.1 qui représente le dispositif expérimental décrit ci-dessous.

La source est un laser Nd :YAG délivrant des impulsions subnanosecondes (400 ps) à la longueur d'onde  $\lambda = 1064$  nm avec un taux de répétition de 1 kHz. Pour se prémunir de retours indésirables dans la cavité laser, un isolateur optique est placé après la source laser. Puis nous contrôlons la puissance en agissant sur une lame demi-onde qui est placée juste avant un séparateur de faisceau polarisant. Nous utilisons une configuration de type

télescope afin de contrôler la taille du faisceau, ainsi que sa divergence. Après réflexion par les deux miroirs M1 et M2, le faisceau laser polarisé est ensuite focalisé par une lentille ( $f = 125 \text{ mm}$ ) afin d'être injecté dans la fibre HC-PCF remplie de gaz CO<sub>2</sub>. Nous utilisons une platine de translation qui nous permet, avec les deux miroirs M1 et M2, de contrôler la position du faisceau injecté. L'injection est alors optimisée lorsque la direction du faisceau est alignée avec l'axe de la fibre, cette configuration correspond à un schéma de type Z. Ce dispositif d'injection nous permet d'atteindre une efficacité de conversion, c-a-d, le rapport entre la puissance en sortie de fibre et la puissance en entrée de fibre, de 39% (mesuré à 0.5 mbar de CO<sub>2</sub>). La distribution d'intensité en sortie de fibre est imagée sur une caméra CMOS (complementary metal-oxide-semiconductor), ce qui permet de vérifier les conditions de propagation monomodes dans la HC-PCF. Un séparateur de faisceau est utilisé afin d'injecter une partie du faisceau en sortie dans une fibre de raccordement reliée à un OSA (optical spectrum analyzer). Dans notre expérience, nous avons utilisé 3 OSA afin de couvrir une plage spectrale allant de 350 nm à 2400 nm. Tous les éléments décrits ci-dessus sont représentés dans le schéma expérimental présent en Figure 5.1.

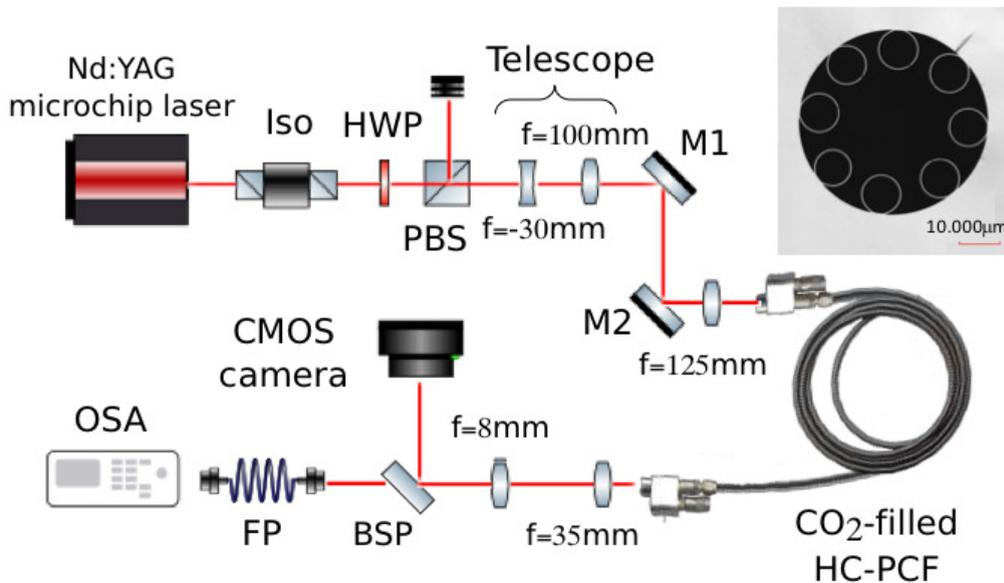


FIGURE 5.1 – Dispositif expérimental pour étudier la diffusion Raman stimulée en fibre HC-PCF remplie de CO<sub>2</sub> : le faisceau est émis par un laser Nd :YAG ( $\lambda = 1064 \text{ nm}$ ), un isolateur optique est disposé afin d'éviter les rétroreflexions au sein de la cavité laser. Une lame demi-onde (HWP) ainsi qu'un séparateur de faisceau polarisant (PBS) sont utilisés afin de contrôler la puissance injectée dans la fibre. Un télescope formé de deux lentilles est disposé afin de contrôler la taille et la divergence du faisceau laser. Les miroirs M1 et M2 ainsi que la platine sur laquelle est fixée l'entrée de la fibre permettent de contrôler la position du faisceau injecté dans la HC-PCF grâce à une lentille. Un séparateur de faisceau non-polarisant (BSP) est utilisé afin non seulement d'imager la sortie de fibre avec une caméra CMOS, mais aussi d'injecter le faisceau dans une fibre de raccordement (FP) reliée à un OSA. Trois OSA ont été utilisés dans le but d'analyser le spectre en sortie de la fibre HC-PCF sur une large plage spectrale.

### 5.2.2 Impact de la pression sur la transmission

Nous avons évoqué en section 5.2.1 que l'efficacité de conversion à l'injection était de 39% pour une pression de 0.5 mbar de CO<sub>2</sub>. Il est cependant intéressant d'étudier l'impact de la pression sur la transmission de la puissance au sein de la fibre HC-PCF dans le but d'observer et d'expliquer d'éventuelles pertes supplémentaires. Afin de caractériser cet effet, nous plaçons un puissance-mètre entre le miroir M2 et la lentille d'injection ce qui permet de déterminer la puissance en entrée, voir Figure 5.1. Nous déplaçons ensuite le puissance-mètre après la sortie de la fibre HC-PCF afin de mesurer la puissance en sortie, le ratio des deux puissances déterminées donne ainsi accès au taux de conversion. Comme décrit en section 5.2.1, nous faisons varier la puissance grâce à une lame demi-onde ainsi qu'un séparateur de faisceau polarisé, et nous contrôlons également la pression de CO<sub>2</sub> au sein de la fibre avec un système de vanne. Nous avons donc mesuré pour différentes valeurs de pressions (de 0.5 mbar jusqu'à 6 bars), plusieurs ratios de puissance entre la sortie et l'entrée de la fibre en faisant varier la puissance injectée (de 10 kW jusqu'à 140 kW de puissance crête).

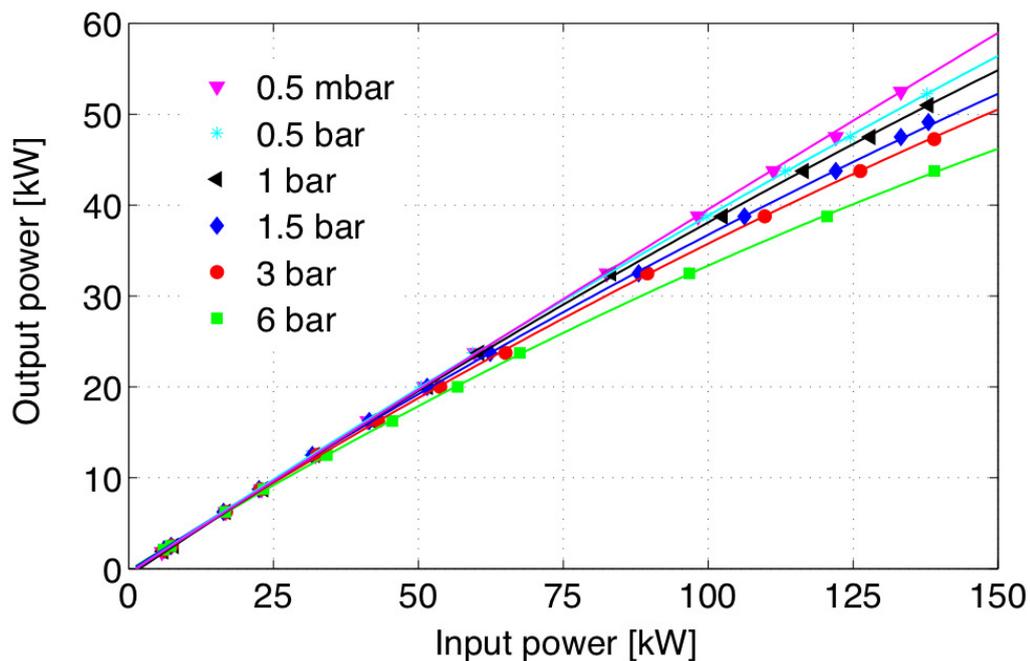


FIGURE 5.2 – Puissance en sortie de fibre en fonction de la puissance en entrée pour différents niveaux de pressions. Les différentes courbes représentent les différents niveaux de pression de CO<sub>2</sub> au sein de la HC-PCF. Le ratio de puissance tend vers un comportement parabolique à mesure que la pression augmente. Cette déviation du comportement linéaire peut provenir des contraintes induites par la pression au sein de la HC-PCF

Les mesures expérimentales de cette étude sont reportées en Figure 5.2, où nous montrons la puissance en sortie en fonction de la puissance en entrée pour différentes pressions (représentées par différentes couleurs). Nous observons que l'efficacité de conversion tend vers un comportement parabolique à mesure que la pression du gaz de CO<sub>2</sub> augmente [182]. Cette déviation par rapport à un comportement linéaire, qui est plus prononcée pour des grandes valeurs de pression, peut être expliquée par des pertes supplémentaires. En effet, une pression importante entraîne des contraintes induites dans la fibre. Nous notons que les pertes linéaires de la structure HC-PCF sont de 0.09 dB/m pour la pompe (1064 nm), 0.12 dB/m pour la première onde anti-Stokes (927 nm), ainsi que 0.21, 0.40 et 10 dB/m pour les trois ondes Stokes (1248 nm, 1510 nm et 1911 nm).

### 5.3 Observation de la diffusion Raman stimulée en fibre HC-PCF remplie de CO<sub>2</sub>

Dans cette section, nous allons montrer expérimentalement la diffusion Raman stimulée dans une HC-PCF remplie de CO<sub>2</sub>. Comme développé en section 5.2.1, nous avons deux paramètres libres qui sont la puissance injectée et la pression du gaz de CO<sub>2</sub> au sein de la fibre. Nous avons donc réalisé une procédure expérimentale en deux étapes. La première étape est de fixer la pression afin d'observer l'impact de la puissance sur la diffusion Raman stimulée, nous fixons alors la pression à 6 bars qui est la valeur maximale que l'on peut atteindre avec notre dispositif. Dans un second temps, nous fixons cette fois-ci la puissance à sa valeur maximale pour une pression de 6 bars, à savoir 40 kW d'après la Figure 5.2, et nous faisons varier la pression de CO<sub>2</sub> afin d'observer son impact sur la diffusion Raman stimulée. Nous observerons et tenterons d'expliquer un résultat remarquable qui est la forte intensité des raies Stokes générées malgré les limites en pression et en puissance de notre expérience.

#### 5.3.1 Impact de la puissance crête

Dans cette partie, nous étudions l'impact de la puissance injectée dans la fibre sur la diffusion Raman stimulée. Tout d'abord, nous fixons la pression de CO<sub>2</sub> au sein de la HC-PCF à 6 bars afin de maximiser les interactions entre le faisceau laser et le gaz. Nous rappelons que la puissance en entrée est contrôlée grâce à une lame demi-onde ainsi qu'un séparateur de faisceau polarisant, de plus le spectre en sortie est mesuré en injectant le faisceau dans une fibre de raccordement reliée à un OSA, voir section 5.2.1. La Figure 5.3 présente les différents spectres mesurés en fonction de la puissance crête, démarrant de 40 kW pour la panel (a) et décroissant jusqu'à 1 kW pour le panel (g). Afin de couvrir une plage spectrale allant de 350 nm à 2400 nm, trois OSA ont été utilisés, ce qui est illustré par l'utilisation de différentes couleurs dans la représentation des spectres en Figure 5.3.

Nous observons que le gaz CO<sub>2</sub> entraîne la génération d'un large peigne de fréquences qui couvre une plage spectrale allant de 0.9  $\mu\text{m}$  jusqu'à 2  $\mu\text{m}$ . Comme illustré remarquablement en Figure 5.3(a), seulement 6 bars de pression de CO<sub>2</sub> et 40 kW de puissance crête guidée sont suffisants pour obtenir par génération spontanée une cascade de trois raies Stokes situées aux longueurs d'ondes 1248 nm, 1510 nm et 1911 nm [182]. Par ailleurs, nous observons que les deux premières raies Stokes ainsi que la raie anti-Stokes sont très

intenses. En partant de ce constat, nous avons mesuré les puissances des raies Stokes avec un puissancemètre après avoir filtré le spectre en sortie de fibre pour ne conserver que les raies Stokes. Il en résulte que les deux premiers pics Stokes sont plus bas de seulement 1.06 dB et 5.34 dB que le niveau de la pompe. Ces niveaux correspondent respectivement à une efficacité de conversion, c'est à dire le rapport de la puissance du pic et la puissance totale en sortie, de 37% et 13.5%.

Nous avons vérifié avec la caméra CMOS comme illustrée en Figure 5.1, que la pompe ainsi que les bandes Raman provenaient du mode fondamental de la fibre. Cette vérification est illustrée en encart de la Figure 5.3(a) où l'on observe les distributions d'intensité mesurées en champ proche de la sortie de fibre, pour la pompe ainsi que pour la première raie Stokes, et pour la puissance crête 40 kW. Un résultat remarquable est que ces deux premiers pics Stokes assez intenses sont observés pour un niveau de pression de CO<sub>2</sub> relativement bas, même en diminuant la puissance de pompe à 30 kW [Figure 5.3(b)] ou encore 10kW [Figure 5.3(d)] [182].

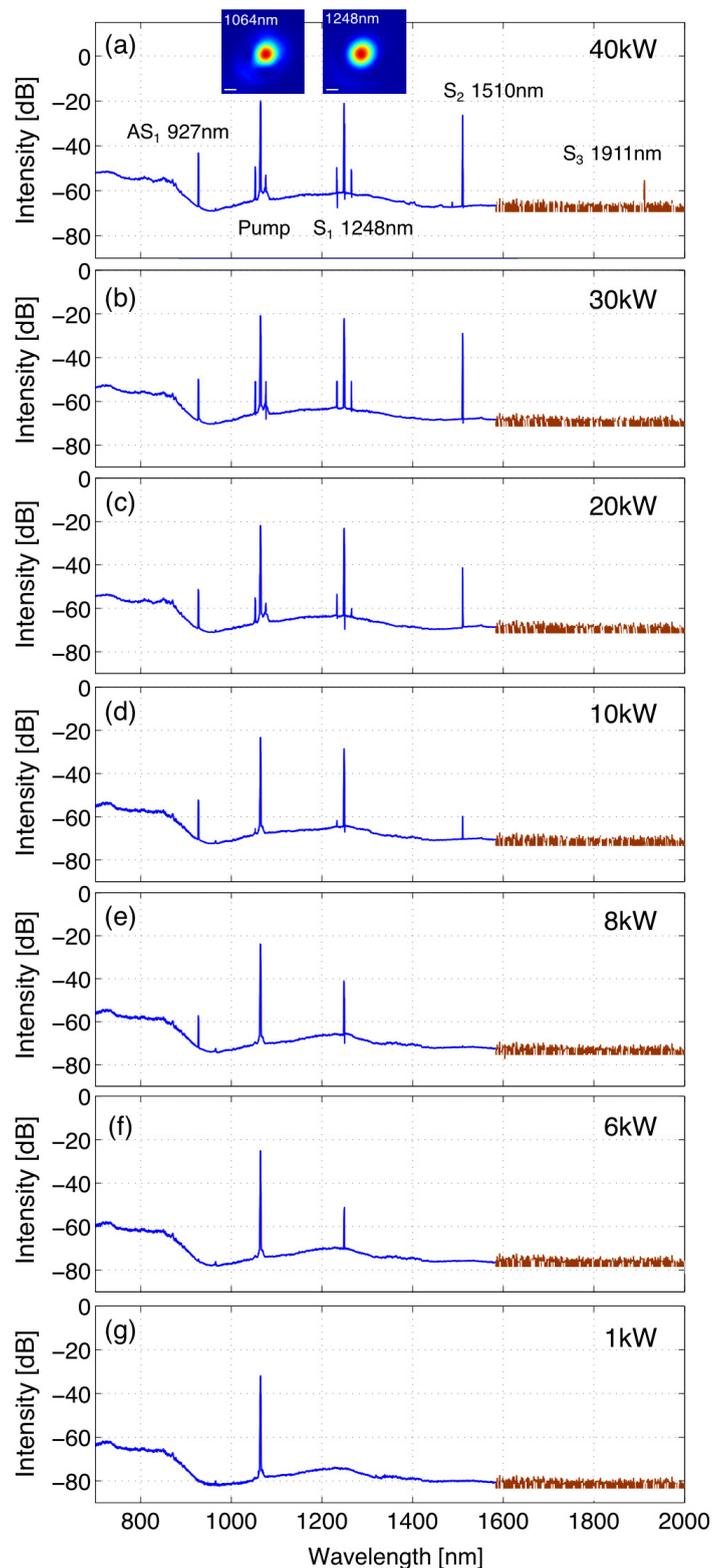


FIGURE 5.3 – Impact de la puissance sur le spectre en sortie de fibre : Spectres expérimentaux en sortie de la HC-PCF montrant un peigne de fréquence généré à 6 bars de pression de gaz CO<sub>2</sub> en fonction de la puissance crête allant de 40 kW (a) à 1 kW (g). Les parties bleues et marrons du spectres ont été mesurées avec différents OSA. En encart du panel (a) est illustrée la distribution d'intensité en champ proche de la sortie de fibre aux longueurs d'ondes de la pompe et de la première raie Stokes. Echelle : 10  $\mu$ m.

À titre de comparaison, ces niveaux de puissance sont inférieurs à ceux requis pour observer les deux raies Stokes du gaz d'hydrogène avec une pression s'élevant à quelques dizaines de bars [71, 73–78]. Nous notons également que les bandes Raman sont très fines, elles préservent la finesse spectrale du laser de pompe. En effet, lorsque les raies spectrales sont espacées de sorte que leurs largeurs collisionnelles mènent à un recouvrement significatif, alors des effets de couplage venant d'un transfert d'énergie rotationnelle peuvent apparaître. Ce phénomène, aussi appelé rétrécissement collisionnel, peut être décrit par un modèle utilisant des lois d'échelles pour modéliser la relaxation moléculaire [79]. Les raies supplémentaires de faible intensité observées proche de l'onde pompe ainsi que de la première raie Stokes peuvent provenir de l'instabilité modulationnelle induite par la modulation de phase croisée. En effet, contrairement au cas des instabilités modulationnelles conventionnelles, ce type d'instabilité peut apparaître même en régime de dispersion normale en fibre optique [183]. Nous soulignons enfin que l'impact de l'état de polarisation du faisceau injecté a été négligé durant toute la procédure expérimentale.

### 5.3.2 Impact de la pression de CO<sub>2</sub>

Dans cette partie, nous étudions l'impact de la pression au sein de la fibre sur la diffusion Raman stimulée. Nous fixons cette fois-ci la puissance crête dans la fibre afin d'avoir uniquement la pression de CO<sub>2</sub> comme paramètre libre. La puissance crête de la pompe est donc fixée à 40 kW, qui est la puissance maximale que l'on peut atteindre avec une pression de 6 bars, ce qui est illustré en Figure 5.2. Comme décrit en section 5.2.1, la pression de CO<sub>2</sub> au sein de la HC-PCF est contrôlée grâce un système de vanne et mesurée directement avec un manomètre. Des spectres mesurés en sortie de fibre en fonction de la pression sont présentés en Figure 5.4, démarrant de 6 bars pour le panel (a) et décroissant jusqu'à 0.8 bar pour le panel (f). De la même manière qu'en section 5.3.1, plusieurs OSA ont été utilisés, ce qui est illustré par les différentes couleurs présentes dans la représentation des spectres, comme précédemment montré en Figure 5.3 [182].

Nous observons que pour le niveau modéré de puissance injectée, les deux premiers pics Stokes sont générés avec des puissances supérieures à 10 dB en-dessous de la puissance de pompe. Ce résultat est remarquable dans la mesure où la puissance utilisée est faible comparée à celle nécessaire pour observer les mêmes raies à la même intensité dans le cas d'une HC-PCF remplie d'hydrogène [71, 73–78]. Cette observation est réitérée, même en diminuant la pression de CO<sub>2</sub> jusqu'à 4 bars, toujours pour une puissance crête de 40 kW. De plus, pour une pression en CO<sub>2</sub> de 1 bar, nous pouvons atteindre une puissance de 47 kW, voir Figure 5.2. Dans ces conditions, la première raie Stokes peut atteindre une puissance inférieure de seulement 10 dB à celle de la pompe [182]. Comme évoqué en section 5.1, l'avantage de la HC-PCF par rapport aux expériences en espace libre, est d'avoir une longueur d'interaction beaucoup plus importante : 3 m dans notre expérience contre quelques millimètres ou centimètres en propagation libre. Cette caractéristique permet d'observer des pics Stokes très intenses par rapport à la pompe avec une faible puissance crête ainsi qu'une faible pression par rapport aux expériences en espace libre.

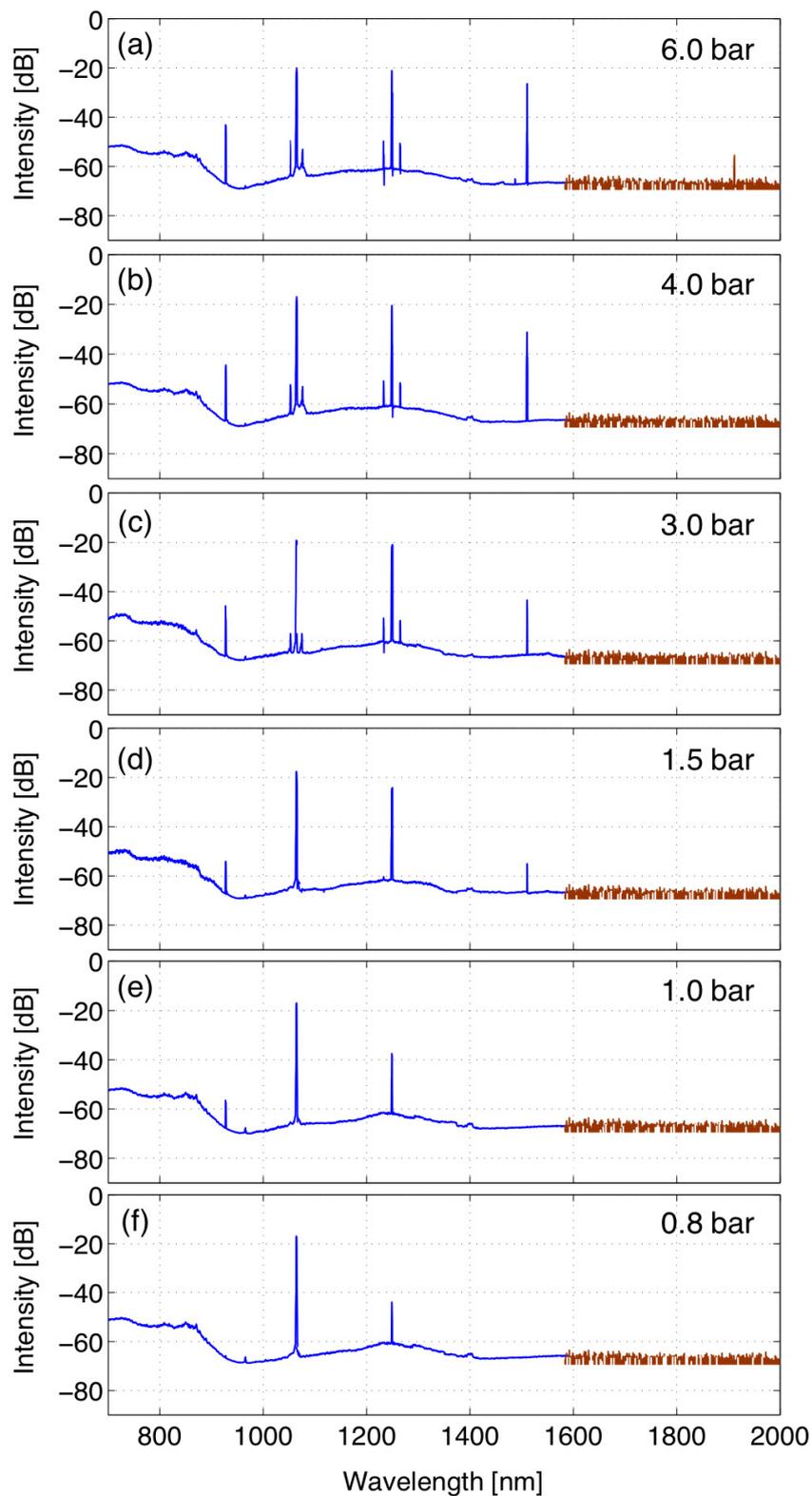


FIGURE 5.4 – **Impact de la pression sur le spectre en sortie de fibre** : Spectres expérimentaux en sortie de la HC-PCF montrant un peigne de fréquence généré à une puissance crête de 40 kW en fonction de la pression de gaz CO<sub>2</sub>, allant de 6 bars (a) jusqu'à 0.8 bar (f). Les parties bleues et marrons des spectres ont été mesurées avec différents OSA.

## 5.4 Simulations numériques de l'équation de Schrödinger non linéaire

Dans cette section, nous allons effectuer des simulations numériques à partir de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS). Le but est de comparer les résultats de ces simulations aux mesures expérimentales afin d'obtenir des informations supplémentaires sur les peignes de fréquences observés. Dans un premier temps, nous allons détailler les différents termes de l'équation utilisée ainsi que la méthode numérique permettant de la simuler. Nous montrerons par ailleurs un exemple de spectre issu de cette simulation en utilisant des paramètres proches de l'expérience. Puis dans un second temps, nous effectuerons des comparaisons directes entre les résultats issus des simulations numériques et les mesures expérimentales. En particulier, nous nous focaliserons sur les valeurs des puissances de la pompe ainsi que des raies Stokes afin de vérifier si les simulations reproduisent l'expérience réalisée en section 5.3.

### 5.4.1 Développement théorique et numérique

Afin de reproduire numériquement les résultats expérimentaux obtenus en section 5.3, nous partons de l'équation de Schrödinger non linéaire (5.1). Nous étudions l'évolution du spectre dans une fibre optique, l'équation utilisée est donc 1+1D, c-a-d une dimension d'espace et une dimension de temps. De plus, l'équation (5.1) inclue la dispersion chromatique, l'effet Kerr, ainsi que la diffusion Raman stimulée, elle s'écrit donc

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2}A = i\gamma(1 - f_R)|A|^2 A + i\gamma f_R A \int_0^{+\infty} R(t')|A(z, t - t')|^2 dt', \quad (5.1)$$

où  $A(z, t)$  est l'enveloppe du champ électrique total se propageant dans la direction  $z$ . Nous faisons l'approximation dans cette section que l'enveloppe varie lentement par rapport à sa porteuse, ce qui est le cas pour un spectre aux bandes étroites.  $\beta_2$  est le paramètre de dispersion de vitesse de groupe (GVD) qui est déterminé depuis la courbe de dispersion donnée par le fabricant,  $\alpha$  est le coefficient d'absorption linéaire de la fibre qui est également donné par le fabricant.  $\gamma = 2\pi n_2/(\lambda A_{\text{eff}})$  représente le coefficient non linéaire avec  $\lambda = 1064$  nm la longueur d'onde la pompe,  $n_2 = 3.10^{-11}$   $\mu\text{m}^2/\text{W}$  l'indice non linéaire, et  $A_{\text{eff}} = 416$   $\mu\text{m}^2$  l'aire effective du mode fondamental de la fibre optique.  $f_R$  est un paramètre mesurant la contribution des effets Raman par rapport à la somme des effets non linéaires. D'après nos analyses préliminaires, un décalage de  $f_R$  jusqu'à 10% n'a pas d'impact critique sur la dynamique spectrale de la diffusion Raman stimulée en HC-PCF remplie CO<sub>2</sub> [182].

Nous rappelons que la fibre utilisée possède une longueur de 3 m et que les impulsions de la pompe ont pour durée 460 ps, voir section 5.1. Le premier terme du membre droit de l'équation (5.1) correspond à l'effet Kerr, il mène donc à l'auto-modulation de phase (SPM) ainsi qu'à la modulation de phase croisée (XPM), ces deux effets s'ajoutent avec le mélange à quatre ondes. Le second terme contient la réponse Raman non instantanée représentée dans le domaine temporel par la fonction  $R(t)$ . Nous notons que cette réponse Raman est modélisée numériquement dans le domaine de Fourier par une bande de gain Raman. Cette bande est décrite par la fonction Lorentzienne ayant pour largeur spectrale

300 MHz et décalée de la pompe de 41.64 THz. Dans l'ensemble des résultats issus de simulations numériques présentés dans ce Chapitre, nous avons considéré en nous basant sur la littérature que le gain Raman en intensité est égal à  $1.1 \cdot 10^{-11}$  m/W [184].

L'équation NLS (5.1) ne peut être résolue analytiquement, nous utilisons la méthode split-step Fourier utilisée fréquemment dans le cas des simulations de ce type d'équation. Cette méthode repose sur l'approximation que, sur une courte distance  $h$ , les effets linéaires et non linéaires peuvent être supposés comme agissant indépendamment. En d'autres termes, la propagation de  $z$  à  $z + h$  est réalisée en deux étapes, en premier lieu la non-linéarité agit seule, puis les effets linéaires sont pris en compte seuls. Les effets peuvent ainsi être résolus séparément à conditions que le pas de propagation  $h$  soit suffisamment petit [63]. Un exemple de spectre numérique obtenu à partir de cette simulation avec une puissance de 29.12 kW est illustré en Figure 5.5 [182]. Nous observons que la simulation reproduit qualitativement les mesures expérimentales présentes en section 5.3.

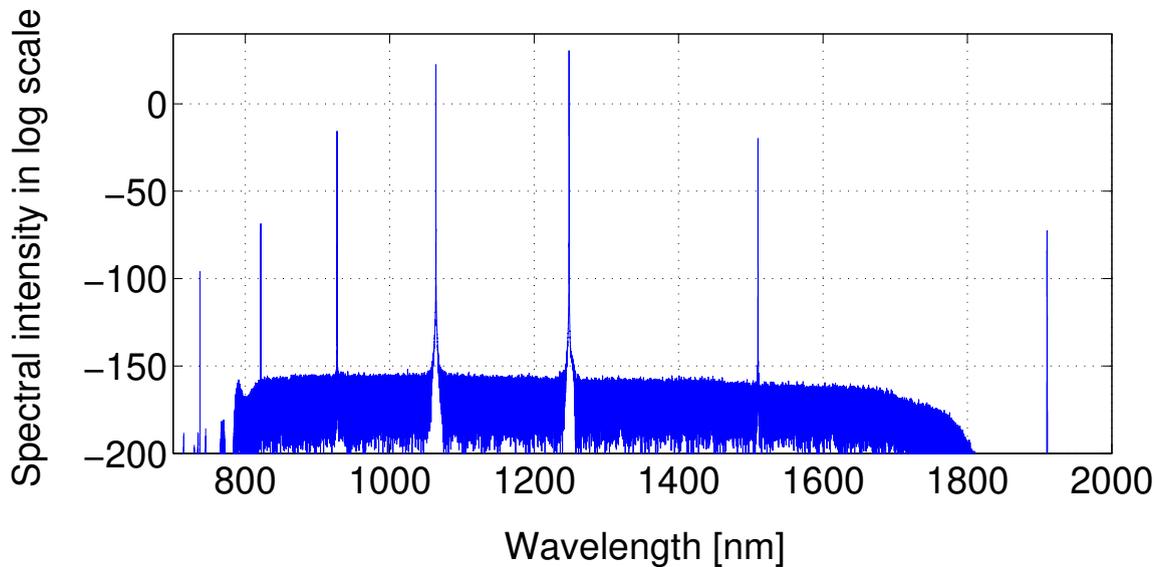


FIGURE 5.5 – **Résultat issu de simulation numérique.** Le spectre obtenu provient d'une simulation numérique basée sur l'équation (5.1) en utilisant la méthode split-step Fourier. Le spectre reproduit qualitativement les mesures expérimentales en section 5.3

#### 5.4.2 Comparaison directe avec les mesures expérimentales

Dans le but d'effectuer une comparaison directe entre les mesures expérimentales et les simulations numériques, nous avons utilisé un filtre dans le but de mesurer la puissance en entrée et en sortie de fibre pour la pompe et les deux premières raies Stokes. La Figure 5.6 reporte l'évolution de la puissance en sortie en fonction de la puissance pour les trois bandes spectrales filtrées. Nous observons un bon accord qualitatif entre les simulations numériques [Figure 5.6(a)] et les mesures expérimentales [Figure 5.6(b)], en particulier concernant la pompe et la première raie Stokes. Les simulations numériques basées sur l'équation (5.1) décrivent donc assez bien l'expérience présentée en section 5.3. En ce qui concerne la génération de la seconde raie Stokes, qui est plus intense expérimentalement, les écarts observés peuvent être reliés à la valeur du gain Raman utilisée pour la simulation.

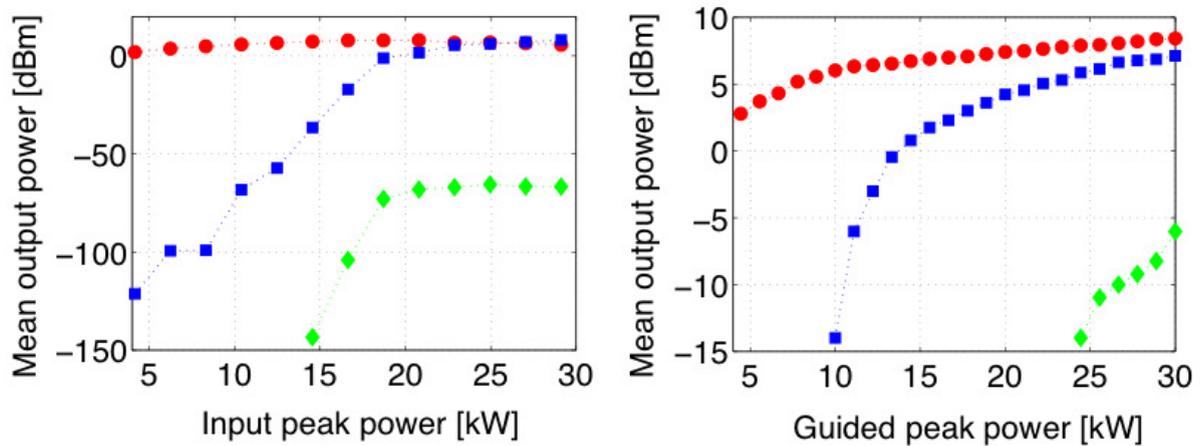


FIGURE 5.6 – Comparaisons entre les simulations numériques (a) et les mesures expérimentales (b) : Evolution de la puissance en sortie en fonction de la puissance crête pour différentes composantes spectrales. La courbe rouge correspond à la pompe, la courbe bleue pour la première raie Stokes, et la courbe verte pour la deuxième raie Stokes.

## 5.5 Conclusion

Pour résumer, nous avons présenté le dispositif expérimental pour les expériences d’observation de la diffusion Raman stimulée en HC-PCF remplie de CO<sub>2</sub>. Nous avons discuté les propriétés de la HC-PCF qui possède une longueur d’interaction de 3 m entre le gaz CO<sub>2</sub> et le faisceau laser. Nous avons montré que le dispositif nous permet de contrôler la puissance crête injectée dans la fibre, jusqu’à 47 kW, ainsi que la pression de gaz au sein de la HC-PCF, jusqu’à 6 bars. Nous avons mesuré la puissance en entrée et en sortie de la fibre afin d’observer que le ratio de puissance tend vers un comportement parabolique à mesure que la pression augmente. Ce dispositif expérimental nous donne également accès à la distribution d’intensité ainsi qu’au spectre du faisceau laser en sortie de fibre.

Nous avons étudié l’impact des deux paramètres libres du dispositif expérimental, à savoir la puissance crête injectée et la pression de gaz CO<sub>2</sub> dans la fibre. Dans un premier temps, nous avons fixé la pression à 6 bars afin de maximiser les interactions entre le faisceau laser et le gaz, puis nous avons mesuré le spectre en sortie de fibre pour différentes puissances injectées. Un résultat remarquable est l’observation de deux premiers pics Stokes assez intenses pour un niveau de pression relativement bas, même pour une puissance de pompe à 30 kW. Nous avons vérifié avec la caméra CMOS que la pompe ainsi que les bandes Raman provenaient du mode fondamental.

Nous avons ensuite fixé la puissance crête de la pompe à 40 kW afin d’avoir la pression de CO<sub>2</sub> comme unique paramètre libre et de mesurer le spectre en sortie pour différentes valeurs de pression. Un résultat remarquable est l’observation des deux premiers pics Stokes assez intenses, pour une pression pouvant descendre jusqu’à 4 bars. De plus, cette observation est réitérée même pour une pression de 1 bar, qui permet d’atteindre 47 kW de puissance crête. Les niveaux d’intensités remarquables des deux premiers pics Stokes sont mesurés, en dépit d’une faible puissance crête ainsi que d’une faible pression, grâce

à la longueur d'interaction permise par la fibre. En effet, la HC-PCF permet d'avoir une longueur d'interaction de 3 m, ce qui est beaucoup plus important par rapport aux expériences avec des cellules de gaz ne disposant que de quelques millimètres ou centimètres de longueur d'interaction en propagation libre.

Enfin nous avons effectué des simulations à partir de l'équation de Schrödinger non linéaire à laquelle nous avons incluse la dispersion chromatique, l'effet Kerr, ainsi que la diffusion Raman stimulée. Nous avons montré un exemple de spectre obtenu à partir de cette simulation avec une puissance de 29.12 kW et nous avons constaté que la simulation reproduit qualitativement les mesures expérimentales. Nous avons ensuite comparé les simulations numériques aux mesures expérimentales en reportant l'évolution la puissance en sortie de fibre par rapport à la puissance injectée pour la pompe ainsi que pour les deux premières raies Stokes. Nous avons observé un bon accord qualitatif, notamment pour la première raie Stokes. Les écarts constatés pour la seconde raie Stokes peuvent être reliés à la valeur du gain Raman utilisée en simulation.

# Chapitre 6

## Conclusion et perspectives

### 6.1 Conclusion

Dans les deux premiers chapitres de ce manuscrit, nous avons discuté l'effet de thermalisation et condensation d'ondes optiques se propageant dans une fibre optique multimode. Dans le premier chapitre nous en avons décrit les aspects théoriques. En considérant l'effet dominant du *désordre faible* lié aux fluctuations aléatoires de polarisations, nous avons montré que la propagation d'une onde incohérente est décrite par une approche discrète de la théorie de turbulence d'ondes. L'équation cinétique révèle que le désordre induit une accélération significative du processus de thermalisation et condensation de l'onde optique. La population macroscopique du mode fondamental de la fibre optique permet de mieux comprendre certains régimes de «nettoyage de faisceau optique» observés dans les fibres multimodes à gradient d'indice. La nature discrète de la turbulence permettrait également de comprendre la raison pour laquelle l'effet de nettoyage de faisceau optique n'a pas été observé dans les fibres optiques à saut d'indice. Une extension naturelle de ce travail est actuellement en cours et concerne l'étude de l'impact d'un *désordre fort* (couplage aléatoire entre les modes) dans la propagation de l'onde incohérente. Cette perspective sera discutée ci-dessous.

Le second chapitre a présenté l'expérience réalisée à l'ICB qui a permis de mettre en évidence le processus de thermalisation vers la distribution de Rayleigh-Jeans et l'effet de condensation qui en résulte. La principale originalité de cette expérience par rapport aux expériences conventionnelles de «nettoyage de faisceau optique» consiste à faire passer le faisceau optique par un diffuseur avant injection dans la fibre optique, ce qui nous a permis de faire varier l'énergie cinétique  $E = \sum_p \beta_p n_p$  (contribution linéaire à l'Hamiltonien) en gardant constante la puissance de l'onde  $N = \sum_p n_p$ . Cette procédure a permis de mettre en évidence la transition de phase vers l'état condensé de la lumière en diminuant l'énergie en dessous d'une valeur critique  $E \leq E_{\text{crit}}$ . La comparaison des distributions d'intensités mesurées expérimentalement en champ proche et lointain (spectre) sont en accord avec les distributions théoriques de Rayleigh-Jeans, sans l'emploi de paramètres ajustables. Nous avons également discuté les propriétés thermodynamiques de la condensation d'ondes classiques par l'étude du comportement de la chaleur spécifique à la transition de phase, ce qui a permis de clarifier les différences avec les propriétés de la condensation de Bose-Einstein quantique. Nous discutons dans ce chapitre deux extensions naturelles de ce travail qui ont fait l'objet d'une nouvelle collaboration avec Iacopo Carusotto (BEC center, Trento).

D'une part, mieux comprendre le mécanisme responsable du processus de thermalisation en fibre optique par l'analyse des cascades de turbulence. D'autre part, nous discutons la possibilité d'observer la thermalisation optique vers des états d'équilibre de Rayleigh-Jeans caractérisés par une température négative ( $T < 0$ ).

Dans le cadre de mon travail de thèse j'ai aussi pu me familiariser avec d'autres formalismes de turbulence décrivant la propagation d'ondes optiques incohérentes dans différentes configurations. En particulier, dans le troisième chapitre nous avons considéré une autre forme de condensation d'ondes qui se caractérise par la formation spontanée d'un soliton en présence d'une interaction (gravitationnelle) à longue portée. Ce travail m'a permis de me familiariser avec l'équation cinétique de Vlasov à longue portée. Nous avons considéré le processus de condensation de solitons dans le cadre de l'équation de Newton-Schrödinger, laquelle a aussi fait l'objet d'études récentes en optique non linéaire. Nous avons mis en évidence un nouveau régime caractérisé par l'existence de «solitons cachés», i.e., les solitons sont «cachés» dans le sens où ils sont entièrement immergés dans les fluctuations environnantes du champ incohérent. Le formalisme de Vlasov nous a permis de montrer que les solitons sont en fait piégés et stabilisés par la structure incohérente environnante. Nous avons démarré une collaboration avec le groupe de D. Faccio de l'Université de Glasgow afin d'étudier la faisabilité d'une expérience d'optique qui pourrait mettre en évidence ce régime de solitons cachés en présence d'une non-linéarité thermique.

Mon travail de thèse a également été consacré à l'étude de la propagation spatio-temporelle d'ondes incohérentes dans les fibres multimodes. A la différence des Chapitres 2-3 où les ondes optiques sont quasi-monochromatiques, nous avons considéré un régime où la largeur du spectre temporel est importante. Dans ce régime, la théorie cinétique révèle que la turbulence est dominée par l'effet Raman, comme décrit par le formalisme de turbulence faible de Langmuir, voir l'introduction du manuscrit. En considérant l'impact du désordre fort en fibre multimode (couplage aléatoire entre les modes), nous avons montré théoriquement et numériquement que l'évolution du champ optique peut être décrit par une équation cinétique remarquablement simple. Ce travail est reporté en Annexe A.

Enfin, dans un registre différent des autres Chapitres, mon travail de thèse a été consacré à l'étude de la diffusion Raman intense stimulée en fibre à coeur creux remplie de  $\text{CO}_2$ . Nous discutons en Chapitre 5 des avantages fournis par les fibres à cristaux photoniques à coeur creux (HC-PCF), par rapport aux cellules de gaz, afin de générer la diffusion Raman stimulée. Les HC-PCF ont été principalement utilisées pour étudier le gaz d'hydrogène or, bien que la diffusion Raman stimulée du  $\text{CO}_2$  soit moins efficace que celle de  $\text{H}_2$ , il est intéressant d'observer que sa branche Q présente un fort rétrécissement ce qui la rend très intense. Nous avons donc réalisé une expérience à l'ICB mettant en évidence la génération spontanée de spectre Raman en utilisant une HC-PCF remplie de  $\text{CO}_2$ . Un résultat remarquable est que pour une pression ne dépassant pas 6 bars et une puissance crête guidée n'excédant par 40 kW, nous obtenons deux raies Stokes très intenses (seulement 10 dB en dessous du niveau de pompe). Nous avons comparé ces mesures expérimentales aux résultats de simulations numériques basées sur l'équation de Schrödinger non linéaire 1+1D. Nous avons pu reproduire les spectres mesurés dans l'expérience et obtenu un bon accord qualitatif entre les mesures expérimentales et les simulations numériques en ce qui concerne les puissances des deux premières raies Stokes.

## 6.2 Perspectives

Dans la suite de ce dernier chapitre nous allons discuter différentes perspectives et différents problèmes ouverts qui sont en lien avec ce travail de thèse. Nous allons notamment discuter différents aspects liés à la thermalisation et la condensation d'ondes optiques en fibre optique multimode, en relation avec le travail présenté en Chapitres 2-3.

### 6.2.1 Impact du désordre fort en régime linéaire

Dans le Chapitre 2 nous avons considéré l'impact du désordre faible provenant des fluctuations aléatoires de polarisations des modes [87]. Dans cette section, nous discutons l'impact d'un désordre fort, c-a-d, un bruit qui couple des modes distincts sur l'évolution de la dynamique des modes. Nous montrons qu'une forme générale du désordre conservatif introduit une dissipation effective dans le système, qui est responsable d'une décroissance irréversible des moments du premier ordre, ainsi que d'une relaxation irréversible des moments du second ordre vers différentes formes d'équipartition de puissance entre les modes. De cette façon, en considérant le régime purement linéaire, nous obtenons une équation cinétique décrivant l'impact du désordre fort. Nous discutons également les différents régimes décrits par le modèle de désordre fort considéré, à savoir le couplage aléatoire entre les composantes de polarisation, ainsi que le couplage aléatoire entre les modes dégénérés et non dégénérés.

#### A. Modèle

Le couplage aléatoire entre les modes peut être décrit par une forme généralisée de l'équation NLS modale (2.16). Le champ aléatoire composé de  $M$  modes spatiaux est représenté par un vecteur complexe de dimension  $2M$ ,  $\mathbf{A}(z) = [A_p(z)]_{p=0}^{2M-1}$ , qui est obtenu en empilant les  $2M$  composantes modales qui incluent les degrés de liberté de polarisation. Le vecteur  $\mathbf{A}(z)$  est gouverné par l'équation NLS modale :

$$i\partial_z \mathbf{A} = \beta \mathbf{A} + \mathbf{D}^{\text{sd}}(z) \mathbf{A} - \gamma \mathbf{P}(\mathbf{A}), \quad (6.1)$$

où  $\beta$  est une matrice diagonale avec les termes diagonaux  $\beta_p$ . Les couplages linéaires entre les modes sont modélisés par une matrice aux valeurs aléatoires  $\mathbf{D}^{\text{sd}}(z)$ . Elle se compose d'une généralisation de dimension  $2M$  d'un modèle à deux dimensions du désordre faible discuté en section 2.4.2. La matrice Hermitienne  $2M \times 2M$   $\mathbf{D}^{\text{sd}}(z)$  peut s'écrire

$$\mathbf{D}^{\text{sd}}(z) = \sum_{q < r} g_{qr} [\nu_{qr}(z) \mathbf{H}^{qr} + \mu_{qr}(z) \mathbf{K}^{qr}] + \sum_q g_q \eta_q(z) \mathbf{J}^q, \quad (6.2)$$

où les matrices  $\mathbf{H}^{qr}$ ,  $\mathbf{K}^{qr}$ ,  $\mathbf{J}^q$  généralisent à  $2M$  dimensions les matrices  $2 \times 2$  de Pauli  $\sigma_j$  [185]. Les matrices  $\mathbf{H}^{qr}$ ,  $\mathbf{K}^{qr}$ ,  $\mathbf{J}^q$  forment également une base pour le vecteur espace des matrices Hermitiennes  $2M \times 2M$ . À cet égard, le modèle (6.2) peut être considéré comme un modèle général de désordre fort. Pour plus de précisions ces trois matrices sont données explicitement en référence [21](Appendice C). En suivant la généralisation du modèle de désordre faible de la section 2.4.2, dans le modèle de désordre fort donné par l'équation (6.2) les fonctions  $\eta_q$  pour  $0 \leq q \leq 2M - 1$ , et  $\nu_{qr}$ ,  $\mu_{qr}$  pour  $0 \leq q < r \leq 2M - 1$ , sont indépendantes de moyenne nulle et sont des processus aléatoires Gaussiens à valeur

réelle identiquement distribués, avec  $\langle \eta_q(z)\eta_q(z') \rangle = \langle \nu_{qr}(z)\nu_{qr}(z') \rangle = \langle \mu_{qr}(z)\mu_{qr}(z') \rangle = \sigma_\beta^2 \mathcal{R}(\frac{z-z'}{l_\beta})$ . Nous considérons les processus de Ornstein-Uhlenbeck pour  $\eta_q$ ,  $\nu_{q,r}$  et  $\mu_{q,r}$ , avec  $\mathcal{R}(\zeta) = \exp(-|\zeta|)/2$ . Les paramètres  $g_{qr}$  et  $g_q$  sont des coefficients de couplages d'ordre un.

Comme discuté ci-dessous, le modèle de désordre (6.2) nous permet de distinguer trois régimes différents de couplage de mode aléatoire, à savoir le couplage de polarisation, le couplage entre les modes dégénérés, et le couplage entre les modes non dégénérés.

## B. Équation cinétique

Les équations qui gouvernent l'évolution des moments du premier ordre du champ sont dérivées en référence [21](Appendice C). Le principal résultat obtenu en utilisant le théorème de Furutsu-Novikov est que le désordre fort conservatif introduit une dissipation effective dans l'évolution de la moyenne  $\langle \mathbf{A} \rangle(z)$ , qui présente alors une décroissance exponentielle durant la propagation. Ce résultat nous permet d'étudier la dynamique des moments du second ordre avec un désordre fort dans un régime où les effets linéaires dominent les effets non linéaires, comme discuté pour le désordre faible considéré en section 2.4. Cependant, contrairement au désordre faible où la dynamique linéaire des moments du second ordre est triviale (c-a-d, les corrélations disparaissent, voir section 2.4.3), la présence du désordre fort introduit une dynamique linéaire non triviale qui domine les effets non linéaires. Dans la suite, nous étudions le désordre fort à l'ordre dominant en régime purement linéaire.

Dans l'article [21], nous avons dérivé une équation cinétique décrivant le couplage aléatoire des modes :

$$\partial_z n_p = \Delta\beta \sum_{m=0}^{M-1} \Gamma_{pm} \hat{\mathcal{R}}[(\beta_m - \beta_p)l_\beta](n_m - n_p), \quad (6.3)$$

où  $\Gamma_{pm} = \rho_{pm}^2$  représente la matrice de couplage des modes, où  $\rho_{mp}^2$  dénote la réduction à  $M \times M$  de la matrice de couplage  $g_{mp}^2$  introduite ci-dessus. La fonction  $\hat{\mathcal{R}}(k)$  représente la transformée de Fourier de la fonction de corrélation  $\mathcal{R}(x)$  qui s'écrit  $\hat{\mathcal{R}}(k) = 1/(1+k^2)$  pour le processus de Ornstein-Uhlenbeck considéré. Nous notons que l'équation (6.3) a une forme similaire à celle considérée pour modéliser la diaphonie entre différents modes dans les télécommunications optiques [83].

## C. Longueurs de propagation caractéristiques

Nous notons tout d'abord qu'en ajoutant le terme supplémentaire (6.3) dans l'équation cinétique dérivée en Chapitre 2 [voir équation (2.37)], la conservation de l'énergie  $E$  n'est plus vérifiée, de sorte que le théorème  $H$  des équations cinétiques complètes (2.37) et (6.3) décrirait une évolution irréversible vers l'état d'équilibre maximisant l'entropie caractérisé par une équipartition de puissance («nombre de particules») entre les modes. En conséquence, le désordre fort devrait inhiber le processus de condensation discuté dans le cas

du désordre faible en section 2.4. Comme discuté ci-dessous, cette conclusion n'est pas appropriée si l'on considère le régime usuel d'auto-nettoyage de faisceau optique. Dans cette optique, nous discutons maintenant du sens physique de l'équation (6.3) à travers l'analyse du modèle de désordre considéré en équation (6.2) et la longueur caractéristique de propagation associée au couplage aléatoire des modes.

(i) *Couplage de polarisation* : Le modèle (6.3) décrit un couplage aléatoire entre les polarisations d'un seul mode qui se produit sur une longueur de propagation  $L_d \sim 1/(\Delta\beta\Gamma_{pp})$ . En considérant un impact modéré du désordre, nous pouvons avoir  $\Gamma_{pp} \sim 1$ , de sorte que cette longueur caractéristique du couplage aléatoire de polarisation est la même que celle considérée en Chapitre 2 [voir équation (2.19)].

(ii) *Couplage entre modes dégénérés* : Le modèle (6.3) décrit un couplage aléatoire dans un groupe de  $M_g$  modes dégénérés sur la longueur de propagation caractéristique

$$L_{sd}^{\text{deg}} \sim 1/(M_g\Delta\beta\bar{\Gamma}_g), \quad (6.4)$$

où  $\bar{\Gamma}_g$  est déterminé par une moyenne des coefficients de couplage  $\Gamma_{mp}$  ( $m \neq p$ ) entre les  $M_g$  modes du groupe  $g$ . En considérant un couplage modéré entre les modes  $\Gamma_{mp} < \Gamma_{pp}$  pour  $m \neq p$ , nous avons  $L_d < L_{sd}^{\text{deg}}$ . Physiquement, la longueur d'échelle  $L_{sd}^{\text{deg}}$  représente la longueur de propagation typique telle que le désordre fort réalise une équipartition de puissance au sein de chaque groupe de modes dégénérés.

(iii) *Couplage entre modes non dégénérés* ( $\beta_p \neq \beta_m$ ) : D'après le théorème de Perron-Frobenius, la matrice symétrique  $\tilde{\Gamma}$  définie par

$$\tilde{\Gamma}_{mp} = \Gamma_{mp}\hat{\mathcal{R}}[(\beta_p - \beta_m)l_\beta](1 - \delta_{mp}^K) - \left( \sum_{p' \neq m} \Gamma_{mp'}\hat{\mathcal{R}}[(\beta_{p'} - \beta_m)l_\beta] \right) \delta_{mp}^K, \quad (6.5)$$

a une valeur propre nulle simple avec le vecteur propre unitaire associé, et toutes les autres valeurs propres sont négatives. Par conséquent, les termes supplémentaires de couplage linéaire dans l'équation cinétique (6.3) tendent à redistribuer la puissance entre les modes, à un taux exponentiel qui peut être déterminé par la seconde valeur propre  $\lambda_2(\tilde{\Gamma})$  de la matrice  $\tilde{\Gamma}$ . La longueur de propagation caractéristique correspondante est donnée par

$$L_{sd}^{\text{ndeg}} \sim 1/(\Delta\beta|\lambda_2(\tilde{\Gamma})|). \quad (6.6)$$

Nous rappelons que  $\hat{\mathcal{R}}(k)$  décroît vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini, de sorte que  $\hat{\mathcal{R}}[(\beta_p - \beta_m)l_\beta]$  est beaucoup plus petite que  $\hat{\mathcal{R}}(0) = 1$  et  $L_{sd}^{\text{deg}} < L_{sd}^{\text{ndeg}}$ . En d'autres termes, la longueur d'échelle  $L_{sd}^{\text{ndeg}}$  représente la longueur de propagation typique telle que le désordre fort réalise une équipartition de puissance entre les modes non dégénérés.

Nous notons finalement que les valeurs typiques des trois longueurs d'échelles discutées ici sont estimées en référence [109], où le couplage aléatoire complet de polarisation devrait se produire sur plusieurs mètres, le couplage aléatoire entre modes dégénérés sur plusieurs dizaines de mètres, et le couplage aléatoire entre modes non dégénérés sur plusieurs centaines de mètres.

### D. Application au nettoyage de faisceau optique

Le terme supplémentaire dans l'équation cinétique (6.3) fournit la longueur de propagation caractéristique due au couplage fort entre modes  $L_{sd}^{\text{deg}}$  et  $L_{sd}^{\text{ndeg}}$ . Dans les expériences usuelles de nettoyage de faisceau nous avons  $\beta_0 l_\beta \gg 1$  (puisque  $\beta_0 \sim 10^3 \text{ m}^{-1}$ ), de sorte que le couplage entre modes non dégénérés est inhibé par la transformée de Fourier de la fonction de corrélation  $\hat{\mathcal{R}}(\beta_0 l_\beta) \ll 1$ , c-a-d,  $L_{sd}^{\text{deg}} \ll L_{sd}^{\text{ndeg}}$ . Cependant, comme discuté ci-dessus, le couplage entre modes dégénérés mène à une relaxation exponentielle vers une *équipartition de puissance au sein des groupes de modes dégénérés*. De façon inattendue, il se trouve que ceci est une propriété de la distribution de Rayleigh-Jeans, puisque l'équilibre dépend uniquement de la valeur propre  $\beta_p$ , [ $n_p = T/(\beta_p - \mu)$ ]. Cela montre que l'impact du désordre fort n'est pas préjudiciable à la condensation, mais en fait il renforce le processus de thermalisation vers la distribution de Rayleigh-Jeans.

Pour résumer cette section, dans le régime où les effets linéaires sont largement dominants (approche linéaire), le couplage entre les modes dégénérés renforce la thermalisation vers la distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans. Il serait intéressant d'étendre la théorie développée pour le désordre faible au désordre fort pour étudier l'interaction entre les couplages aléatoires entre modes et les effets non linéaires sur le processus de condensation. Ce travail est actuellement en cours, où les développements théoriques de Josselin Garnier sont bien confirmés par les simulations numériques réalisées par Nicolas Berti et Adrien Fusaro. Nous réfléchissons actuellement à la réalisation de l'expérience qui permettrait de mettre en évidence ces nouveaux résultats.

### 6.2.2 Flux d'énergie cinétique et de puissance sous-jacents à la thermalisation en fibre multimode

Dans cette section nous étudions les mécanismes responsables du processus de thermalisation vers la distribution de Rayleigh-Jeans discuté aux Chapitres 2-3. Nous montrons que l'effet de condensation est induit par un flux d'énergie cinétique vers les hauts modes et une redistribution bi-directionnelle de la puissance vers le mode fondamental et les hauts modes. Nous rappelons que nous avons dérivé l'équation cinétique (2.37) à partir de l'équation NLS (2.16). L'équation cinétique conserve la puissance  $N = \sum_p n_p$  et l'énergie  $E = \sum_p \beta_p n_p$ , où  $n_p$  est la population du mode  $p$ . Nous avons démontré que l'équation cinétique (2.37) décrit un processus irréversible de thermalisation vers l'équilibre de Rayleigh-Jeans  $n_p^{eq} = T/(\beta_p - \mu)$ , voir équation (2.6), où  $T$  est la température du système de sorte que, à l'équilibre,  $N = T \sum_p (\beta_p - \mu)^{-1}$  et  $E = T \sum_p \beta_p / (\beta_p - \mu)$ . Cette évolution irréversible vers l'équilibre de Rayleigh-Jeans est illustrée en Figures 6.1(a)-(c) qui reportent les résultats de simulations numériques de l'équation NLS (2.16) et de l'équation cinétique (2.37). Nous partons de la même distribution modale initiale pour les deux simulations, avec des phases aléatoires indépendantes pour les modes dans le cas de l'équation NLS. Durant la propagation, on observe un flux de  $n_p$  vers le mode fondamental (cascade inverse), tandis qu'une petite fraction  $n_p$  s'écoule vers les modes d'ordre élevé [27]. Pour plus de clarté, nous avons reporté en Figure 6.1 la puissance moyenne  $\tilde{n}_g$  dans chaque groupe de modes dégénérés, où  $g = 0, \dots, g_{\text{max}} - 1$  est l'indice du groupe des modes. Pour rappel,  $g_{\text{max}} = 15$ , ce qui correspond à un nombre total de modes  $M = g_{\text{max}}(g_{\text{max}} + 1)/2 = 120$ .

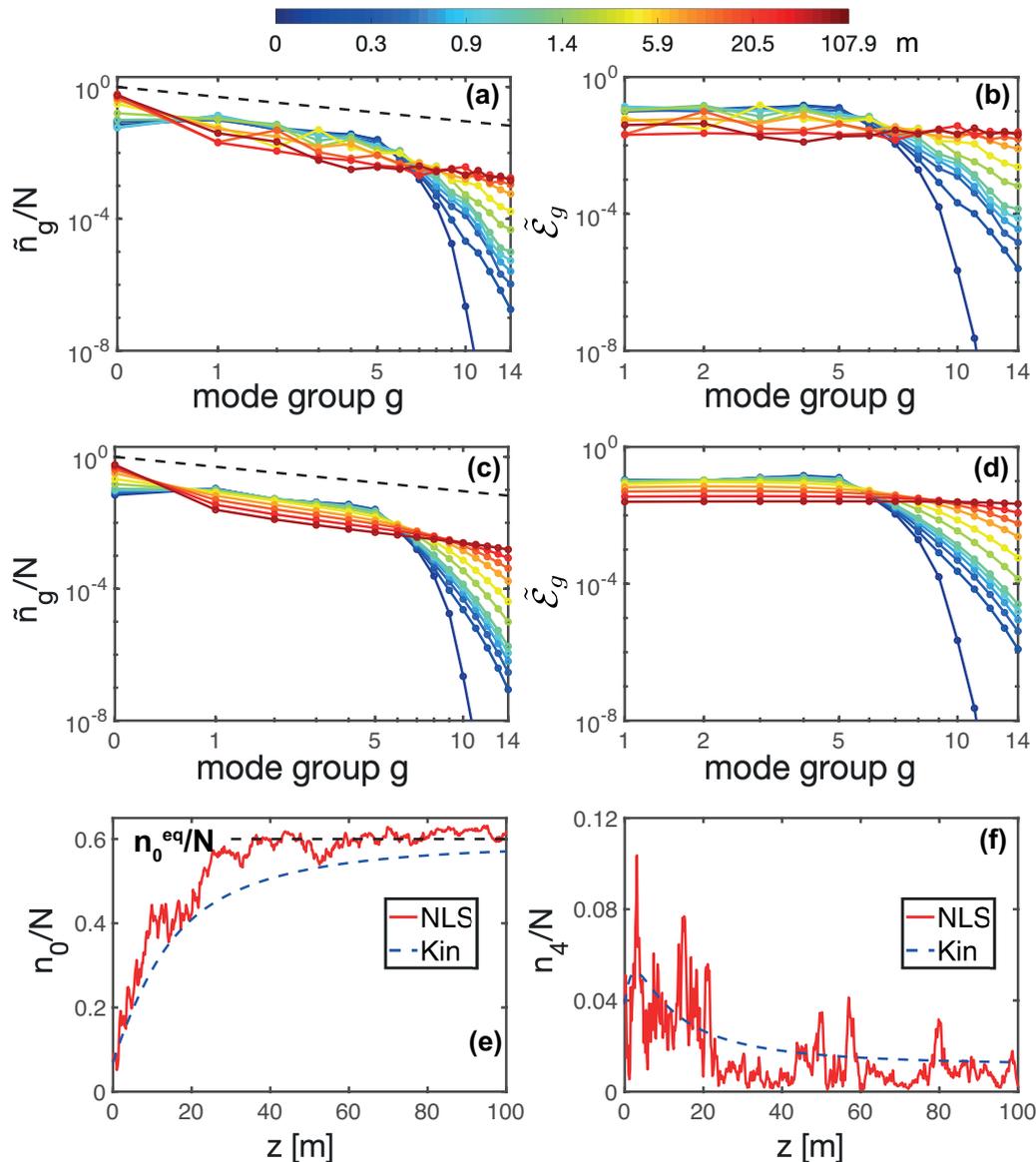


FIGURE 6.1 – Simulations numériques de l'équation NLS modale (2.16) (a-b) et cinétique (2.37) (c-d) : évolutions de la puissance pour chaque groupe de modes  $\tilde{n}_g$  (a)-(c), et de l'énergie  $\tilde{\mathcal{E}}_g$  (b,d), avec  $g_{\max} = 15$  groupes de modes non-dégénérés. Les lignes noires hachurées en (a) et (c) représentent la loi puissance de Rayleigh-Jeans  $\tilde{n}_g^{\text{eq}} \sim 1/g$ . La thermalisation est caractérisée par un flux d'énergie vers les modes d'ordre élevé et un flux de puissance vers le mode fondamental et les modes d'ordre élevé. Evolutions de  $n_0(z)$  (e) et  $n_4(z)$  (f) obtenues depuis les simulations de l'équations NLS (2.16) (ligne rouge) et de l'équation cinétique (2.37) (ligne bleu hachurée) : les composantes modales thermalisent vers la valeur à l'équilibre prédite par la théorie de Rayleigh-Jeans (la ligne noire hachurée représente  $n_0^{\text{eq}}/N = 0.6$ ). Paramètres :  $N = 47.5$  kW,  $l_\beta = 0.019$  m,  $2\pi/\sigma = 0.26$  m (les valeurs petites de  $l_\beta$  et  $2\pi/\sigma$  choisies ici permettent de vérifier le régime de validité de l'équation cinétique,  $L_d \ll L_{nl}$ ).

La loi puissance de Rayleigh-Jeans  $\tilde{n}_g \sim 1/g$  est vérifiée par les simulations de l'équation cinétique (2.37) et de l'équation NLS (2.16). De par les grands temps de calculs, nous ne pouvons pas réaliser de moyenne sur les résultats issus des simulations de l'équation NLS,

ce qui explique le bruit présent dans les distributions de  $\tilde{n}_g$  en Figure 6.1(a-b).

Ces résultats sont corroborés par la distribution modale de l'énergie, qui présente un flux vers les modes d'ordre élevé (cascade de turbulence directe). Dans cet exemple, nous avons considéré une valeur de l'énergie  $E$  inférieure à l'énergie critique  $E_{\text{crit}}$ , de sorte que le système se trouve dans un état partiellement condensée [26]. La distribution modale tend donc vers un état d'équilibre qui exhibe une équipartition d'énergie parmi les modes  $\mathcal{E}_p = (\beta_p - \beta_0)n_p \sim T$  (ou  $\tilde{\mathcal{E}}_g = \beta_0 g \tilde{n}_g \sim T$ ), voir Figures 6.1(b,d). Le processus de thermalisation de Rayleigh-Jeans est donc caractérisé par une population macroscopique du mode fondamental, comme illustré en Figure 6.1(e), où la fraction de puissance condensée tend vers la valeur théorique à l'équilibre  $n_0^{eq}/N \simeq 0.6$ . Nous notons que le bon accord entre les simulations de l'équation NLS et de l'équation cinétique en Figure 6.1 est obtenu sans utiliser de paramètres ajustables.

Nous reprenons les résultats expérimentaux présentés en Chapitre 3 des distributions d'intensités en champ proche [26] afin de les comparer aux simulations de l'équation NLS (2.16). La Figure 6.2 (colonne gauche) reporte les distributions d'intensités moyennées sur  $\sim 50$  réalisations expérimentales pour trois valeurs différentes de l'énergie  $E$ , qui correspondent à une fraction de puissance condensée à l'équilibre de  $n_0^{eq}/N = 0.6, 0.4, 0.2$ . Nous reportons les distributions d'intensités en sortie de fibre mesurées à 12 m (lignes rouges), et «en entrée» après 20 cm de propagation dans la MMF (représentant les «conditions initiales», lignes bleues). Les distributions d'intensités en sortie sont comparées aux distributions d'intensités théoriques de Rayleigh-Jeans  $I^{eq}(r)$  (lignes vertes hachurées). Comme discuté en Chapitre 3, le bon accord entre les mesures expérimentales et la distribution théorique de Rayleigh-Jeans en Figure 6.2 (colonne gauche) est obtenu sans paramètres ajustables.

Nous n'avons pas accès à des mesures de la distribution de  $n_p$  pour chacun des modes  $p$  individuels dans l'expérience. Cependant, pour de grandes valeurs de  $p_x = p_y$ , les formes asymptotiques des fonctions de Hermite-Gauss montrent que le support d'un mode  $u_p(r)$  est essentiellement limité par  $r \leq \sqrt{2ga}$ , avec  $g = p_x + p_y$  et  $a$  le rayon du coeur de la fibre [186]. Il y a donc une correspondance entre le rayon  $r$  et l'indice du groupe  $g$ . Dans l'expérience, la cascade bi-directionnelle de puissance vers le mode fondamental et les modes d'ordre élevé ( $r \simeq a$ ) est clairement visible pour une forte condensation, voir Figure 6.2(a) pour  $n_0^{eq}/N = 0.6$ . En augmentant l'énergie  $E$  (c-a-d, en diminuant  $n_0^{eq}/N$ ), le degré d'incohérence du faisceau injecté augmente aussi et peuple donc les modes d'ordre élevé [27]. Il en résulte que seule la cascade inverse de puissance vers le mode fondamental est clairement visible, voir Figure 6.2(c). Notons aussi que, comme démontré expérimentalement récemment [85], un faisceau optique «auto-nettoyé» présente un haut degré de cohérence de phase. Notons également que nous n'avons pas été en mesure de mettre en évidence expérimentalement la cascade directe d'énergie  $E$  car nous n'avons pas accès à une mesure de la distribution  $n_p$ . Des travaux sont en cours afin d'avoir accès à une mesure expérimentale indirecte de la population des modes  $n_p$ .

Les simulations numériques de l'équation NLS modale (2.16) reproduisent qualitativement le comportement observé expérimentalement. Ceci est illustré en Figure 6.2 (colonne droite), où une moyenne sur la propagation a été réalisée de 12 m à 22 m afin de lisser

les profils d'intensités en sortie (lignes rouges). Puisque les paramètres qui caractérisent le désordre ne sont pas connus précisément, nous considérons en Figure 6.2 des valeurs expérimentales plausibles  $l_\beta = 0.3$  m et  $2\pi/\sigma = 2.14$  m (voir Chapitre 2). Pour ces paramètres, le désordre ne domine plus les effets non linéaires ( $L_d \sim L_{nl}$ ), l'équation cinétique (2.37) n'est donc plus à strictement parler valable.

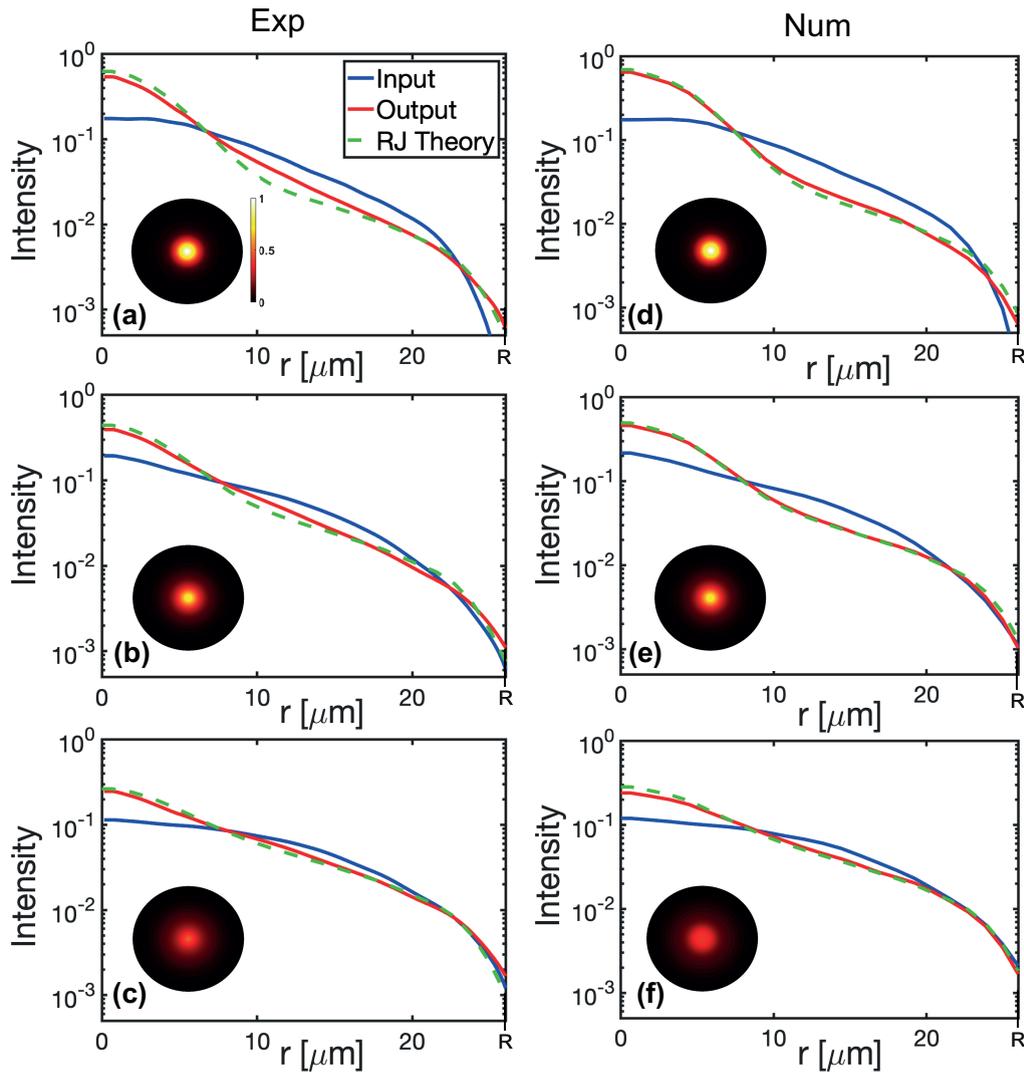


FIGURE 6.2 – **Comparaison entre les mesures expérimentales et les simulations numériques** : (a)-(c) : distributions d'intensités expérimentales moyennées sur les réalisations en entrée (bleu), et en sortie (rouge) de la MMF. (d)-(f) : simulations numériques correspondantes de l'équation NLS (2.16), voir le texte pour les paramètres. La fraction de puissance condensée est  $n_0^{eq}/N = 0.6$  (1ère ligne) ;  $n_0^{eq}/N = 0.4$  (2ème ligne),  $n_0^{eq}/N = 0.2$  (3ème ligne). Les lignes vertes hachurées représentent la distribution d'intensité théorique de Rayleigh-Jeans  $I^{eq}(r)$  depuis l'équation (3.5), sans l'utilisation de paramètres ajustables. Les intensités sont tracées en fonction de la distance moyenne angulaire  $r = |\mathbf{r}|$ . Les encarts montrent les distributions d'intensités 2D avec la même échelle de couleur (le cercle représente le coeur de la fibre multimode de rayon  $a = 26$   $\mu\text{m}$ ).

Cependant, l'effet d'accélération du processus de condensation en diminuant le désordre discuté en Chapitre 2 est néanmoins responsable de l'effet de condensation rapide observé

pour le faible désordre considéré en Figure 6.2. Ce constat est clairement illustré par la comparaison des simulations en Figure 6.1 (propagé sur  $\sim 100$  m) et en Figure 6.2 (propagé sur  $L = 12$  m). En dépit de l'accélération du processus de thermalisation, notons que nous avons dû augmenter la puissance à 22 kW dans les simulations afin d'avoir un bon accord entre les simulations de l'équation NLS et les résultats expérimentaux en Figure 6.2. Comme déjà discuté en Chapitre 2, un meilleur accord quantitatif entre les résultats expérimentaux et les simulations numériques pourrait être obtenu en étendant au domaine spatio-temporel le modèle NLS de propagation afin de prendre en compte le régime pulsé du laser considéré dans les expériences.

### 6.2.3 Températures négatives en fibre multimode

Nous avons discuté ci-dessus que l'effet de condensation d'ondes en fibre multimode se caractérise par un flux d'énergie vers les modes d'ordre élevé et une cascade bi-directionnelle de puissance vers le mode fondamental et les modes d'ordre élevé. Ces flux sont des propriétés du processus de thermalisation vers un état d'équilibre avec une température positive. Cependant, une conséquence intéressante de notre système fibré, à savoir le nombre fini de modes et une borne supérieure d'énergie ( $E_{\max} = \beta_0 g_{\max} N$ ), est que le système peut présenter un état d'équilibre avec une température négative [24, 187, 188]. Dans ce cas, la condition de positivité de la distribution d'équilibre  $n_p^{eq} = T/(\beta_p - \mu) > 0$  impose  $\mu > \max(\beta_p) = g_{\max} \beta_0$ . La distribution d'équilibre est alors caractérisée par une population modale inversée ( $\tilde{n}_{g+1}^{eq} > \tilde{n}_g^{eq}$ ). Cette distribution d'intensité d'équilibre est valable pour une énergie

$$E > E_t = N \langle \beta_p \rangle = E_{\min}(2g_{\max} + 1)/3,$$

où  $\langle \beta_p \rangle$  est la moyenne arithmétique des valeurs propres. Notons que le dénominateur de la distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans s'annule maintenant pour  $\mu \rightarrow g_{\max} \beta_0$ . En conséquence, le flux de la distribution  $\tilde{n}_g$  est maintenant orienté vers le niveau d'énergie le plus élevé, c-a-d, le plus haut groupe de mode  $g = 14$ , tandis que le flux d'énergie est orienté vers les modes d'ordre bas.

Le processus de thermalisation vers un état d'équilibre à température négative est démontré par la simulation numérique de l'équation cinétique (2.37) en Figure 6.3. Pour ce type d'équilibre, le rôle de l'équipartition d'énergie est joué par la quantité  $\mathcal{F}_p = (\beta_p - g_{\max} \beta_0) n_p \simeq T < 0$  (ou  $\tilde{\mathcal{F}}_g = \beta_0 (g - g_{\max} + 1) \tilde{n}_g \simeq T < 0$ ), qui est donc uniformément distribuée parmi les modes, voir encart de la Figure 6.3(a). Ici nous avons considéré une grande valeur de l'énergie ( $E/E_{\min} \simeq 14$ ) de façon à avoir une population macroscopique du plus haut groupe de mode  $\tilde{n}_{g_{\max}} \gg \tilde{n}_g$  [27]. Nous notons qu'il n'y a pas de cohérence de phase dans un tel groupe de modes dégénérés.

Nous complétons finalement l'étude des propriétés thermodynamiques du système discutées en Chapitre 3 avec ces états d'équilibre de température négative. En procédant comme en Chapitre 3, nous avons

$$S^{eq}(\mu) = - \sum_p \log(\beta_p - \mu) - M \log \left( \sum_p \frac{1}{\beta_p - \mu} \right), \quad (6.7)$$

$$\frac{E(\mu)}{E_{\min}} = \frac{\sum_p \frac{\beta_p}{\beta_p - \mu}}{\sum_p \frac{\beta_0}{\beta_p - \mu}}, \quad (6.8)$$

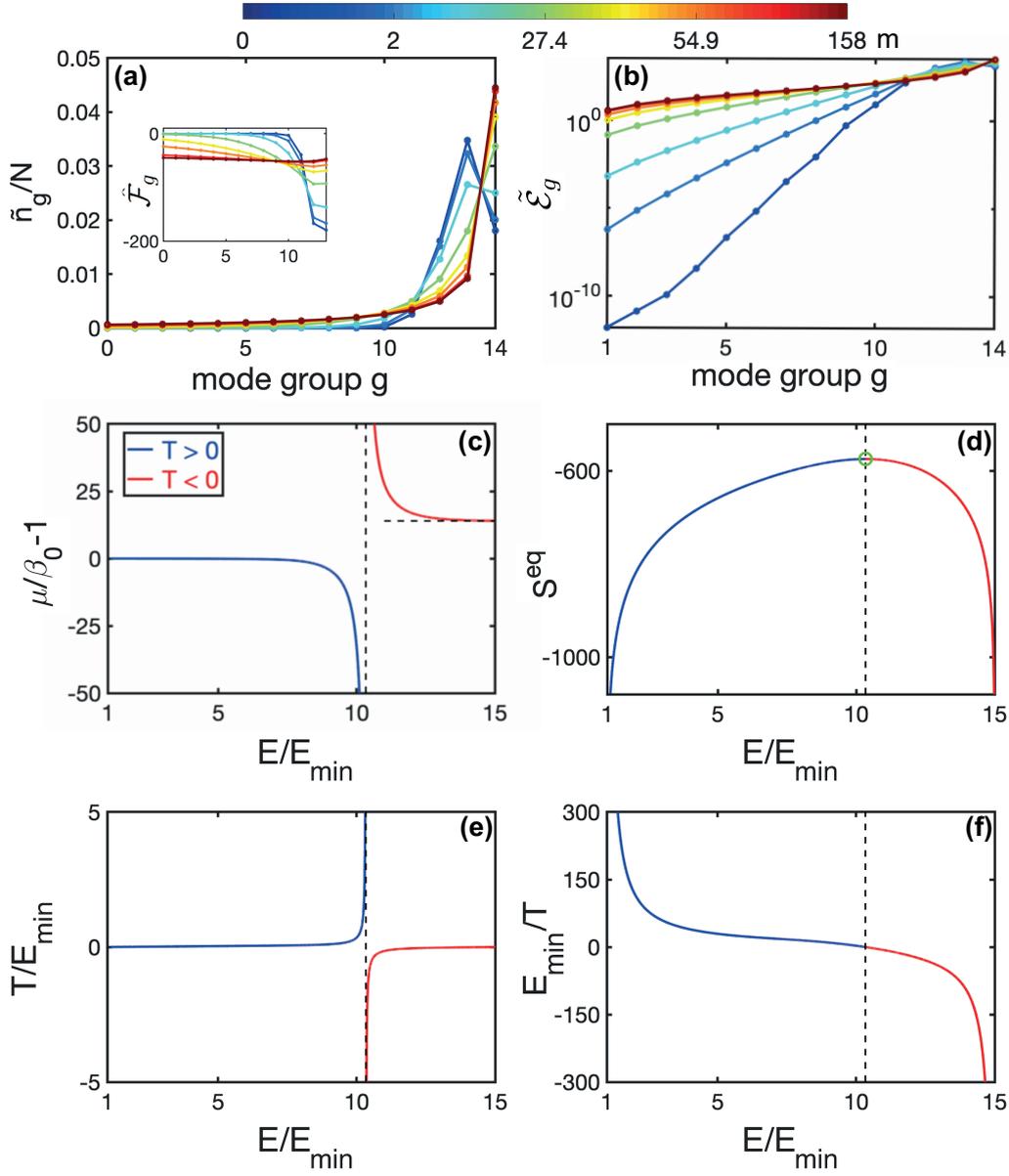
$$\frac{T(\mu)}{E_{\min}} = \frac{1}{\sum_p \frac{\beta_0}{\beta_p - \mu}}, \quad (6.9)$$

où on rappelle que  $E_{\min} = N\beta_0$  dénote l'énergie minimale (quand toute la puissance peuple le mode fondamental). L'évolution de  $\mu$  vs  $E$  est reportée en Figure 6.3(c) depuis l'équation (6.8). Elle montre que  $\mu \rightarrow \beta_0^-$  pour  $E \rightarrow E_{\min}$  et  $\mu \rightarrow g_{\max}\beta_0^+$  pour  $E \rightarrow E_{\max}$ . Dans les deux cas le dénominateur de la distribution de Rayleigh-Jeans s'annule, ce qui mène à une population macroscopique du mode le plus bas ( $g = 0$ ), et du plus haut groupe de mode ( $g = 14$ ), respectivement.

L'affichage paramétrique en fonction de  $\mu$  de (6.7) et (6.8) donne  $S^{eq}$  en Figure 6.3(d), tandis que l'affichage paramétrique correspondant de (6.8) et (6.9) donne  $T$  vs  $E$  en Figure 6.3(e). Nous notons la concavité de l'entropie en fonction de l'énergie en accord avec les propriétés thermodynamiques usuelles de l'entropie. Les états d'équilibre à température négative apparaissent pour  $E > E_t$ , où l'entropie décroît en augmentant l'énergie,  $T = (\partial E / \partial S^{eq})_{M,N} < 0$  [27]. Nous notons que de tels états à température négative ( $E > E_t$ ) sont plus «chauds» que ceux à température positive ( $E < E_t$ ), puisque l'énergie s'écoulerait spontanément de la température négative à la température positive si les systèmes étaient mis en contact.

Nous remarquons en Figure 6.3(e) que l'état d'équilibre correspondant à  $T = 0^+$  ( $T = 0^-$ ) se réfère à une distribution de la population concentrée dans le mode le plus bas (plus haut) avec  $E = E_{\min}$  ( $E = E_{\max}$ ). En conséquence, les états  $T = 0^+$  et  $T = 0^-$  sont fondamentalement différents, alors qu'il n'y a presque aucune différence entre les états  $T = +\infty$  et  $T = -\infty$  pour  $E \simeq E_t$ . Ce dernier état d'équilibre pour  $E = E_t$  correspond à une équipartition de la puissance entre les modes  $n_p^{eq} = \text{const}$ , et se réfère à l'état le plus désordonné avec  $S_{\max}^{eq} = -M \log M$  [26], voir le cercle vert en Figure 6.3(c). La divergence à première vue paradoxale de  $T = \pm\infty$  pour l'état homogène  $n_p^{eq} = \text{const}$  disparaît si l'on considère l'inverse de la température comme paramètre approprié (de la même façon que le multiplicateur de Lagrange  $1/T$  apparaît naturellement en mécanique statistique). Dans ce cas, la courbe  $1/T$  vs  $E$  présente un comportement continu, comme illustrée en Figure 6.3(f).

Une perspective naturelle de cette étude est d'observer expérimentalement ce processus de thermalisation vers un état d'équilibre à température négative. Les simulations numériques préliminaires réalisées en ce sens indiquent que le processus de thermalisation vers des états d'équilibre à  $T < 0$  de longueurs non linéaires que dans le cas usuel  $T > 0$ . Notons aussi que, compte tenu de la forte dégénérescence du mode condensé pour  $E \rightarrow E_{\max}$ , cela soulève une question intéressante sur la possibilité d'avoir des «condensats fragmentés», en relation avec la référence [189].



**FIGURE 6.3 – Thermalisation de Rayleigh-Jeans vers un état d'équilibre avec température négative :** Simulation de l'équation cinétique (2.37) : le flux de  $\tilde{n}_g$  est essentiellement orienté vers le dernier groupe de modes dégénérés (le plus haut niveau d'énergie  $g = g_{\max} - 1$ ) (a), tandis que le flux d'énergie  $\tilde{E}_g$  est orienté vers les modes d'ordre bas (b). Les encarts montrent que  $\tilde{F}_g = \beta_0(g - g_{\max} + 1)\tilde{n}_g$  relaxe vers une équi-partition entre les modes,  $\tilde{F}_g \simeq T < 0$  (ligne rouge), comme anticipé par la distribution à l'équilibre de Rayleigh-Jeans ( $N = 47.5$  kW,  $l_\beta = 0.3$  m,  $2\pi/\sigma_\beta = 2.1$  m,  $g_{\max} = 15$ ). (c)  $\mu/\beta_0 - 1$  vs  $E/E_{\text{crit}}$  : notons que le comportement asymptotique  $\mu \rightarrow \beta_0^-$  pour  $E \rightarrow E_{\min}$ , et  $\mu \rightarrow g_{\max}\beta_0^+$  pour  $E \rightarrow E_{\max}$ . La ligne horizontale hachurée représente  $\mu \rightarrow g_{\max}\beta_0$  et la ligne verticale hachurée représente  $E = E_t$ . (d)  $S^{eq}$  vs  $E/E_{\min}$  montre  $1/T = (\partial S^{eq}/\partial E)_{M,N} < 0$  pour  $E > E_t$ . Le cercle vert représente  $S_{\max}^{eq} = -M \log M$  à  $E = E_t$ . (e)  $T/E_{\min}$  vs  $E/E_{\min}$  : les divergences  $T = \pm\infty$  pour  $E = E_t^\mp$  supprimées en représentant  $E_{\min}/T$  vs  $E/E_{\min}$  (f).

## Annexe A

# Turbulence faible de Langmuir dans les fibres optiques multimodes désor- données

*We consider the propagation of temporally incoherent waves in multimode optical fibers (MMFs) in the framework of the multimode nonlinear Schrödinger (NLS) equation accounting for the impact of the natural structural disorder that affects light propagation in standard MMFs (random mode coupling and polarization fluctuations). By averaging the dynamics over the fast disordered fluctuations, we derive a Manakov equation from the multimode NLS equation, which reveals that the Raman effect introduces a nontrivial coupling among the modes. Then applying the wave turbulence theory on the Manakov equation, we derive a very simple scalar kinetic equation describing the evolution of the multimode incoherent waves. The structure of the kinetic equation is analogous to that developed in plasma physics to describe weak Langmuir turbulence. The extreme simplicity of the derived kinetic equation provides physical insight into the multimode incoherent wave dynamics. It reveals the existence of different collective behaviors where all modes self-consistently form a multimode spectral incoherent soliton state. Such an incoherent soliton can exhibit a discrete behavior characterized by collective synchronized spectral oscillations in frequency space. The numerical simulations of the generalized multimode NLS equation are found in remarkable quantitative agreement with those of the derived scalar kinetic equation without using adjustable parameters.*

### Sommaire

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>A.1 Introduction</b>                                | <b>142</b> |
| <b>A.2 Multimode NLS equation</b>                      | <b>143</b> |
| <b>A.3 Manakov reduction</b>                           | <b>144</b> |
| <b>A.4 Weak Langmuir turbulence kinetic equation</b>   | <b>146</b> |
| <b>A.5 Numerical simulations</b>                       | <b>149</b> |
| <b>A.6 Conclusion and discussion</b>                   | <b>153</b> |
| <b>A.7 Acknowledgements</b>                            | <b>154</b> |
| <b>Appendix A : Derivation of the Manakov equation</b> | <b>155</b> |

---

## A.1 Introduction

Multimode optical fibers (MMF) constitute ideal test-beds for the study of complex spatio-temporal nonlinear optical phenomena. The phenomena that can be tested include multi-octave spanning supercontinuum generation involving intense visible frequency combs, multiple filamentation processes, or multimode solitons [18, 63, 190–193]. Actually, light dynamics in MMFs involves a variety of nonlinear effects whose complexity requires a deep understanding of spatiotemporal nonlinear propagation, with a multitude of applications such as the improvement of optical signal processing techniques for spatial division multiplexing [83], or the development of novel high-energy versatile fibre sources [194].

Aside from potential applications, MMFs also provide a natural platform for the study of the interplay of nonlinearity and disorder [195–197], which is a fundamental problem of general interest [198–202]. As a matter of fact, light propagation in a conventional MMF is known to be affected by a structural disorder of the material due to inherent imperfections and external perturbations (e.g., bending, twisting, tensions, or core-size variations in the fabrication process) [83], a feature which is relevant to endoscopic imaging for instance [203]. When such a natural disorder of the fiber dominates over nonlinear effects, the nonlinear Schrödinger (NLS) equation describing the propagation of light can be reduced to an effective equation through the so-called Manakov approximation, a procedure originally developed for single-mode fibers [113] and more recently extended to MMFs [87, 110–112, 204, 205].

From a different perspective, a fundamental phenomenon of spatial beam self-organization, termed “beam self-cleaning”, has been recently discovered in (graded-index) MMFs [20, 82]. At variance with an apparently similar phenomenon driven by the dissipative Raman effect in MMFs, known as Raman beam cleanup [206], this self-organization process is due to a purely conservative Kerr nonlinearity [20]. While the detailed understanding of spatial beam cleaning is still debated, different works indicate that certain regimes of beam self-cleaning can be described as a natural process of optical wave thermalization to thermal equilibrium [21–24, 207], a feature that has been recently demonstrated experimentally [25–27]. This has motivated the development of a wave turbulence formalism that takes into account the structural disorder inherent to light propagation in MMFs. Following this approach, a wave turbulence kinetic equation has been derived, which revealed that the structural disorder leads to a significant acceleration of the process of thermalization and condensation, a feature that can help to understand some regimes of spatial beam-cleaning in MMFs [21].

Our aim in this paper is to study the interplay of disorder and nonlinearity in the framework of a different regime of light propagation in MMFs. At variance with the previous theoretical works describing the purely spatial dynamics [21, 22], here we consider the spatio-temporal multimode dynamics where *temporally incoherent waves* propagate through the MMF. On the basis of the wave turbulence theory [7, 12, 14, 15, 34, 64, 91], we show that the temporal multimode turbulent dynamics is dominated by the Raman effect. More precisely, under the assumption that the structural disorder dominates over nonlinear effects, we derive a Manakov equation from the multimode NLS equation, which reveals that the Raman effect introduces a non-trivial coupling among the modes. Next,

applying the wave turbulence theory to the multimode Manakov equation, we derive a remarkably simple scalar kinetic equation that governs the evolution of the temporal averaged spectrum of the multimode optical field. The kinetic equation has a form analogous to that developed in plasma physics to describe weak Langmuir turbulence in plasma [47, 64, 208, 209]. The derived kinetic equation then greatly simplifies the multimode NLS equation and provides physical insight into the incoherent wave dynamics. It reveals the existence of several interesting multimode collective behaviors of the incoherent waves that propagate through the MMF. As a general rule, the multimode turbulent system exhibits a self-organization process, in which all modes self-consistently form a vector spectral incoherent soliton (VSIS). This provides a generalization of the scalar (or bimodal) spectral incoherent solitons that were previously investigated by *always ignoring the structural disorder of the fiber* [7, 63, 65, 210, 211]. The reported VSIS can also exhibit a discrete behavior, which is characterized by collective synchronized spectral oscillations of the discrete soliton in frequency space. The numerical simulations of the generalized multimode NLS equation are found in remarkable quantitative agreement with the simple derived kinetic equation *without using adjustable parameters*.

From a broader perspective, we remark that Langmuir turbulence in the strongly nonlinear regime has been widely studied both theoretically and experimentally [212, 213], in particular in hydrodynamics [213–216], or in laboratory [217, 218] and space plasma experiments [219, 220], while cavitating Langmuir turbulence has been evidenced in natural Earth’s aurora driven by solar wind [221]. However, aside from preliminary experiments in [211], experimental evidence of weak Langmuir turbulence has not been reported in the context of nonlinear optics [7]. In this work we show that random mode coupling in optical fibers has a stabilizing role on the dynamics of spectral incoherent solitons, which makes disordered MMFs promising for the experimental study of weak Langmuir optical turbulence.

## A.2 Multimode NLS equation

We consider the generalized NLS equation describing the propagation of the optical field in a multimode fiber with  $N$  modes (i.e.,  $2N$  modes accounting for polarization effects) [86]. Following the notations of Ref. [86], the vector electric field can be expanded into a superposition of the individual modes  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t) = \sum_p \mathbf{F}_p(\mathbf{r})A_p(z, t)$ , where  $\mathbf{F}_p(\mathbf{r})$  denotes the normalized transverse vector mode profile and  $A_p(z, t)$  the modal envelope with  $z$  the longitudinal propagation variable,  $\mathbf{r} = (x, y)$  the vector in the transverse plane and  $t$  the time variable. The modal vector can be written  $\mathbf{A}(z, t) = (A_p(z, t))_{p=1}^{2N}$ , where the components  $A_{2j-1}, A_{2j}$  refer to the orthogonal linear polarization components of the  $j$ -th vector mode. The field satisfies the generalized multimode NLS equation [86] :

$$i\partial_z \mathbf{A} + \mathbf{D}(z)\mathbf{A} + \mathbf{D}_0\mathbf{A} + i\mathbf{V}\partial_t \mathbf{A} - \mathbf{W}\partial_{tt} \mathbf{A} + \gamma(1 - f_R)\mathbf{P}(\mathbf{A}) + \gamma f_R \mathbf{Q}(\mathbf{A}) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Here,  $\mathbf{D}_0$ ,  $\mathbf{V}$  and  $\mathbf{W}$  are deterministic  $2N \times 2N$  diagonal matrices that model respectively the propagation constants, the modal inverse group velocity and the modal dispersion (relative to the fundamental fiber mode). The terms  $\mathbf{P}(\mathbf{A})$  and  $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$  are, respectively,

the Kerr nonlinearity and the Raman nonlinearity, which have the general forms

$$[\mathbf{P}(\mathbf{A})]_p = \sum_{l,m,n=1}^{2N} S_{plmn}^K A_l A_m A_n^*, \quad (\text{A.2})$$

$$[\mathbf{Q}(\mathbf{A})]_p = \sum_{l,m,n=1}^{2N} S_{plmn}^R A_l [R \star (A_m A_n^*)], \quad (\text{A.3})$$

where  $R$  is the Raman response function,  $*$  stands for complex conjugation and  $\star$  denotes the convolution product. The Raman term contributes with a fraction  $f_R$  to the overall nonlinearity ( $f_R = 0.18$  for silica glass fibres). The nonlinear coefficient is  $\gamma = n_2 \omega_0 / c = n_2 k_0$ , where  $\omega_0$  is the laser carrier frequency and  $\lambda = 2\pi/k_0$  the corresponding wavelength. The tensors  $S_{plmn}^K$  and  $S_{plmn}^R$  are given in explicit form in Ref. [86].

We consider the regime of strong random coupling among the spatial modes and polarization states, which is relevant for large propagation lengths in the MMF, typically larger than a few hundred meters [109]. The most general form of random mode coupling that conserves the total power  $\mathcal{P} = \sum_{p=1}^{2N} |A_p|^2$  is provided by a  $2N \times 2N$  random matrix-valued process  $\mathbf{D}(z)$  that is Hermitian. Note that the structural disorder of the MMF may also affect the group-velocity and the group-velocity dispersion of the propagating modes, which can be modelled by considering random matrices  $\mathbf{V}(z)$  and  $\mathbf{W}(z)$  in Eq. (A.9) as will be discussed later.

### A.3 Manakov reduction

We consider the so-called Manakov regime where the impact of strong linear random coupling dominates over nonlinear effects [87], i.e.,  $L_{nl} \gg l_c, 2\pi/\sigma$ , where  $L_{nl} = 1/(\gamma\mathcal{P})$  is the nonlinear length, while  $l_c$  and  $\sigma$  denote the correlation length and standard deviation of the random process  $\mathbf{D}(z)$  that models the structural disorder. We recall that the Manakov reduction has already been applied to the multimode NLS equation without the Raman effect [87, 110–112]. On the other hand, the Manakov approximation has been considered to study the Raman amplification process in Ref. [204], and applied to the multimode NLS equation accounting for the first-order correction of the Raman response [205]. Here, we generalize the derivation of the Manakov equation, which reveals that the Raman effect introduces a nontrivial coupling among the modes that plays a key role for the incoherent propagation regime.

Let us introduce the unitary matrix  $\mathbf{U}(z)$  solution of  $i\partial_z \mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{U}$ , with  $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$ , and define the mode amplitudes in the local disordered axes  $\mathbf{B}(z, t) = \mathbf{U}^{-1}(z)\mathbf{A}(z, t)$ , with  $\mathbf{U}^{-1}(z) = \mathbf{U}^\dagger(z)$ . We now follow the idea originally introduced for single mode fibers by Wai and Menyuk [113], in which birefringence fluctuations are assumed so strong that the probability density of the polarization state uniformly covers the surface of the Poincaré sphere, so that one can average the propagation equation over all polarization states. By generalizing to MMFs, we assume that the linear coupling among the modes due to  $\mathbf{D}(z)$  is the dominant effect, so that the random matrix-valued process  $\mathbf{U}(z)$  becomes uniformly distributed in the set of unitary matrices. In this way, we derive in the Appendix the

following homogenized Manakov multimode NLS equation :

$$i\partial_z \mathbf{B} + \tilde{d}\mathbf{B} + \frac{i}{\tilde{v}}\partial_t \mathbf{B} - \frac{\tilde{\beta}}{2}\partial_{tt} \mathbf{B} + \gamma(1 - f_R)\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{B}) + \gamma f_R \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{B}) = 0, \quad (\text{A.4})$$

with

$$[\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{B})]_p = (\tilde{S}_{(1)}^K + \tilde{S}_{(2)}^K) \left[ \sum_{l=1}^{2N} |B_l|^2 \right] B_p, \quad (\text{A.5})$$

$$[\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{B})]_p = \tilde{S}_{(1)}^R \sum_{l=1}^{2N} B_l [R \star (B_p B_l^*)] + \tilde{S}_{(2)}^R B_p \left[ R \star \left( \sum_{l=1}^{2N} |B_l|^2 \right) \right], \quad (\text{A.6})$$

where we have for  $X \in \{K, R\}$

$$\tilde{S}_{(1)}^X = \frac{1}{4N^2 - 1} \sum_{p', l'} S_{p' l' p' l'}^X - \frac{1}{2N(4N^2 - 1)} \sum_{p', l'} S_{p' p' l' l'}^X,$$

$$\tilde{S}_{(2)}^X = \frac{1}{4N^2 - 1} \sum_{p', l'} S_{p' p' l' l'}^X - \frac{1}{2N(4N^2 - 1)} \sum_{p', l'} S_{p' l' p' l'}^X.$$

As already discussed in previous works [87, 110, 111], Eq. (A.5) shows that any instantaneous cubic nonlinearity gives rise to an effective (phase-insensitive) deterministic Manakov-type nonlinear term. Eq. (A.6) also shows the contribution of the Raman effect, which gives rise to an effective Raman-type nonlinear term that depends only on two parameters,  $\tilde{S}_{(1)}^R$  and  $\tilde{S}_{(2)}^R$ .

Note that, as a result of the Manakov averaging procedure, the propagation constant, the group velocity and the dispersion coefficients have been homogenized in (A.4) :

$$\tilde{d} = \frac{1}{2N} \text{Tr}(\mathbf{D}_0), \quad \frac{1}{\tilde{v}} = \frac{1}{2N} \text{Tr}(\mathbf{V}), \quad \tilde{\beta} = \frac{1}{N} \text{Tr}(\mathbf{W}).$$

Accordingly, all of the modes evolve with the same propagation constant, group velocity and dispersion coefficient. Note however that this results from the assumption that the matrices  $\mathbf{V}$  and  $\mathbf{W}$  in (A.1) are deterministic and constant. If the matrix  $\mathbf{V}(z)$  in (A.1) was randomly varying, with random fluctuations that could be correlated to those of  $\mathbf{D}(z)$ , then the transport term in (A.4) would have the form  $\tilde{\mathbf{V}}\partial_t \mathbf{B}$  instead of  $\frac{1}{\tilde{v}}\partial_t \mathbf{B}$ , with the effective matrix  $\tilde{\mathbf{V}} = \langle \mathbf{U}^\dagger(z) \mathbf{V}(z) \mathbf{U}(z) \rangle$ , where  $\langle \cdot \rangle$  stands for the average with respect to the stationary distribution of  $(\mathbf{U}(z), \mathbf{V}(z))$ . The same argument holds for the dispersion effects  $\mathbf{W}$ , and the corresponding effective matrix  $\tilde{\mathbf{W}} = \langle \mathbf{U}^\dagger(z) \mathbf{W}(z) \mathbf{U}(z) \rangle$ .

We finally remark that the nonlinear Raman-type terms in Eq. (A.4) are different from those reported in [205], because in this latter work the authors made use of the assumption that the nonlinear terms are co-polarized with the field, which is not justified in general. In particular, when one considers the propagation of incoherent waves, the terms that

are not co-polarized (i.e., the ones associated with  $\tilde{S}_1^R$  in Eq.(A.6)) are the *only ones that give rise to a coupling among the modes*. These terms should not be neglected in our framework, a feature that will become apparent from the weak Langmuir turbulence kinetic equation discussed in the next section.

## A.4 Weak Langmuir turbulence kinetic equation

In the following we derive the weak Langmuir turbulence kinetic equation governing the evolution of the averaged spectra of the incoherent waves that propagate in the MMF. For this purpose, we consider the weakly nonlinear regime where linear dispersion effects dominate over nonlinear effects  $L_{lin,j} \ll L_{nl}$ , where  $L_{lin,1} = t_c \tilde{v}$  and  $L_{lin,2} = 2t_c^2 / \tilde{\beta}$  denote the characteristic propagation lengths associated to the first- and second-order dispersion effects in the modal NLS Eq. (A.1), and  $t_c$  is the correlation time of the incoherent waves. We are interested in the propagation of incoherent waves, where  $A_p(z = 0, t)$  are random functions with fluctuations that are statistically stationary in time. Then the components  $B_p(z = 0, t)$  are also random functions with statistically stationary fluctuations. By taking an average over the random initial conditions  $B_p(z = 0, t)$ , we can derive the wave turbulence Langmuir kinetic equation by following the procedure of Ref. [7]. Next, taking the Fourier transform, the spectra  $n_{B_p}(\omega, t, z) = \int \langle B_p(z, t + \tau/2) B_p^*(z, t - \tau/2) \rangle \exp(-i\omega\tau) d\tau$ , satisfy the multimode weak Langmuir turbulence kinetic equations :

$$\begin{aligned} \partial_z n_{B_p}(\omega, z) = & \gamma_1 n_{B_p}(\omega) \sum_{j=1}^{2N} \int g(\omega - u) n_{B_j}(u) du \\ & + \gamma_2 n_{B_p} \int g(\omega - u) n_{B_p}(u) du, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

where  $\gamma_j = \gamma f_R \tilde{S}_j^R / \pi$  for  $j = 1, 2$ , and  $g(\omega) = \Im[\tilde{R}(\omega)]$  denotes the Raman gain function,  $\tilde{R}(\omega)$  being the Fourier transform of the response function  $R(t)$ . Note that the Raman gain  $g(\omega)$  is an odd function (see the inset of Fig. 1(a)), reflecting the fact that the low-frequency components are amplified to the detriment of the high-frequency components. We have omitted to write the time dependence for the evolution of the spectrum in Eq.(A.7), i.e.,  $n_{B_p}(\omega, t, z) \rightarrow n_{B_p}(\omega, z)$ . Indeed, since the initial condition exhibits a stationary statistics and the kinetic Eq.(A.7) does not explicitly involve the time variable  $t$ , then the stationary statistics is preserved during the propagation and the averaged spectrum does not depend on time. It is apparent in the kinetic Eq. (A.7) that only the first term proportional to  $\gamma_1$  gives rise to a nonlinear coupling among the modes.

It is important to note that the initial conditions in the basis  $B_p$  can be homogenized. Indeed, let the field propagates over few correlation lengths  $l_c$ , in such a way that the matrix  $\mathbf{U}$  becomes uniformly distributed while other linear and nonlinear effects are still negligible. Under such circumstances, the initial conditions for  $B_p(z, t)$  are such that  $\langle B_p(z = 0^+, t) B_l^*(z = 0^+, t') \rangle = \delta_{pl} \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \langle A_j(z = 0, t) A_j^*(z = 0, t') \rangle$ , where  $\delta_{pl} = 1$  if  $p = l$  and 0 otherwise. Taking the Fourier transform, we obtain a homogeneous initial condition for the spectra  $n_{B_p}(\omega, z = 0^+) = \frac{1}{2N} \sum_j n_{A_j}(\omega, z = 0)$  for  $p = 1, \dots, 2N$ . An other important point to stress is that this homogeneous initial condition is preserved during the propagation : As a consequence of the averaging Manakov procedure, the modal

coupling coefficients  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  in the kinetic Eqs.(A.7) are identical for all the modes, so that the spectra  $n_{B_p}(z, \omega)$  verify

$$n_{B_p}(\omega, z) = n_B(\omega, z) \quad \text{for } p = 1, \dots, 2N.$$

The multimode kinetic Eqs. (A.7) then reduce to a *single scalar kinetic equation* :

$$\partial_z n_B(\omega, z) = (2N\gamma_1 + \gamma_2)n_B(\omega) \int g(\omega - u)n_B(u)du, \quad (\text{A.8})$$

with  $n_B(\omega, z = 0^+) = \frac{1}{2N} \sum_j n_{A_j}(\omega, z = 0)$ .

Following a similar argument, the spectra  $n_{A_p}(z, \omega) = \int \langle A_p(z, t + \tau/2)A_p^*(z, t - \tau/2) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau$  verify  $n_{A_p}(z, \omega) = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} n_{B_j}(z, \omega) = n_B(\omega, z)$  for any  $p$  and for  $z \gg l_c$ , even if the initial modal spectra  $n_{A_p}(z = 0, \omega)$  are different from each other, see Appendix. Then we arrive at the main conclusion that the averaged spectra in the original basis  $\mathbf{A}$  verify the *scalar weak Langmuir turbulence kinetic equation* :

$$\partial_z n_A(\omega, z) = (2N\gamma_1 + \gamma_2)n_A(\omega) \int g(\omega - u)n_A(u)du. \quad (\text{A.9})$$

We stress the remarkable simplicity of the kinetic Eq. (A.9) as compared to the original multimode NLS Eq. (A.1). First, as in the usual scalar case, both effects of linear dispersion and instantaneous Kerr nonlinearity do not enter the kinetic equation, a property that has been confirmed by several previous works in different circumstances [7]. Secondly, the structural disorder leads to an effective homogeneization that is characterized by an equipartition of the power among the modes, which further simplifies the vector kinetic Eq. (A.7) to the scalar kinetic Eq. (A.9). The kinetic Eq. (A.9) has two conserved quantities, the power  $P = \int n_A(z, \omega)d\omega$ , and the ‘entropy’  $S = \int \log[n_A(z, \omega)]d\omega$  [7].

Finally, we recall the formal analogy between the universal form of the kinetic equation describing the weakly nonlinear regime of Langmuir turbulence [64] and the kinetic equations derived in this work. The formal mathematical similarity mainly relies on the analogy between the molecular vibrations mediated by the optical Raman effect in optical fibers and the excitations of ion-sound waves mediated by the decay of plasma oscillations [7].

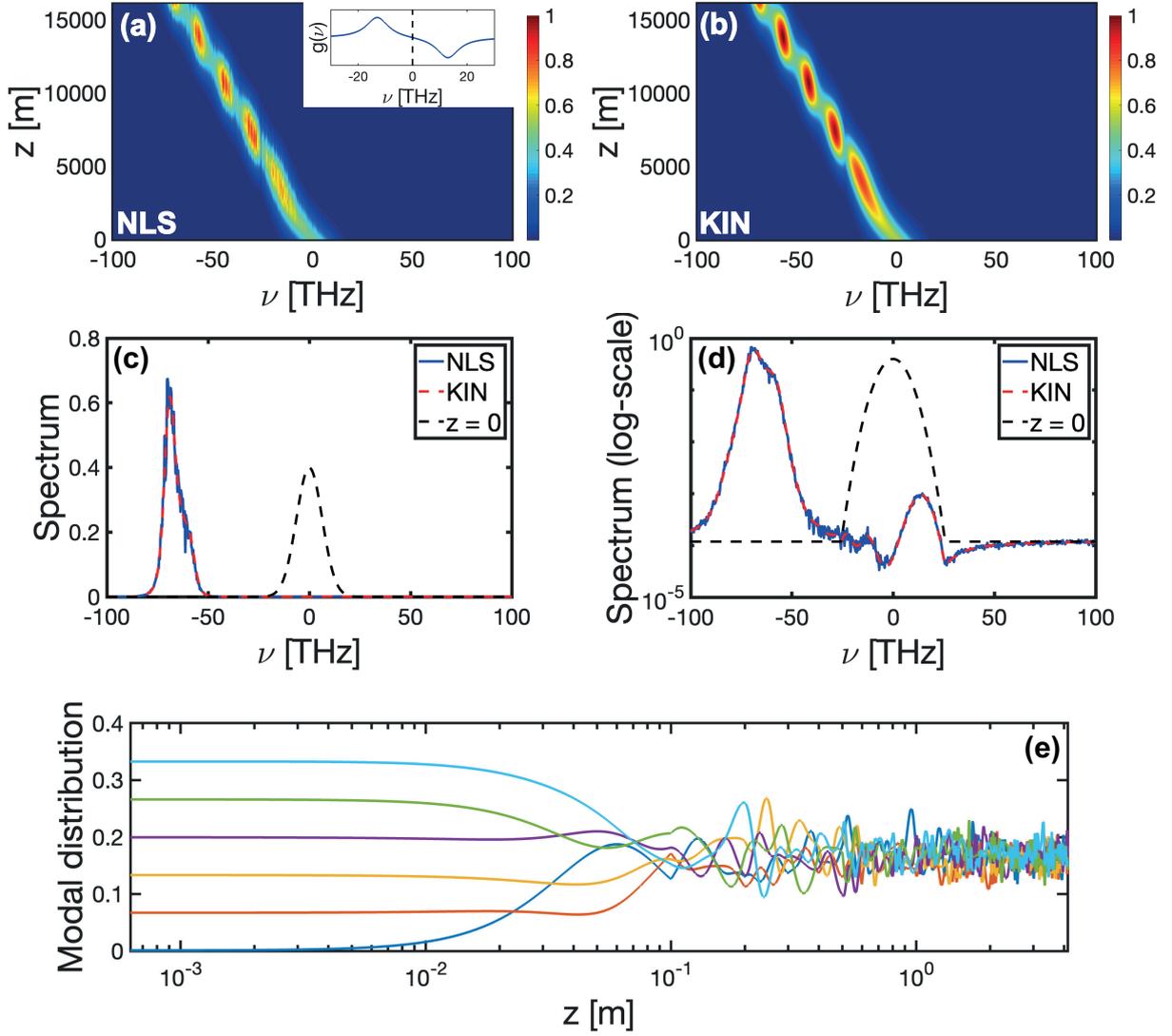


FIGURE A.1 – **Multimode discrete spectral incoherent soliton** : Evolution of the spectrum of the field during the propagation obtained by simulation of the generalized NLS Eq. (A.1) (a), and of the derived scalar weak Langmuir turbulence kinetic Eq. (A.9) (b). Spectral profiles in normal scale (c), and logarithmic scale (d), at the propagation length  $z = 16$ km : The blue line reports the result of the simulation of the NLS Eq. (A.1) (averaged over the 6 fiber modes), the red line reports the result of the simulation of the weak Langmuir turbulence kinetic Eq. (A.9). The dashed black-line reports the initial condition. (e) Evolution during the propagation ( $z$  being in logarithmic-scale) of the relative amount of power of the 6 fiber modes from the simulation of the generalized NLS Eq. (A.1) : Random mode coupling induces an equipartition of power among the  $2N = 6$  modes after a propagation length  $z \gtrsim l_c$  ( $l_c = 10$ cm,  $\sigma = 63\text{m}^{-1}$ ,  $P = 17$ W). The inset in (a) shows the Raman gain spectrum  $g(\nu)$ , with  $\nu = \omega/(2\pi)$ . The quantitative agreement between the NLS (Eq. (A.1)) and kinetic (Eq. (A.9)) simulations is obtained without adjustable parameters.

## A.5 Numerical simulations

We have tested the validity of the theory by performing numerical simulations of the original NLS Eq. (A.1) and of the derived scalar weak Langmuir turbulence kinetic Eq. (A.9). We have considered a step-index bimodal fiber (core diameter  $6\mu\text{m}$ , index difference  $\Delta = 0.005$ , wavelength  $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ ) in which the fundamental LP01 mode is coupled to two degenerate modes LP01a and LP01b, which results in a total of  $2N = 6$  coupled equations for the multimode NLS Eq. (A.1). As described in the theory, we have considered the regime of strong random linear coupling among all modes, with variance  $\sigma^2$  and correlation length  $l_c$ .

We consider a partially coherent optical field that is injected in the MMF and populates different modes. In the following, for simplicity, we assume that the different modes are initially populated with partially coherent waves with a Gaussian spectrum and random spectral phases, i.e.,  $A_p(z = 0, t)$  is of zero mean with stationary Gaussian statistics and the modes  $p = 1, \dots, 2N$  are decorrelated with each other. Note that, because of the strong random coupling regime, this latter assumption is verified in practice after a propagation length  $z \gg l_c$  that remains smaller than the nonlinear length  $z < L_{nl}$ . This latter property has been verified by numerical simulations of the generalized NLS Eq. (A.1).

### A.5.1 Multimode discrete spectral incoherent soliton

In the following we illustrate different turbulent regimes of the system that depend on the spectral widths of the launched optical field. Figure 1 reports a typical example of the evolution for a spectral width of the initial condition of the order of  $\Delta\nu \simeq 15\text{THz}$ . Since this spectral width is of the same order as the spectral width of the Raman gain, the red-shift of the wave spectrum exhibits a discrete behavior, because the leading edge of the low-frequency tail of the spectrum exhibits a larger gain as compared to the mean gain of the whole front of the spectrum (see the inset in Fig. 1(a)). As a result of cascaded Raman scattering [63, 222], the spectrum exhibits a discrete spectral shift that is determined by the resonant Raman frequency  $\nu_R \simeq 13.2\text{THz}$  (in silica fibers). The remarkable result is that the global spectral red-shift of the field is regular and exhibits a discrete soliton-like behavior. As already discussed in the literature [211, 223], the discrete soliton propagates with a constant velocity in frequency space for arbitrary long distances, without emitting apparent radiation. We recall that the spectral incoherent soliton is ‘hidden’ in frequency space, in the sense that the soliton behavior cannot be identified in the temporal domain, where the field  $\mathbf{A}(t, z)$  is a random wave featured by a stationary statistics [65]. In this respect, the VSISs are of fundamental different nature than optical solitons recently investigated in MMFs [224, 225]. Also note that a constant noise background has been added in the simulations. Such a spectral noise is important in order to sustain a steady incoherent soliton propagation [7], otherwise the soliton would undergo a slow adiabatic reshaping so as to adapt its shape to the local value of the noise background. This noise background can also simulate the presence of a quantum noise background.

We stress the remarkable quantitative agreement that has been obtained between the simulation of the generalized NLS Eq.(A.1) and of the derived kinetic Eq.(A.9), without using any adjustable parameter. Such a good agreement is clearly visible in the normal

and logarithmic plots reported in Figs. 1(c)-(d) at a particular propagation length. In this simulation, the different modes are initially populated with different amount of powers. As expected from the theory, we can observe in Fig. 1(e) that the random mode coupling leads to an equipartition of power among the modes, after a propagation length of the order of the correlation length  $z \gtrsim l_c = 10\text{cm}$ .

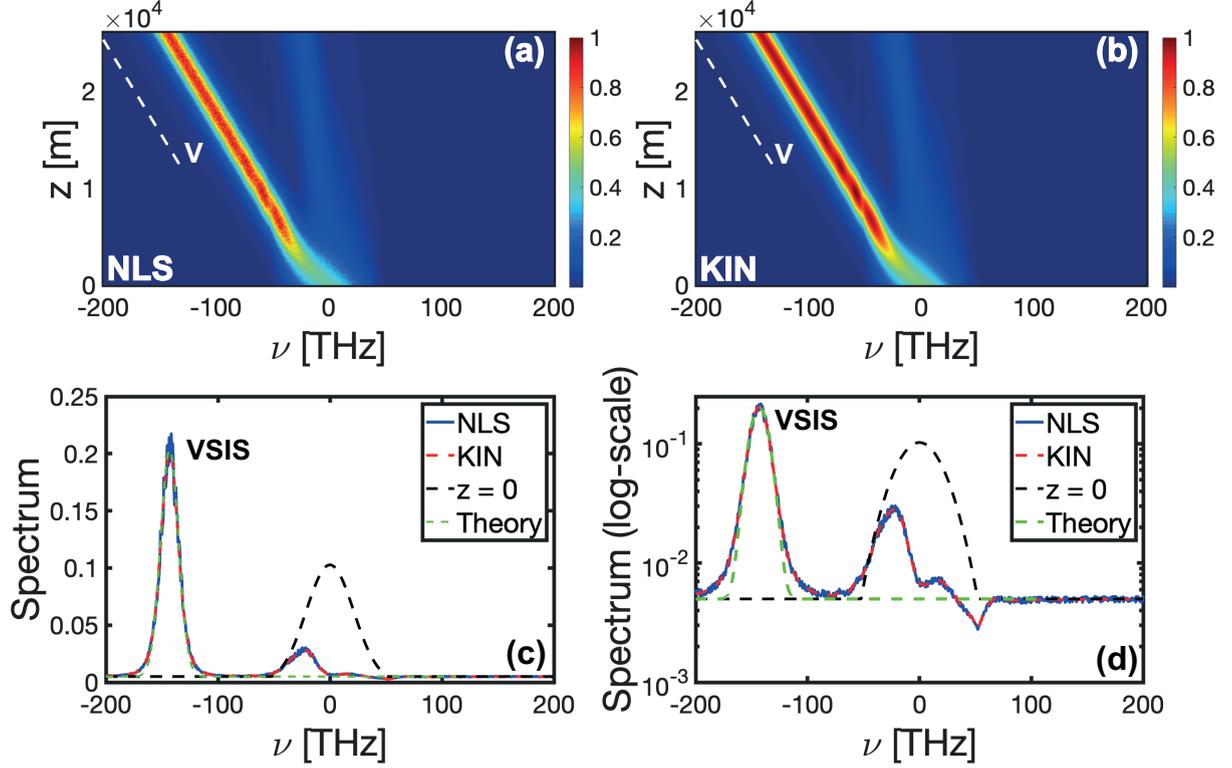


FIGURE A.2 – **Multimode continuous spectral incoherent soliton** : Evolution of the spectrum of the field during the propagation obtained by simulation of the generalized NLS Eq. (A.1) (a), and of the derived scalar weak Langmuir turbulence kinetic Eq. (A.9) (b). Spectral profiles in normal scale (c), and logarithmic scale (d), at the propagation length  $z = 26\text{km}$  : The blue line reports the result of the NLS Eq. (A.1) simulation (averaged over the 6 modes), the red line reports the result of the weak Langmuir turbulence kinetic Eq. (A.9) simulation. The dashed black-line reports the initial condition. Parameters are the same as in Fig. 1 ( $l_c = 10\text{cm}$ ,  $\sigma = 63\text{m}^{-1}$ ,  $P = 17\text{W}$ ). The spectral width is larger than in Fig. 1, which induces a continuous motion of the VSIS. The dashed green lines in (c) and (d) report the analytical soliton solution from Eq.(A.10). The dashed white lines in (a) and (b) denote the soliton velocity  $V$  from Eq.(A.11) (see the text for details). The quantitative agreement between the NLS (Eq. (A.1)) and kinetic (Eq. (A.9)) simulations is obtained without adjustable parameters.

### A.5.2 Multimode continuous spectral incoherent soliton

In this sub-section we illustrate a turbulent regime characterized by the emergence of a continuous spectral incoherent soliton. Indeed, when the spectral width of the initial field gets larger than the resonant Raman frequency, then the low-frequency tail of the spectrum sees a gain comparable to the mean gain of the spectral front as a whole. In the example of Fig. 2 we have considered a spectral width  $\Delta\nu \simeq 50\text{THz}$ , which is much larger than in Fig. 1. As a consequence, we can see in Fig. 2(a)-(b) that the red-shift of the wave spectrum is no longer discrete, but continuous, then giving rise to a continuous VSIS behavior. We remark that, for the broad spectral widths considered in Fig. 2, higher-order terms should be included in the NLS model to accurately describe light propagation in the fiber [86] (also see [226]). However, our purpose here is just to provide a qualitative overview of different possible incoherent dynamics, while a more realistic regime of light propagation in MMFs will be considered in the next sub-section.

The continuous spectral incoherent soliton reported in Fig. 2 can be described theoretically as a stationary soliton solution of the Langmuir kinetic Eq. (A.9) [227] :

$$n_A^{sol}(\omega) = n_A^0 + (n_A^m - n_A^0) \exp \left[ -\log \left( \frac{n_A^m}{n_A^0} \right) \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right], \quad (\text{A.10})$$

where  $n_A^0$  refers to the constant background noise,  $n_A^m (\gg n_A^0)$  the soliton spectral amplitude, and  $\omega_0$  denotes the typical spectral width of Raman gain defined by  $\omega_0 = \sqrt{2}[-\partial_\omega g(0)]^{-1/2}[-\int_0^\infty g(\omega)d\omega]^{1/2}$ . The stationary soliton (A.10) propagates in frequency space with a constant velocity given by

$$V = -(2N\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\int n_A(\omega) - n_A^0 d\omega}{\int \log(n_A(\omega)/n_A^0) d\omega} \int \omega g(\omega) d\omega. \quad (\text{A.11})$$

We can observe a remarkable agreement between the analytical soliton solution given by Eq.(A.10) and the numerical simulations of both the generalized NLS Eq.(A.1) and the kinetic Eq.(A.9), as illustrated in Fig. 2(c)-(d). Note however in the logarithmic plot in Fig. 2(d) a discrepancy between the solution (A.10) and the simulations in the tails of the soliton, a feature that can be explained by the fact that (A.10) is valid in the vicinity of the soliton peak. As a matter of fact, the computation of the soliton velocity is very sensitive to the tails of the soliton profile, as revealed by the expression of  $V$  in Eq.(A.11), whose denominator involves the logarithm of the soliton profile. Consequently, the computation of  $V$  with the analytical solution (A.10) matches the numerics qualitatively but not quantitatively, while a very good agreement of the soliton velocity (A.11) with the numerics is obtained by considering the soliton profile generated in the simulation, as illustrated by the dashed white lines in Fig. 2(a)-(b) that are parallel to the soliton trajectory.

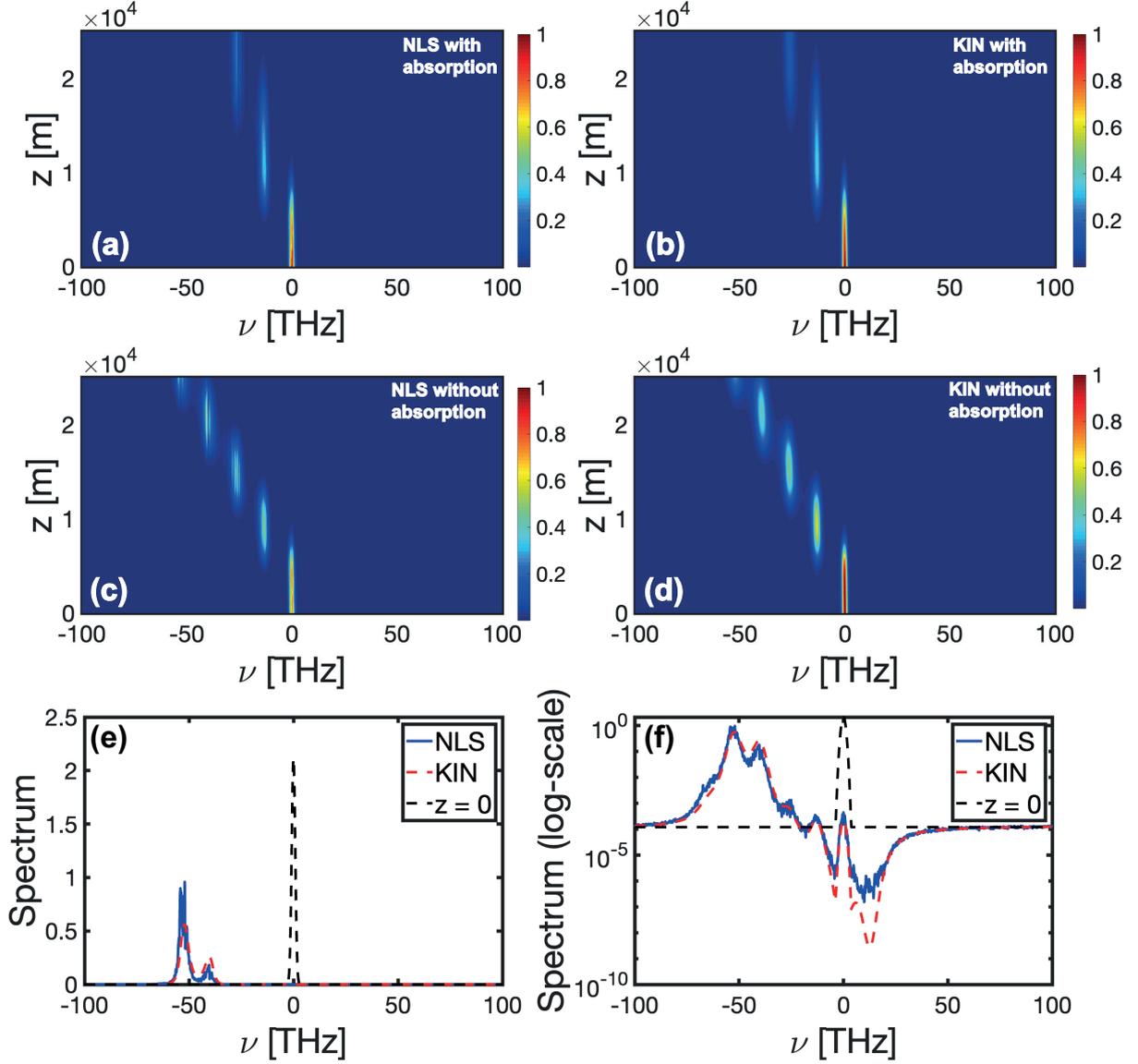


FIGURE A.3 – **Thin discrete spectral incoherent soliton** : Evolution of the spectrum of the field during the propagation obtained by simulation of the generalized NLS Eq. (A.1) (a), and of the derived scalar weak Langmuir turbulence kinetic Eq. (A.9) (b). Fiber losses (0.2 dB/km) have been included in (a)-(b). (c)-(d) report the simulation (a)-(b) but in the absence of the fiber losses, so as to improve the visualization of the multimode collective behavior of the spectral oscillations of the discrete soliton. Spectral profiles in normal scale (e), and logarithmic scale (f), at the propagation length  $z = 25$ km corresponding to (c)-(d) : the blue line reports the result of the NLS Eq. (A.1) simulation (averaged over the 6 fiber modes), the red line reports the result of the weak Langmuir turbulence kinetic Eq. (A.9) simulation, the dashed black line the initial condition. Parameters are  $l_c = 2$ m,  $\sigma = 3.1\text{m}^{-1}$ ,  $P = 8.5$ W. The good agreement between the NLS (Eq. (A.1)) and kinetic (Eq. (A.9)) simulations is obtained without adjustable parameters.

### A.5.3 Collective synchronization of spectral oscillations

To complete our study, we consider a more realistic numerical simulation in which the incoherent source launched into the MMF is characterized by a relatively narrow frequency bandwidth,  $\Delta\nu \simeq 2\text{THz}$ , which can be accessible from an amplified spontaneous emission (ASE) source, see e.g. [137]. In addition, we have included the impact of the fiber losses in the numerical simulations, with a typical value of  $0.2\text{dB/km}$ .

The results of the numerical simulations of the generalized NLS Eq.(A.1) and the kinetic Eq.(A.9) are reported in Fig. 3(a)-(b). As a consequence of the narrowness of the initial spectrum, the discrete nature of the spectral shift gets more apparent as compared to the discrete VSIS discussed above through Fig. 1. This reinforces the idea of synchronization of the spectral oscillations of the fiber modes in the simulation of the NLS Eq.(A.1). Indeed, we have reported in Fig. 3(a) the spectrum averaged over the six fiber modes. If the spectral oscillations were not synchronized, then the average among the six-modes would be characterized by a significant spectral broadening. The good agreement between the NLS and kinetic simulations shown in Fig. 3(a) and Fig. 3(b) reflects the accurate synchronisation among the spectral oscillations of the fiber modes. Note that the fiber losses naturally induce a significant reduction of the nonlinear effects during the propagation, which thus limits the spectral red-shift of the field. Accordingly, we have removed the fiber losses in the simulation reported in Fig. 3(c)-(d), which considerably improves the visualization of the synchronization of the spectral oscillations of the fiber modes.

We finally note a minor discrepancy between the simulation of the generalized NLS Eq.(A.1) and the kinetic Eq.(A.9) in Figs. 3(e)-(f). This can be ascribed to the fact that the separation of scales between linear dispersion effects and nonlinear effects is only partially satisfied because of the narrowness of the spectrum considered in Fig. 3. Then at variance with the simulation reported in Fig. 1 where  $L_{lin}/L_{nl} \simeq 3.10^{-3}$ , in the case of Fig. 3 we only have  $L_{lin}/L_{nl} \simeq 0.1$ , which can merely explain the slight discrepancy between the NLS and kinetic simulations in Figs. 3(e)-(f).

## A.6 Conclusion and discussion

In summary, we have studied the propagation of spatio-temporal incoherent waves in MMFs in the presence of a random coupling among the modes. By averaging over the fast disordered fluctuations, we have derived the Manakov Eq.(A.4). The Raman term (A.6) in the Manakov equation unveils a nontrivial coupling among the modes, which is responsible for the emergence of a collective multimode behavior of the incoherent waves. Indeed, applying the wave turbulence theory to the Manakov equation, we have derived a very simple scalar kinetic equation governing the evolution of the averaged spectrum of the multimode field. The theory has been validated by the numerical simulations : A quantitative agreement between the simulations of the NLS Eq. (A.1) and the kinetic Eq.(A.9) has been obtained, without using any adjustable parameters. The simulations reveal that the fields that propagate in different modes of the MMF self-organize and self-trap to form a VSIS. In particular, the VSIS can exhibit a discrete behavior characterized by collective synchronized spectral oscillations in frequency space. This work should stimulate the realization of optical experiments in MMFs. Aside from the discrete

multimode spectral solitons, the reduction of the multimode NLS equation to the effective scalar kinetic Eq.(A.9) can be exploited to study different turbulent regimes predicted in the scalar case, such as the formation of incoherent spectral shock waves [66].

We recall that we have considered in this work the case of strong random coupling among the modes. The same analysis can be carried out by considering a weak random mode coupling, where only (quasi-)degenerate modes are coupled to each other. Actually, weak random mode coupling is known to be relevant when relatively short propagation lengths in optical fibers are considered. However, the validity of the kinetic approach requires a weak nonlinear regime,  $L_{lin} \ll L_{nl}$ , so that large propagation lengths, typically larger than hundred meters are required to observe the formation of multimode spectral incoherent solitons in optical fibers. For such a large propagation lengths, it is commonly admitted that random coupling among non-degenerate modes cannot be neglected and must be taken into account [109], which makes legitimate the consideration of strong mode coupling in our work.

We remark that the validity of the derived kinetic Eq.(A.9) becomes questionable when the optical spectrum feels the presence of a zero-dispersion-frequency of the optical fiber. Nearby a zero-dispersion-frequency, linear dispersive effects become perturbative. The dynamics turns out to be dominated by nonlinear effects, which invalidates the weakly nonlinear assumption underlying the derivation of kinetic equation. In this case one needs to include higher-order contributions in the closure of the hierarchy of the moments equation in the wave turbulence theory. To next-order, the instantaneous Kerr nonlinearity coupled to higher-order dispersion leads to a collision term in the kinetic equation that describes an incoherent turbulent regime of supercontinuum generation [7]. It would be interesting to develop a generalized kinetic formulation of spatio-temporal effects in MMFs, which would unify the Langmuir formulation discussed here and the wave turbulence formulation accounting for random mode coupling effects discussed in [21, 22]. Such a generalized theory can also shed new light on the recent experiments of supercontinuum generation that can be characterized by spatial beam cleaning effects [210, 228–230].

## A.7 Acknowledgements

We acknowledge financial support from the French ANR under Grant No. ANR-19-CE46-0007 (project ICCI), iXcore research foundation, EIPHI Graduate School (Contract No. ANR-17-EURE-0002), French program “Investissement d’Avenir,” Project No. ISITE-BFC-299 (ANR-15 IDEX-0003) ; H2020 Marie Skłodowska-Curie Actions (MSCA-COFUND) (MULTIPLY Project No. 713694). Calculations were performed using HPC resources from DNUM CCUB (Centre de Calcul, Université de Bourgogne).

## Appendix A : Derivation of the Manakov equation

We derive the Manakov multimode NLS Eq. (A.4). Without approximations, the vector field  $\mathbf{B}(z, t)$  is solution of

$$i\partial_z \mathbf{B} + \mathbf{U}^\dagger \mathbf{D}^0 \mathbf{U} \mathbf{B} + i\mathbf{U}^\dagger \mathbf{V} \mathbf{U} \partial_t \mathbf{B} - \mathbf{U}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{U} \partial_t^2 \mathbf{B} + \gamma(1 - f_R) \mathbf{U}^\dagger \mathbf{P}(\mathbf{U} \mathbf{B}) + \gamma f_R \mathbf{U}^\dagger \mathbf{Q}(\mathbf{U} \mathbf{B}) = 0, \quad (\text{A.12})$$

where

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{D}^0 \mathbf{U} \mathbf{B}]_p &= \sum_l \left[ \sum_{p', n'} U_{p'p}^* D_{p'n'}^0 U_{n'l} \right] B_l, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{V} \mathbf{U} \partial_t \mathbf{B}]_p &= \sum_l \left[ \sum_{p', n'} U_{p'p}^* V_{p'n'} U_{n'l} \right] \partial_t B_l, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{U} \partial_t^2 \mathbf{B}]_p &= \sum_l \left[ \sum_{p', n'} U_{p'p}^* W_{p'n'} U_{n'l} \right] \partial_t^2 B_l, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{P}(\mathbf{U} \mathbf{B})]_p &= \sum_{l, m, n} \left[ \sum_{p', l', m', n'} S_{p'l'm'n'}^K U_{p'p}^* U_{l'l} U_{m'm} U_{n'n}^* \right] B_l B_m B_n^*, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{Q}(\mathbf{U} \mathbf{B})]_p &= \sum_{l, m, n} \left[ \sum_{p', l', m', n'} S_{p'l'm'n'}^R U_{p'p}^* U_{l'l} U_{m'm} U_{n'n}^* \right] B_l [R \star (B_m B_n^*)]. \end{aligned}$$

We assume here that the linear coupling between modes due to  $\mathbf{D}(z)$  is strong enough so that this effect dominates and the random matrix-valued process  $\mathbf{U}(z)$  becomes uniformly distributed in the set of unitary matrices. We can then replace the linear and nonlinear terms by the homogenized coefficients

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{D}^0 \mathbf{U} \mathbf{B}]_p &= \sum_l \left[ \sum_{p', n'} \langle U_{p'p}^* U_{n'l} \rangle D_{p'n'}^0 \right] B_l, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{V} \mathbf{U} \partial_t \mathbf{B}]_p &= \sum_l \left[ \sum_{p', n'} \langle U_{p'p}^* U_{n'l} \rangle V_{p'n'} \right] \partial_t B_l, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{U} \partial_t^2 \mathbf{B}]_p &= \sum_l \left[ \sum_{p', n'} \langle U_{p'p}^* U_{n'l} \rangle W_{p'n'} \right] \partial_t^2 B_l, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{P}(\mathbf{U} \mathbf{B})]_p &= \sum_{l, m, n} \left[ \sum_{p', l', m', n'} S_{p'l'm'n'}^K \langle U_{p'p}^* U_{l'l} U_{m'm} U_{n'n}^* \rangle \right] B_l B_m B_n^*, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{Q}(\mathbf{U} \mathbf{B})]_p &= \sum_{l, m, n} \left[ \sum_{p', l', m', n'} S_{p'l'm'n'}^R \langle U_{p'p}^* U_{l'l} U_{m'm} U_{n'n}^* \rangle \right] B_l [R \star (B_m B_n^*)], \end{aligned}$$

where the expectation is taken with respect to the stationary distribution of the random process  $\mathbf{U}(z)$ , that is the Haar measure on the unitary group in dimension  $2N$ . Integration with respect to the Haar measure on the unitary group has been studied in the mathematical physics literature for a long time [231, 232]. A general formula for calculating monomial integrals is given in [233]. In the case of monomials of rank 2 and 4, we have [234, Prop. 4.2.3] :

$$\langle U_{ij} U_{i'j'}^* \rangle = \frac{1}{2N} \delta_{ii'} \delta_{jj'}, \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \langle U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} U_{i'_1 j'_1}^* U_{i'_2 j'_2}^* \rangle &= \frac{1}{4N^2 - 1} \left( \delta_{i_1 i'_1} \delta_{i_2 i'_2} \delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_2 j'_2} + \delta_{i_1 i'_2} \delta_{i_2 i'_1} \delta_{j_1 j'_2} \delta_{j_2 j'_1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2N(4N^2 - 1)} \left( \delta_{i_1 i'_1} \delta_{i_2 i'_2} \delta_{j_1 j'_2} \delta_{j_2 j'_1} + \delta_{i_1 i'_2} \delta_{i_2 i'_1} \delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_2 j'_2} \right) \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

Using these formulas we find

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{D}^0 \mathbf{U} \mathbf{B}]_p &= \tilde{d} B_p, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{V} \mathbf{U} \partial_t \mathbf{B}]_p &= \frac{1}{\tilde{v}} \partial_t B_p, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{U} \partial_t^2 \mathbf{B}]_p &= \frac{\tilde{\beta}}{2} \partial_t^2 B_p, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{P}(\mathbf{U} \mathbf{B})]_p &= \sum_{l,m,n} \tilde{S}_{plmn}^K B_l B_m B_n^*, \\ [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{Q}(\mathbf{U} \mathbf{B})]_p &= \sum_{l,m,n} \tilde{S}_{plmn}^R B_l [R \star (B_m B_n^*)], \end{aligned}$$

with

$$\tilde{d} = \frac{1}{2N} \text{Tr}(\mathbf{D}^0), \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{1}{\tilde{v}} = \frac{1}{2N} \text{Tr}(\mathbf{V}), \quad (\text{A.16})$$

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{N} \text{Tr}(\mathbf{W}), \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{plmn}^X &= \delta_{ln} \delta_{mp} \left\{ \frac{1}{4N^2 - 1} \sum_{p',l'} S_{p'l'p'l'}^X - \frac{1}{2N(4N^2 - 1)} \sum_{p',l'} S_{p'l'p'l'}^X \right\} \\ &\quad + \delta_{lp} \delta_{mn} \left\{ \frac{1}{4N^2 - 1} \sum_{p',l'} S_{p'l'p'l'}^X - \frac{1}{2N(4N^2 - 1)} \sum_{p',l'} S_{p'l'p'l'}^X \right\}, \quad X \in \{K, R\}, \end{aligned}$$

or equivalently

$$\tilde{S}_{plmn}^X = \tilde{S}_{(1)}^X \delta_{ln} \delta_{mp} + \tilde{S}_{(2)}^X \delta_{lp} \delta_{mn}, \quad X \in \{K, R\},$$

with

$$\tilde{S}_{(1)}^X = \frac{1}{4N^2 - 1} \sum_{p',l'} S_{p'l'p'l'}^X - \frac{1}{2N(4N^2 - 1)} \sum_{p',l'} S_{p'l'p'l'}^X, \quad X \in \{K, R\}, \quad (\text{A.18})$$

$$\tilde{S}_{(2)}^X = \frac{1}{4N^2 - 1} \sum_{p',l'} S_{p'l'p'l'}^X - \frac{1}{2N(4N^2 - 1)} \sum_{p',l'} S_{p'l'p'l'}^X, \quad X \in \{K, R\}. \quad (\text{A.19})$$

In other words the mode amplitudes  $\mathbf{B}$  satisfy

$$i \partial_z \mathbf{B} + \tilde{d} \mathbf{B} + \frac{i}{\tilde{v}} \partial_t \mathbf{B} - \frac{\tilde{\beta}}{2} \partial_{tt} \mathbf{B} + \gamma(1 - f_R) \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{B}) + \gamma f_R \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{B}) = 0, \quad (\text{A.20})$$

with

$$[\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{B})]_p = \left( \tilde{S}_{(1)}^K + \tilde{S}_{(2)}^K \right) \left[ \sum_{l=1}^{2N} |B_l|^2 \right] B_p, \quad (\text{A.21})$$

$$[\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{B})]_p = \tilde{S}_{(1)}^R \sum_{l=1}^{2N} B_l [R \star (B_p B_l^*)] + \tilde{S}_{(2)}^R B_p \left[ R \star \left( \sum_{l=1}^{2N} |B_l|^2 \right) \right]. \quad (\text{A.22})$$

We remark that, if the initial conditions in Eq. (A.4) are deterministic, then the components  $|B_p|^2(z, t)$  are deterministic and the components  $A_p(z, t)$  of the field are random and given by  $\mathbf{A} = \mathbf{UB}$ , so that they verify  $|A_p|^2(z, t) = \sum_{j,k} U_{pj}(z)U_{pk}^*(z)B_j(z, t)B_k^*(z, t)$  and, using (A.13),  $\langle |A_p|^2(z, t) \rangle = \frac{1}{2N} \sum_j |B_j|^2(z, t)$  for any  $t$  and  $z$  much larger than the correlation length of  $\mathbf{D}(z)$ , say  $l_c$ . In other words, we have equipartition in the  $\mathbf{A}$  basis. Note that this result is obtained for the *expectation* (with respect to the distribution of  $(\mathbf{D}(z))_{z \geq 0}$ ) of the components  $|A_p|^2(z, t)$ .

We also remark that, if the initial conditions are random (and independent of  $(\mathbf{D}(z))_{z \geq 0}$ ), then the components  $|B_p|^2(z, t)$  are governed by the deterministic Eq. (A.4) and the components  $A_p(z, t)$  are given by  $\mathbf{A} = \mathbf{UB}$ , so that they verify  $|A_p|^2(z, t) = \sum_{j,k} U_{pj}(z)U_{pk}^*(z)B_j(z, t)B_k^*(z, t)$  and, using (A.13),  $\langle |A_p|^2(z, t) \rangle = \frac{1}{2N} \sum_j \langle |B_j|^2(z, t) \rangle$  for any  $t$  and  $z$  much larger than  $l_c$ . Following the same remark, we have  $\langle A_p(z, t + \tau/2)A_p^*(z, t - \tau/2) \rangle = \frac{1}{2N} \sum_j \langle B_j(z, t + \tau/2)B_j^*(z, t - \tau/2) \rangle$  for any  $p$  for  $z \gg l_c$ .



# Bibliographie

- [1] J. M. Dudley, G. Genty, and S. Coen. Supercontinuum generation in photonic crystal fiber. *Reviews of Modern Physics*, 78(4) :1135–1184, October 2006.
- [2] D. Vocke, K. Wilson, F. Marino, I. Carusotto, E. Wright, T. Roger, B. Anderson, P. Öhberg, and D. Faccio. Role of geometry in the superfluid flow of nonlocal photon fluids. *Physical Review A*, 94(1) :013849, July 2016.
- [3] C. Michel, O. Boughdad, M. Albert, P. E. Larré, and M. Bellec. Superfluid motion and drag-force cancellation in a fluid of light. *Nature Communications*, 9(1) :2108, May 2018.
- [4] Q. Fontaine, T. Bienaimé, S. Pigeon, E. Giacobino, A. Bramati, and Q. Glorieux. Observation of the Bogoliubov Dispersion in a Fluid of Light. *Physical Review Letters*, 121(18) :183604, October 2018.
- [5] D. S. Wiersma. The physics and applications of random lasers. *Nature Physics*, 4(5) :359–367, May 2008.
- [6] A. Couairon and A. Mysyrowicz. Femtosecond filamentation in transparent media. *Physics Reports*, 441(2) :47–189, March 2007.
- [7] A. Picozzi, J. Garnier, T. Hansson, P. Suret, S. Randoux, G. Millot, and D. N. Christodoulides. Optical wave turbulence : Towards a unified nonequilibrium thermodynamic formulation of statistical nonlinear optics. *Physics Reports*, 542(1) :1–132, September 2014.
- [8] N. Akhmediev and E. Pelinovsky. Editorial – Introductory remarks on “Discussion & Debate : Rogue Waves – Towards a Unifying Concept?”. *The European Physical Journal Special Topics*, 185(1) :1–4, July 2010.
- [9] V. Ruban, Y. Kodama, M. Ruderman, J. Dudley, R. Grimshaw, P. V. E. McClintock, M. Onorato, C. Kharif, E. Pelinovsky, T. Soomere, Georg Lindgren, N. Akhmediev, A. Slunyaev, D. Solli, C. Ropers, B. Jalali, F. Dias, and A. Osborne. Rogue waves - towards a unifying concept ? : Discussions and debates. *The European Physical Journal. Special Topics*, 185(1) :5–15, 2010.
- [10] M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina, and F. T. Arecchi. Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts. *Physics Reports*, 528(2) :47–89, July 2013.
- [11] E. Tobisch, editor. *New Approaches to Nonlinear Waves*. Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2016.
- [12] V. E. Zakharov, V. S. L’vov, and G. Falkovich. *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence*. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [13] U. Frisch. *Turbulence : The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, November 1995.

- 
- [14] A. C. Newell and B. Rumpf. Wave Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43(1) :59–78, 2011.
- [15] S. Nazarenko. *Wave Turbulence*. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [16] C. Connaughton, C. Josserand, A. Picozzi, Y. Pomeau, and S. Rica. Condensation of Classical Nonlinear Waves. *Physical Review Letters*, 95(26) :263901, December 2005.
- [17] P. Aschieri, J. Garnier, C. Michel, V. Doya, and A. Picozzi. Condensation and thermalization of classical optical waves in a waveguide. *Physical Review A*, 83(3) :033838, March 2011.
- [18] K. Krupa, A. Tonello, A. Barthélémy, V. Couderc, B. M. Shalaby, A. Bendahmane, G. Millot, and S. Wabnitz. Observation of Geometric Parametric Instability Induced by the Periodic Spatial Self-Imaging of Multimode Waves. *Physical Review Letters*, 116(18) :183901, May 2016.
- [19] L. Wright, Z. Liu, D. Nolan, M. J. Li, D. Christodoulides, and F. Wise. Self-organized instability in graded-index multimode fibres. *Nature Photonics*, 10(12) :771–776, December 2016.
- [20] K. Krupa, A. Tonello, B. M. Shalaby, M. Fabert, A. Barthélémy, G. Millot, S. Wabnitz, and V. Couderc. Spatial beam self-cleaning in multimode fibres. *Nature Photonics*, 11(4) :237–241, April 2017.
- [21] J. Garnier, A. Fusaro, K. Baudin, C. Michel, K. Krupa, G. Millot, and A. Picozzi. Wave condensation with weak disorder versus beam self-cleaning in multimode fibers. *Physical Review A*, 100(5) :053835, November 2019.
- [22] A. Fusaro, S. Garnier, K. Krupa, G. Millot, and A ; Picozzi. Dramatic Acceleration of Wave Condensation Mediated by Disorder in Multimode Fibers. *Physical Review Letters*, 122(12) :123902, March 2019.
- [23] E. V. Podivilov, D. S. Kharenko, V. A. Gonta, K. Krupa, O. S. Sidelnikov, S. Turitsyn, M. P. Fedoruk, S. A. Babin, and S. Wabnitz. Hydrodynamic 2D Turbulence and Spatial Beam Condensation in Multimode Optical Fibers. *Physical Review Letters*, 122(10) :103902, March 2019.
- [24] F. Wu, A. Hassan, and D. Christodoulides. Thermodynamic theory of highly multimoded nonlinear optical systems. *Nature Photonics*, 13(11) :776–782, November 2019.
- [25] H. Pourbeyram, P. Sidorenko, F. Wu, L. Wright, D. Christodoulides, and F. Wise. Direct Measurement of Thermalization to Rayleigh-Jeans Distribution in Optical Beam Self-Cleaning. *arXiv :2012.12110 [physics]*, December 2020.
- [26] K. Baudin, A. Fusaro, K. Krupa, J. Garnier, S. Rica, G. Millot, and A. Picozzi. Classical Rayleigh-Jeans Condensation of Light Waves : Observation and Thermodynamic Characterization. *Physical Review Letters*, 125(24) :244101, December 2020.
- [27] K. Baudin, A. Fusaro, J. Garnier, N. Berti, K. Krupa, I. Carusotto, S. Rica, G. Millot, and A. Picozzi. Energy and wave-action flows underlying Rayleigh-Jeans thermalization of optical waves propagating in a multimode fiber. *EPL (Europhysics Letters)*, 134(1) :14001, April 2021.
- [28] A. Fusaro. *Auto-organisation d’ondes optiques incohérentes : Condensation, thermalisation et repolarisation*. These de doctorat, Ecole Doctorale Carnot-Pasteur, October 2019.

- [29] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, and M. Weitz. Bose–Einstein condensation of photons in an optical microcavity. *Nature*, 468(7323) :545–548, November 2010.
- [30] E. Weill, A. Bekker, B. Levit, and B. Fischer. Bose–Einstein condensation of photons in an erbium–ytterbium co-doped fiber cavity. *Nature Communications*, 10(1) :747, February 2019.
- [31] S. Barland, P. Azam, G. L. Lippi, R. A. Nyman, and R. Kaiser. Photon thermalization and a condensation phase transition in an electrically pumped semiconductor microresonator. *Optics Express*, 29(6) :8368–8375, March 2021.
- [32] I. Carusotto and C. Ciuti. Quantum fluids of light. *Reviews of Modern Physics*, 85(1) :299–366, February 2013.
- [33] J. Bloch, I. Carusotto, and M. Wouters. Spontaneous coherence in spatially extended photonic systems : Non-Equilibrium Bose-Einstein condensation. *arXiv :2106.11137 [cond-mat, physics :physics]*, June 2021. arXiv : 2106.11137.
- [34] A. C. Newell, S. Nazarenko, and L. Biven. Wave turbulence and intermittency. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 152-153 :520–550, May 2001.
- [35] V. E. Zakharov, A. Pushkarev, V. F. Shvets, and V. V. Yan’kov. Soliton turbulence. *JETP Letters*, 48(2) :83, 1988.
- [36] B. Rumpf and A. Newell. Coherent Structures and Entropy in Constrained, Modulationally Unstable, Nonintegrable Systems. *Physical Review Letters*, 87(5) :054102, July 2001.
- [37] R. Jordan and C. Josserand. Self-organization in nonlinear wave turbulence. *Physical Review E*, 61(2) :1527–1539, February 2000.
- [38] V. E. Zakharov, F. Dias, and A. Pushkarev. One-dimensional wave turbulence. *Physics Reports*, 398(1) :1–65, August 2004.
- [39] J. Laurie, U. Bortolozzo, S. Nazarenko, and S. Residori. One-dimensional optical wave turbulence : Experiment and theory. *Physics Reports*, 514(4) :121–175, May 2012.
- [40] B. Rumpf and A. C. Newell. Localization and coherence in nonintegrable systems. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 184(1-4) :162–191, October 2003.
- [41] M. A. Baranov. Theoretical progress in many-body physics with ultracold dipolar gases. *Physics Reports*, 464(3) :71–111, August 2008.
- [42] S. Skupin, M. Saffman, and W. Krolikowski. Nonlocal stabilization of nonlinear beams in a self-focusing atomic vapor. *Physical Review Letters*, 98(26) :263902, June 2007.
- [43] P. Azam, A. Fusaro, Q. Fontaine, J. Garnier, A. Bramati, A. Picozzi, R. Kaiser, Q. Glorieux, and T. Bienaimé. Dissipation-enhanced collapse singularity of a non-local fluid of light in a hot atomic vapor. *Physical Review A*, 104(1) :013515, July 2021.
- [44] M. Peccianti, C. Conti, G. Assanto, A. De Luca, and C. Umeton. Routing of anisotropic spatial solitons and modulational instability in liquid crystals. *Nature*, 432(7018) :733–737, December 2004.
- [45] G. Marcucci, D. Pierangeli, S. Gentilini, N. Ghofraniha, Z. Chen, and C. Conti. Optical Spatial Shock Waves in Nonlocal Nonlinear Media. *Advances in Physics : X*, 4(1) :1662733, January 2019. arXiv : 1907.02823.

- 
- [46] C. Rotschild, B. Alfassi, O. Cohen, and M. Segev. Long-range interactions between optical solitons. *Nature Physics*, 2 :769–774, November 2006.
- [47] V. E. Zakharov, S. L. Musher, and A. M. Rubenchik. Hamiltonian approach to the description of non-linear plasma phenomena. *Physics Reports*, 129(5) :285–366, December 1985.
- [48] A. Campa, T. Dauxois, and S. Ruffo. Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions. *Physics Reports*, 480(3) :57–159, September 2009.
- [49] A. Campa, S. Ruffo, D. Fanelli, and S. Ruffo. Physics of long-range interacting systems. *Oxford Univ. Press*, 2014.
- [50] A. Picozzi and J. Garnier. Incoherent Soliton Turbulence in Nonlocal Nonlinear Media. *Physical Review Letters*, 107(23) :233901, November 2011.
- [51] M. Mitchell, Z. Chen, M. Shih, and M. Segev. Self-Trapping of Partially Spatially Incoherent Light. *Physical Review Letters*, 77(3) :490–493, July 1996. Publisher : American Physical Society.
- [52] M. Mitchell and M. Segev. Self-trapping of incoherent white light. *Nature*, 387(6636) :880–883, June 1997.
- [53] M. Segev and D. Christodoulides. Incoherent Solitons : Self-Trapping of Weakly Correlated Wavepackets. In S. Trillo and W. Torruellas, editors, *Spatial Solitons*, Springer Series in Optical Sciences, pages 87–125. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [54] Y. Kivshar and G. Agrawal. *Optical Solitons : From Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press, June 2003.
- [55] B. Hall, M. Lisak, D. Anderson, R. Fedele, and V. E. Semenov. Statistical theory for incoherent light propagation in nonlinear media. *Physical Review E*, 65(3) :035602, February 2002.
- [56] I. Bernstein, J. Greene, and M. Kruskal. Exact Nonlinear Plasma Oscillations. *Physical Review*, 108(3) :546–550, November 1957.
- [57] A. Hasegawa. Dynamics of an ensemble of plane waves in nonlinear dispersive media. *The Physics of Fluids*, 18(1) :77–79, January 1975.
- [58] A. Hasegawa. Envelope soliton of random phase waves. *The Physics of Fluids*, 20(12) :2155–2156, December 1977.
- [59] R. Bekenstein, R. Schley, M. Mutzafi, C. Rotschild, and M. Segev. Optical simulations of gravitational effects in the Newton–Schrödinger system. *Nature Physics*, 11(10) :872–878, October 2015.
- [60] T. Roger, C. Maitland, K. Wilson, N. Westerberg, D. Vocke, E. Wright, and D. Facio. Optical analogues of the Newton–Schrödinger equation and boson star evolution. *Nature Communications*, 7(1) :13492, November 2016.
- [61] C. Michel, B. Kibler, J. Garnier, and A. Picozzi. Temporal incoherent solitons supported by a defocusing nonlinearity with anomalous dispersion. *Physical Review A*, 86(4) :041801, October 2012.
- [62] J. Garnier, K. Baudin, A. Fusaro, and A. Picozzi. Coherent Soliton States Hidden in Phase Space and Stabilized by Gravitational Incoherent Structures. *Physical Review Letters*, 127(1) :014101, June 2021.
- [63] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 2019.

- [64] S. Musher, A. Rubenchik, and V. Zakharov. Weak Langmuir turbulence. *Physics Reports*, 252(4) :177–274, February 1995.
- [65] A. Picozzi, S. Pitois, and G. Millot. Spectral Incoherent Solitons : A Localized Soliton Behavior in the Frequency Domain. *Physical Review Letters*, 101(9) :093901, August 2008.
- [66] J. Garnier, G. Xu, S. Trillo, and A. Picozzi. Incoherent Dispersive Shocks in the Spectral Evolution of Random Waves. *Physical Review Letters*, 111(11) :113902, September 2013.
- [67] P. Russell. Photonic-Crystal Fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 24(12) :4729–4749, December 2006.
- [68] P. St J. Russell, P. Hölzer, W. Chang, A. Abdolvand, and J. C. Travers. Hollow-core photonic crystal fibres for gas-based nonlinear optics. *Nature Photonics*, 8(4) :278–286, April 2014.
- [69] J. C. Travers, W. Chang, J. Nold, N. Y. Joly, and P. R. Ultrafast nonlinear optics in gas-filled hollow-core photonic crystal fibers [Invited]. *JOSA B*, 28(12) :A11–A26, December 2011.
- [70] A. Nazarkin, A. Abdolvand, A. V. Chugreev, and P. St.J. Russell. Direct Observation of Self-Similarity in Evolution of Transient Stimulated Raman Scattering in Gas-Filled Photonic Crystal Fibers. *Physical Review Letters*, 105(17) :173902, October 2010.
- [71] F. Couny, F. Benabid, P. J. Roberts, P. S. Light, and M. G. Raymer. Generation and Photonic Guidance of Multi-Octave Optical-Frequency Combs. *Science*, November 2007.
- [72] J. Doménech and M. Cueto. Sensitivity enhancement in high resolution stimulated Raman spectroscopy of gases with hollow-core photonic crystal fibers. *Optics Letters*, 38(20) :4074–4077, October 2013.
- [73] F. Benabid, J. C. Knight, G. Antonopoulos, and P. St J. Russell. Stimulated Raman Scattering in Hydrogen-Filled Hollow-Core Photonic Crystal Fiber. *Science*, October 2002. Publisher : American Association for the Advancement of Science.
- [74] Y. Y. Wang, Chunbai Wu, F. Couny, M. G. Raymer, and F. Benabid. Quantum-Fluctuation-Initiated Coherence in Multioctave Raman Optical Frequency Combs. *Physical Review Letters*, 105(12) :123603, September 2010.
- [75] F. Belli, A. Abdolvand, W. Chang, J. C. Travers, and P. Russell. Vacuum-ultraviolet to infrared supercontinuum in hydrogen-filled photonic crystal fiber. *Optica*, 2(4) :292–300, April 2015.
- [76] F. Benabid, G. Bouwmans, J. C. Knight, P. St. J. Russell, and F. Couny. Ultrahigh Efficiency Laser Wavelength Conversion in a Gas-Filled Hollow Core Photonic Crystal Fiber by Pure Stimulated Rotational Raman Scattering in Molecular Hydrogen. *Physical Review Letters*, 93(12) :123903, September 2004.
- [77] A. Abdolvand, A. Nazarkin, A. V. Chugreev, C. F. Kaminski, and P. St.J. Russell. Solitary Pulse Generation by Backward Raman Scattering in  $\text{H}_2$ -Filled Photonic Crystal Fibers. *Physical Review Letters*, 103(18) :183902, October 2009.
- [78] F. Tani, F. Belli, A. Abdolvand, J. C. Travers, and P. St J. Russell. Generation of three-octave-spanning transient Raman comb in hydrogen-filled hollow-core PCF. *Optics Letters*, 40(6) :1026–1029, March 2015.

- [79] B. Lavorel, G. Millot, R. Saint-Loup, H. Berger, L. Bonamy, J. Bonamy, and D. Robert. Study of collisional effects on band shapes of the  $\nu_1/2\nu_2$  Fermi dyad in CO<sub>2</sub> gas with stimulated Raman spectroscopy. I. Rotational and vibrational relaxation in the  $2\nu_2$  band. *The Journal of Chemical Physics*, 93(4) :2176–2184, August 1990.
- [80] B. Lavorel, G. Millot, R. Saint-Loup, H. Berger, L. Bonamy, J. Bonamy, and D. Robert. Study of collisional effects on band shapes of the  $\nu_1/2\nu_2$  Fermi dyad in CO<sub>2</sub> gas with stimulated Raman spectroscopy. II. Simultaneous line mixing and Dicke narrowing in the  $\nu_1$  band. *The Journal of Chemical Physics*, 93(4) :2185–2191, August 1990.
- [81] C. Roche, G. Millot, R. Chauv, and R. Saint-Loup. Rotational and vibrational relaxation of the  $\nu_1/2\nu_2$  Fermi dyad in CO<sub>2</sub> gas from Raman-infrared double resonance experiments. *The Journal of Chemical Physics*, 101(4) :2863–2870, August 1994.
- [82] Z. Liu, L. Wright, D. Christodoulides, and F. Wise. Kerr self-cleaning of femtosecond-pulsed beams in graded-index multimode fiber. *Optics Letters*, 41(16) :3675–3678, August 2016.
- [83] I. P. Kaminow, T. Li, and A. F. Willner. *Optical Fiber Telecommunications, 6th ed.* Elsevier, Amsterdam, 6 edition, 2013.
- [84] E. Deliancourt, M. Fabert, A. Tonello, K. Krupa, A. Desfarges-Berthelemot, V. Kermene, G. Millot, A. Barthélémy, S. Wabnitz, and V. Couderc. Kerr beam self-cleaning on the LP<sub>11</sub> mode in graded-index multimode fibers. *OSA Continuum*, 2(4) :1089, April 2019.
- [85] M. Fabert, M. Săpânțan, K. Krupa, A. Tonello, Y. Leventoux, S. Février, T. Mansuryan, A ; Niang, B. Wetzell, G. Millot, S. Wabnitz, and V. Couderc. Coherent combining of self-cleaned multimode beams. *Scientific Reports*, 10(1) :20481, November 2020.
- [86] P. Horak and F. Poletti. Multimode Nonlinear Fibre Optics : Theory and Applications. *Recent Progress in Optical Fiber Research*, January 2012.
- [87] S. Mumtaz, R. J. Essiambre, and G. P. Agrawal. Nonlinear Propagation in Multimode and Multicore Fibers : Generalization of the Manakov Equations. *Journal of Lightwave Technology*, 31(3) :398–406, February 2013.
- [88] Y. Xiao, R. J. Essiambre, M. Desgroseilliers, A. Tulino, R. Ryf, S. Mumtaz, and G. P. Agrawal. Theory of intermodal four-wave mixing with random linear mode coupling in few-mode fibers. *Optics Express*, 22(26) :32039–32059, December 2014.
- [89] F. Poletti and P. Horak. Description of ultrashort pulse propagation in multimode optical fibers. *JOSA B*, 25(10) :1645–1654, October 2008.
- [90] S. Nazarenko, M. Onorato, and D. Proment. Bose-Einstein condensation and Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition in the two-dimensional nonlinear Schrödinger model. *Physical Review A*, 90(1) :013624, July 2014.
- [91] V. Shrira and S. Nazarenko. *Advances in Wave Turbulence*, volume 83 of *World Scientific Series on Nonlinear Science Series A*. Pure and Applied Geophysics, June 2013.
- [92] V. E. Zakharov, A. O. Korotkevich, A. N. Pushkarev, and A. I. Dyachenko. Mesoscopic wave turbulence. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 82(8) :487–491, October 2005.

- [93] S. Nazarenko. Sandpile behaviour in discrete water-wave turbulence. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2006(02) :L02002–L02002, February 2006.
- [94] E. Kartashova, S. Nazarenko, and O. Rudenko. Resonant interactions of nonlinear water waves in a finite basin. *Physical Review E*, 78(1) :016304, July 2008.
- [95] E. Kartashova. Discrete wave turbulence. *EPL (Europhysics Letters)*, 87(4) :44001, August 2009.
- [96] E. Kartashova. *Nonlinear Resonance Analysis : Theory, Computation, Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [97] V. S. L’vov and S. Nazarenko. Discrete and mesoscopic regimes of finite-size wave turbulence. *Physical Review E*, 82(5) :056322, November 2010.
- [98] J. Harris, C. Connaughton, and M. Bustamante. Percolation transition in the kinematics of nonlinear resonance broadening in Charney–Hasegawa–Mima model of Rossby wave turbulence. *New Journal of Physics*, 15(8) :083011, August 2013.
- [99] K. Harper, M. Bustamante, and S. Nazarenko. Quadratic invariants for discrete clusters of weakly interacting waves. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 46(24) :245501, May 2013.
- [100] M. D. Bustamante, B. Quinn, and D. Lucas. Robust Energy Transfer Mechanism via Precession Resonance in Nonlinear Turbulent Wave Systems. *Physical Review Letters*, 113(8) :084502, August 2014.
- [101] R. Hassaini and N. Mordant. Confinement effects on gravity-capillary wave turbulence. *Physical Review Fluids*, 3(9) :094805, September 2018.
- [102] G. Gallavotti. *The Fermi-Pasta-Ulam Problem : A Status Report*. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [103] G. Benettin, H. Christodoulidi, and A. Poincaré. The Fermi-Pasta-Ulam Problem and Its Underlying Integrable Dynamics. *Journal of Statistical Physics*, 152(2) :195–212, July 2013.
- [104] M. Onorato, L. Vozella, D. Proment, and Y. V. Lvov. Route to thermalization in the  $\alpha$ -Fermi–Pasta–Ulam system. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(14) :4208–4213, April 2015.
- [105] Y. Lvov and M. Onorato. Double Scaling in the Relaxation Time in the  $\beta$ -Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou Model. *Physical Review Letters*, 120(14) :144301, April 2018.
- [106] M. Guasoni, J. Garnier, B. Rumpf, D. Sugny, J. Fatome, F. Amrani, G. Millot, and A. Picozzi. Incoherent Fermi-Pasta-Ulam Recurrences and Unconstrained Thermalization Mediated by Strong Phase Correlations. *Physical Review X*, 7(1) :011025, March 2017.
- [107] L. Ermann and D. L. Shepelyansky. Quantum Gibbs distribution from dynamical thermalization in classical nonlinear lattices. *New Journal of Physics*, 15(12) :123004, December 2013.
- [108] L. Ermann, E. Vergini, and D. L. Shepelyansky. Dynamical thermalization of Bose-Einstein condensate in Bunimovich stadium. *EPL (Europhysics Letters)*, 111(5) :50009, September 2015.
- [109] K. P. Ho and J. Kahn. Linear Propagation Effects in Mode-Division Multiplexing Systems. *Journal of Lightwave Technology*, 32(4) :614–628, February 2014.

- [110] A. Mecozzi, C. Antonelli, and M. Shtaif. Nonlinear propagation in multi-mode fibers in the strong coupling regime. *Optics Express*, 20(11) :11673–11678, May 2012.
- [111] A. Mecozzi, C. Antonelli, and M. Shtaif. Coupled Manakov equations in multimode fibers with strongly coupled groups of modes. *Optics Express*, 20(21) :23436–23441, October 2012.
- [112] S. Buch, S. Mumtaz, R. J. Essiambre, A. M. Tulino, and G. P. Agrawal. Averaged nonlinear equations for multimode fibers valid in all regimes of random linear coupling. *Optical Fiber Technology*, 48 :123–127, March 2019.
- [113] P. K. A. Wai and C. R. Menyak. Polarization mode dispersion, decorrelation, and diffusion in optical fibers with randomly varying birefringence. *Journal of Lightwave Technology*, 14(2) :148–157, February 1996.
- [114] N. Cherroret, T. Karpiuk, B. Grémaud, and C. Miniatura. Thermalization of matter waves in speckle potentials. *Physical Review A*, 92(6) :063614, December 2015.
- [115] J. Goodman. *Statistical Optics*. John Wiley & Sons, May 2015.
- [116] S. Chibbaro, G. Dematteis, C. Josserand, and L. Rondoni. Wave-turbulence theory of four-wave nonlinear interactions. *Physical Review E*, 96(2) :021101, August 2017.
- [117] S. Chibbaro, G. Dematteis, and L. Rondoni. 4-wave dynamics in kinetic wave turbulence. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 362 :24–59, January 2018.
- [118] S. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev, and V. E. Zakharov. Optical turbulence : weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear Schrödinger equation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 57(1) :96–160, June 1992.
- [119] D. V. Churkin, I. V. Kolokolov, E. V. Podivilov, I. D. Vatnik, M. A. Nikulin, S. S. Vergeles, I. S. Terekhov, V. V. Lebedev, G. Falkovich, S. A. Babin, and S. K. Turitsyn. Wave kinetics of random fibre lasers. *Nature Communications*, 6(1) :6214, February 2015.
- [120] S. Kuksin. *The effective equation method, in New Approaches to Nonlinear Waves*. Springer, elena tobisch edition, 2015.
- [121] W. Xiong, C. W. Hsu, Y. Bromberg, J. E. Antonio-Lopez, R. Amezcua Correa, and H. Cao. Complete polarization control in multimode fibers with polarization and mode coupling. *Light, Science And Applications*, 7, August 2018.
- [122] A. Galtarossa, L. Palmieri, M. Schiano, and T. Tambosso. Measurement of birefringence correlation length in long, single-mode fibers. *Optics Letters*, 26(13) :962–964, July 2001.
- [123] E. Deliancourt, M. Fabert, A. Tonello, K. Krupa, A. Desfarges-Berthelemot, V. Kermene, G. Millot, A. Barthélémy, S. Wabnitz, and V. Couderc. Wavefront shaping for optimized many-mode Kerr beam self-cleaning in graded-index multimode fiber. *Optics Express*, 27(12) :17311–17321, June 2019.
- [124] E. Kartashova. Wave resonances in systems with discrete spectra. *Transactions of the American Mathematical Society*, 182 :95–130, January 1998.
- [125] H. Frostig, E. Small, A. Daniel, P. Oulevey, S. Derevyanko, and Y. Silberberg. Focusing light by wavefront shaping through disorder and nonlinearity. *Optica*, 4(9) :1073–1079, September 2017.
- [126] P. Suret and S. Randoux. Far Field measurement in the focal plane of a lens : a cautionary note. *arXiv :1307.5034 [physics]*, July 2013.
- [127] A. W. Snyder and J. Love. *Optical Waveguide Theory*. Springer US, 1983.

- [128] D. E. Boonzajer Flaes, J. Stopka, S. Turtaev, J. F. de Boer, T. Tyc, and T. Čižmár. Robustness of Light-Transport Processes to Bending Deformations in Graded-Index Multimode Waveguides. *Physical Review Letters*, 120(23) :233901, June 2018.
- [129] D. Gloge. Bending Loss in Multimode Fibers with Graded and Ungraded Core Index. *Applied Optics*, 11(11) :2506–2513, November 1972.
- [130] D. Marcuse, D. Gloge, and E. Marcatili. *Optical fiber telecommunications*. Springer, New York, acad. press edition, 1979.
- [131] L. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, Oxford, New York, April 2003.
- [132] V. E. Zakharov and S. Nazarenko. Dynamics of the Bose–Einstein condensation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 201(3-4) :203–211, February 2005.
- [133] G. Düring, A. Picozzi, and S. Rica. Breakdown of weak-turbulence and nonlinear wave condensation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 238(16) :1524–1549, August 2009.
- [134] A. Picozzi and S. Rica. Condensation of classical optical waves beyond the cubic nonlinear Schrödinger equation. *Optics Communications*, 285(24) :5440–5448, November 2012.
- [135] A I D’yachenko, V. E. Zakharov, A. N. Pushkarev, V. F. Shvets, and V. V. Yan’kov. Soliton turbulence in nonintegrable wave system. *JETP*, 69(6) :1144, 1989.
- [136] R. Jordan, B. Turkington, and C. L. Zirbel. A mean-field statistical theory for the nonlinear Schrödinger equation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 137(3) :353–378, March 2000.
- [137] M. Conforti, A. Mussot, J. Fatome, A. Picozzi, S. Pitois, C. Finot, M. Haelterman, B. Kibler, C. Michel, and G. Millot. Turbulent dynamics of an incoherently pumped passive optical fiber cavity : Quasisolitons, dispersive waves, and extreme events. *Physical Review A*, 91(2) :023823, February 2015.
- [138] L. Diósi. Gravitation and quantum-mechanical localization of macro-objects. *Physics Letters A*, 105(4-5) :199–202, October 1984.
- [139] R. Penrose. On Gravity’s role in Quantum State Reduction. *General Relativity and Gravitation*, 28(5) :581–600, May 1996.
- [140] R. Ruffini and S. Bonazzola. Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the Concept of an Equation of State. *Physical Review*, 187(5) :1767–1783, November 1969.
- [141] D. Giulini and A. Grobardt. The Schrödinger–Newton equation as a non-relativistic limit of self-gravitating Klein–Gordon and Dirac fields. *Classical and Quantum Gravity*, 29(21) :215010, October 2012.
- [142] P. H. Chavanis. Self-gravitating Bose-Einstein Condensates. *Fundam.Theor.Phys.*, 178 :151–194, 2015.
- [143] P. Jetzer. Boson stars. *Physics Reports*, 220(4) :163–227, November 1992.
- [144] J. W. Lee and I. G. Koh. Galactic halos as boson stars. *Physical Review D*, 53(4) :2236–2239, February 1996.
- [145] W. Hu, R. Barkana, and A. Gruzinov. Fuzzy Cold Dark Matter : The Wave Properties of Ultralight Particles. *Physical Review Letters*, 85(6) :1158–1161, August 2000.

- 
- [146] P. J. E. Peebles and B. Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Reviews of Modern Physics*, 75(2) :559–606, April 2003.
- [147] J. M. Overduin and P. S. Wesson. Dark matter and background light. *Physics Reports*, 402(5) :267–406, November 2004.
- [148] V. Springel, S. White, A. Jenkins, C. Frenk, N. Yoshida, L. Gao, J. Navarro, R. Thacker, D. Croton, J. Helly, J. Peacock, S. Cole, P. Thomas, H. Couchman, A. Evrard, J. Colberg, and F. Pearce. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, 435(7042) :629–636, June 2005.
- [149] P. H. Chavanis and L. Delfini. Mass-radius relation of Newtonian self-gravitating Bose-Einstein condensates with short-range interactions. II. Numerical results. *Physical Review D*, 84(4) :043532, August 2011.
- [150] P. H. Chavanis and L. Delfini. Mass-radius relation of Newtonian self-gravitating Bose-Einstein condensates with short-range interactions : II. Numerical results. *arXiv :1103.2054 [astro-ph]*, August 2011.
- [151] A. Suarez, T. Robles, and V.H. Matos. A review on the scalar field/Bose-Einstein condensate dark matter model. *Springer International Publishing*, pages 107–142, 2014.
- [152] D. Weinberg, J. Bullock, F. Governato, R. Naray, and A. Peter. Cold dark matter : Controversies on small scales. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(40) :12249–12255, October 2015.
- [153] L. Hui, J. P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten. Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Physical Review D*, 95(4) :043541, February 2017.
- [154] J. S. Bullock and M. Boylan-Kolchin. Small-scale challenges to the CDM paradigm. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 55(1) :343–387, August 2017.
- [155] J. Niemeyer. Small-scale structure of fuzzy and axion-like dark matter. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 113 :103787, April 2020.
- [156] H. Y. Schive, T. Chiueh, and T. Broadhurst. Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave. *Nature Physics*, 10(7) :496–499, July 2014.
- [157] H. Y. Schive, M. H. Liao, T. P. Woo, S. K. Wong, T. Chiueh, T. Broadhurst, and W.-Y. Hwang. Understanding the Core-Halo Relation of Quantum Wave Dark Matter from 3D Simulations. *Physical Review Letters*, 113(26) :261302, December 2014.
- [158] B. Schwabe, J. C. Niemeyer, and J. Engels. Simulations of solitonic core mergers in ultralight axion dark matter cosmologies. *Physical Review D*, 94(4) :043513, August 2016.
- [159] P. Mocz, M. Vogelsberger, V. Robles, J. Zavala, M. Boylan-Kolchin, A. Fialkov, and L. Hernquist. Galaxy formation with BECDM – I. Turbulence and relaxation of idealized haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 471(4) :4559–4570, November 2017.
- [160] P. Mocz, L. Lancaster, A. Fialkov, F. Becerra, and P. H. Chavanis. Schrödinger-Poisson–Vlasov-Poisson correspondence. *Physical Review D*, 97(8) :083519, April 2018.
- [161] J. Veltmaat, J. Niemeyer, and B. Schwabe. Formation and structure of ultralight bosonic dark matter halos. *Physical Review D*, 98(4) :043509, August 2018.
- [162] B. Eggemeier and J. C. Niemeyer. Formation and mass growth of axion stars in axion miniclusters. *Physical Review D*, 100(6) :063528, September 2019.

- [163] P. Mocz, A. Fialkov, M. Vogelsberger, F. Becerra, M. Amin, S. Bose, M. Boylan-Kolchin, P. H. Chavanis, L. Hernquist, L. Lancaster, F. Marinacci, V. Robles, and J. Zavala. First Star-Forming Structures in Fuzzy Cosmic Filaments. *Physical Review Letters*, 123(14) :141301, October 2019.
- [164] D. Faccio, F. Belgiorno, S. L. Cacciatori, V. Gorini, S. Liberati, and U. Moschella, editors. *Analogue Gravity Phenomenology : Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiment*. Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2013.
- [165] A. I. Dyachenko, S. V. Nazarenko, and V. E. Zakharov. Wave-vortex dynamics in drift and  $\beta$ -plane turbulence. *Physics Letters A*, 165(4) :330–334, May 1992.
- [166] J. Skipp, V. L'vov, and S. Nazarenko. Wave turbulence in self-gravitating Bose gases and nonlocal nonlinear optics. *Physical Review A*, 102(4) :043318, October 2020.
- [167] G. Xu, D. Vocke, D. Faccio, J. Garnier, T. Roger, S. Trillo, and A. Picozzi. From coherent shocklets to giant collective incoherent shock waves in nonlocal turbulent flows. *Nature Communications*, 6(1) :8131, September 2015.
- [168] G. Xu, J. Garnier, D. Faccio, S. Trillo, and A. Picozzi. Incoherent shock waves in long-range optical turbulence. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 333 :310–322, 2016.
- [169] A. C. Newell, B. Rumpf, and Vladimir E. Zakharov. Spontaneous Breaking of the Spatial Homogeneity Symmetry in Wave Turbulence. *Physical Review Letters*, 108(19) :194502, May 2012.
- [170] J. Garnier, J. P. Ayanides, and O. Morice. Propagation of partially coherent light with the Maxwell–Debye equation. *JOSA B*, 20(7) :1409–1417, July 2003.
- [171] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, Princeton, second edition, February 2008.
- [172] D. Lynden-Bell. Statistical Mechanics of Violent Relaxation in Stellar Systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 136(1) :101–121, May 1967.
- [173] P.-H. Chavanis and J. Sommeria. Degenerate equilibrium states of collisionless stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 296(3) :569–578, May 1998.
- [174] P. Chavanis and F. Bouchet. On the coarse-grained evolution of collisionless stellar systems. *Astronomy & Astrophysics*, 430 :771–778, February 2005.
- [175] C. Josserand, Y. Pomeau, and S. Rica. Coexistence of Ordinary Elasticity and Superfluidity in a Model of a Defect-Free Supersolid. *Physical Review Letters*, 98(19) :195301, May 2007.
- [176] C. Conti, M. Peccianti, and G. Assanto. Observation of Optical Spatial Solitons in a Highly Nonlocal Medium. *Physical Review Letters*, 92(11) :113902, March 2004.
- [177] N. Ghofraniha, C. Conti, G. Ruocco, and S. Trillo. Shocks in Nonlocal Media. *Physical Review Letters*, 99(4) :043903, July 2007.
- [178] L. Waller, G. Situ, and J. Fleischer. Phase-space measurement and coherence synthesis of optical beams. *Nature Photonics*, 6(7) :474–479, July 2012.
- [179] B. A. Malomed. Chapter 2 Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields. *Progress in Optics*, 43 :71–193, 2002.

- [180] A. Abdolvand, A. M. Walser, M. Ziemieniczuk, T. Nguyen, and P. St J. Russell. Generation of a phase-locked Raman frequency comb in gas-filled hollow-core photonic crystal fiber. *Optics Letters*, 37(21) :4362–4364, November 2012.
- [181] Z. W. Barber, C. Renner, R. R. Reibel, W. R. Wagemann, S. S. and Babbitt, and Peter A. Roos. Conditions for highly efficient anti-Stokes conversion in gas-filled hollow core waveguides. *Optics Express*, 18(7) :7131–7137, March 2010.
- [182] K. Krupa, K. Baudin, A. Parriaux, G. Fanjoux, and G. Millot. Intense stimulated Raman scattering in CO<sub>2</sub>-filled hollow-core fibers. *Optics Letters*, 44(21) :5318–5321, November 2019.
- [183] G. P. Agrawal. Modulation instability induced by cross-phase modulation. *Physical Review Letters*, 59(8) :880–883, August 1987.
- [184] A. Weber. *Raman Spectroscopy of Gases and Liquids*. Topics in Current Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1979.
- [185] C. Antonelli, A. Mecozzi, M. Shtaif, and P. Winzer. Stokes-space analysis of modal dispersion in fibers with multiple mode transmission. *Optics Express*, 20(11) :11718–11733, May 2012.
- [186] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials, Colloquium Publications*, volume 23. American Mathematical Society, 4th edition, 1975.
- [187] E. M. Purcell and R. V. Pound. A Nuclear Spin System at Negative Temperature. *Physical Review*, 81(2) :279–280, January 1951.
- [188] A. S. Oja and O. V. Lounasmaa. Nuclear magnetic ordering in simple metals at positive and negative nanokelvin temperatures. *Reviews of Modern Physics*, 69(1) :1–136, January 1997.
- [189] E. Mueller, T-L. Ho, M. Ueda, and G. Baym. Fragmentation of Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 74(3) :033612, September 2006.
- [190] K. Wright, D. Christodoulides, and F. Wise. Controllable spatiotemporal nonlinear effects in multimode fibres. *Nature Photonics*, 9(5) :306–310, May 2015.
- [191] W. H. Renninger and F. W. Wise. Optical solitons in graded-index multimode fibres. *Nature Communications*, 4(1) :1719, April 2013.
- [192] M. Conforti, C. M. Arabi, A. Mussot, and A. Kudlinski. Fast and accurate modeling of nonlinear pulse propagation in graded-index multimode fibers. *Optics Letters*, 42(19) :4004–4007, October 2017.
- [193] K. Krupa, A. Tonello, A. Barthélémy, T. Mansuryan, V. Couderc, G. Millot, P. Grellu, D. Modotto, S. Babin, and S. Wabnitz. Multimode nonlinear fiber optics, a spatiotemporal avenue. *APL Photonics*, 4(11) :110901, November 2019.
- [194] L. Wright, D. Christodoulides, and F. Wise. Spatiotemporal mode-locking in multimode fiber lasers. *Science*, 358(6359) :94–97, October 2017.
- [195] M. Leonetti, S. Karbasi, A. Mafi, and C. Conti. Light focusing in the Anderson regime. *Nature Communications*, 5(1) :4534, July 2014.
- [196] W. Schirmacher, B. Abaie, A. Mafi, G. Ruocco, and M. Leonetti. What is the Right Theory for Anderson Localization of Light? An Experimental Test. *Physical Review Letters*, 120(6) :067401, February 2018.
- [197] A. Mafi, J. Ballato, K. Koch, and A. Schülzgen. Disordered Anderson Localization Optical Fibers for Image Transport—A Review. *Journal of Lightwave Technology*, 37(22) :5652–5659, November 2019.

- [198] Y. Lahini, A. Avidan, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, D. Christodoulides, and Y. Silberberg. Anderson Localization and Nonlinearity in One-Dimensional Disordered Photonic Lattices. *Physical Review Letters*, 100(1) :013906, January 2008.
- [199] M. Segev, Y. Silberberg, and D. Christodoulides. Anderson localization of light. *Nature Photonics*, 7(3) :197–204, March 2013.
- [200] D. Pierangeli, A. Tavani, F. Di Mei, A. Agranat, C. Conti, and E. DelRe. Observation of replica symmetry breaking in disordered nonlinear wave propagation. *Nature Communications*, 8(1) :1501, November 2017.
- [201] C. Conti and L. Leuzzi. Complexity of waves in nonlinear disordered media. *Physical Review B*, 83(13) :134204, April 2011.
- [202] F. Antenucci, M. Ibáñez Berganza, and L. Leuzzi. Statistical physics of nonlinear wave interaction. *Physical Review B*, 92(1) :014204, July 2015.
- [203] D. Psaltis and C. Moser. Imaging with Multimode Fibers. *Optics and Photonics News*, 27(1) :24–31, January 2016.
- [204] C. Antonelli, A. Mecozzi, and M. Shtaif. Raman amplification in multimode fibers with random mode coupling. *Optics Letters*, 38(8) :1188–1190, April 2013.
- [205] C. Antonelli, M. Shtaif, and A. Mecozzi. Modeling of Nonlinear Propagation in Space-Division Multiplexed Fiber-Optic Transmission. *Journal of Lightwave Technology*, 34(1) :36–54, January 2016.
- [206] N. B. Terry, T. G. Alley, and T. H. Russell. An explanation of SRS beam cleanup in graded-index fibers and the absence of SRS beam cleanup in step-index fibers. *Optics Express*, 15(26) :17509–17519, December 2007.
- [207] A. Ramos, L. Fernández-Alcázar, T. Kottos, and B. Shapiro. Optical Phase Transitions in Photonic Networks : a Spin-System Formulation. *Physical Review X*, 10(3) :031024, July 2020.
- [208] V. E. Zakharov. Collapse of Langmuir waves. *Sov. Phys. JETP*, 35 :908, 1972.
- [209] C. Montes. Photon soliton and fine structure due to nonlinear Compton scattering. *Physical Review A*, 20(3) :1081–1095, September 1979.
- [210] A. Fusaro, J. Garnier, C. Michel, G. Xu, J. Fatome, L. G. Wright, F. W. Wise, and A. Picozzi. Decoupled polarization dynamics of incoherent waves and bimodal spectral incoherent solitons. *Optics Letters*, 41(17) :3992–3995, September 2016. Publisher : Optical Society of America.
- [211] B. Kibler, C. Michel, A. Kudlinski, B. Barviau, G. Millot, and A. Picozzi. Emergence of spectral incoherent solitons through supercontinuum generation in a photonic crystal fiber. *Physical Review E*, 84(6) :066605, December 2011.
- [212] M. V. Goldman. Strong turbulence of plasma waves. *Reviews of Modern Physics*, 56(4) :709–735, October 1984.
- [213] P. A. Robinson. Nonlinear wave collapse and strong turbulence. *Reviews of Modern Physics*, 69(2) :507–574, April 1997.
- [214] I. Langmuir. Surface motion of water induced by wind. *Science (New York, N.Y.)*, 87(2250) :119–123, February 1938.
- [215] A. D. D. Craik and S. Leibovich. A rational model for Langmuir circulations. *Journal of Fluid Mechanics*, 73(3) :401–426, February 1976.
- [216] J. C. Mc Williams, P. P. Sullivan, and C.-H. Moeng. Langmuir turbulence in the ocean. *Journal of Fluid Mechanics*, 334 :1–30, March 1997.

- [217] A. Y. Wong and P. Y. Cheung. Three-Dimensional Self-Collapse of Langmuir Waves. *Physical Review Letters*, 52(14) :1222–1225, April 1984.
- [218] L. N. Vyacheslavov, V. S. Burmasov, I. V. Kandaurov, E. P. Kruglyakov, O. I. Meshkov, S. S. Popov, and A. L. Sanin. Strong Langmuir turbulence with and without collapse : experimental study. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 44(12B) :B279–B291, November 2002.
- [219] M. P. Sulzer and J. A. Fejer. Radar spectral observations of HF-induced ionospheric Langmuir turbulence with improved range and time resolution. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 99(A8) :15035–15050, 1994.
- [220] G. Lopez-Galmiche, Z. Eznaveh, M. A. Eftekhar, K. Lopez, L. G. Wright, F. Wise, D. Christodoulides, and R. Correa. Visible supercontinuum generation in a graded index multimode fiber pumped at 1064 nm. *Optics Letters*, 41(11) :2553–2556, June 2016.
- [221] B. Isham, M. Rietveld, P. Guio, F. Forme, T. Grydeland, and E. Mjølhus. Cavitating Langmuir Turbulence in the Terrestrial Aurora. *Physical review letters*, 108 :105003, March 2012.
- [222] H. Pourbeyram, G. P. Agrawal, and A. Mafi. Stimulated Raman scattering cascade spanning the wavelength range of 523 to 1750 nm using a graded-index multimode optical fiber. *Applied Physics Letters*, 102(20) :201107, May 2013.
- [223] C. Michel, B. Kibler, and A. Picozzi. Discrete spectral incoherent solitons in nonlinear media with noninstantaneous response. *Physical Review A*, 83(2) :023806, February 2011.
- [224] L. Rishoj, B. Tai, P. Kristensen, and S. Ramachandran. Soliton self-mode conversion : revisiting Raman scattering of ultrashort pulses. *Optica*, 6(3) :304–308, March 2019. Publisher : Optical Society of America.
- [225] A. Antikainen, L. Rishoj, B. Tai, S. Ramachandran, and G. P. Agrawal. Fate of a Soliton in a High Order Spatial Mode of a Multimode Fiber. *Physical Review Letters*, 122(2) :023901, January 2019.
- [226] G. Xu, J. Garnier, M. Conforti, and A. Picozzi. Generalized description of spectral incoherent solitons. *Optics Letters*, 39(14) :4192–4195, July 2014.
- [227] J. Garnier and A. Picozzi. Unified kinetic formulation of incoherent waves propagating in nonlinear media with noninstantaneous response. *Physical Review A*, 81(3) :033831, March 2010.
- [228] K. Krupa, C. Louot, V. Couderc, M. Fabert, R. Guenard, B. M. Shalaby, A. Tonello, D. Pagnoux, P. Leproux, A. Bendahmane, R. Dupiol, G. Millot, and S. Wabnitz. Spatiotemporal characterization of supercontinuum extending from the visible to the mid-infrared in a multimode graded-index optical fiber. *Optics Letters*, 41(24) :5785–5788, December 2016.
- [229] M. A. Eftekhar, L. G. Wright, M. S. Mills, M. Kolesik, R. Amezcua Correa, F. W. Wise, and D. N. Christodoulides. Versatile supercontinuum generation in parabolic multimode optical fibers. *Optics Express*, 25(8) :9078–9087, April 2017.
- [230] A. Niang, T. Mansuryan, K. Krupa, A. Tonello, M. Fabert, P. Leproux, D. Modotto, O. N. Egorova, A. E. Levchenko, D. S. Lipatov, S. L. Semjonov, G. Millot, V. Couderc, and S. Wabnitz. Spatial beam self-cleaning and supercontinuum generation with Yb-doped multimode graded-index fiber taper based on accelerating

- self-imaging and dissipative landscape. *Optics Express*, 27(17) :24018–24028, August 2019.
- [231] N. Ullah and C. E. Porter. Expectation Value Fluctuations in the Unitary Ensemble. *Physical Review*, 132(2) :948–950, October 1963.
- [232] D. Weingarten. Asymptotic Behavior of Group Integrals in the Limit of Infinite Rank. *J. Math. Phys.*, 19 :999, 1978.
- [233] B. Collins and P. Śniady. Integration with Respect to the Haar Measure on Unitary, Orthogonal and Symplectic Group. *Communications in Mathematical Physics*, 264(3) :773–795, June 2006.
- [234] F. Hiai and D. Petz. *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*, volume 77 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, March 2006.



# Publications et conférences

## Articles publiés :

- J. Garnier, A. Fusaro, K. Baudin, C. Michel, K. Krupa, G. Millot, and A. Picozzi. Wave condensation with weak disorder versus beam self-cleaning in multimode fibers. *Physical Review A*, 100(5) :053835, November 2019.
- K. Krupa, K. Baudin, A. Parriaux, G. Fanjoux, and G. Millot. Intense stimulated Raman scattering in CO<sub>2</sub>-filled hollow-core fibers. *Optics Letters*, 44(21) :5318–5321, November 2019.
- K. Baudin, A. Fusaro, K. Krupa, J. Garnier, S. Rica, G. Millot, and A. Picozzi. Classical Rayleigh-Jeans Condensation of Light Waves : Observation and Thermodynamic Characterization. *Physical Review Letters*, 125(24) :244101, December 2020.
- K. Baudin, A. Fusaro, J. Garnier, N. Berti, K. Krupa, I. Carusotto, S. Rica, G. Millot, and A. Picozzi. Energy and wave-action flows underlying Rayleigh-Jeans thermalization of optical waves propagating in a multimode fiber. *EPL (Europhysics Letters)*, 134(1) :14001, April 2021.
- J. Garnier, K. Baudin, A. Fusaro, and A. Picozzi. Coherent Soliton States Hidden in Phase Space and Stabilized by Gravitational Incoherent Structures. *Physical Review Letters*, 127(1) :014101, June 2021.
- J. Garnier, K. Baudin, A. Fusaro, and A. Picozzi, Incoherent localized structures and hidden coherent solitons from the gravitational instability of the Schrödinger-Poisson equation, arXiv :2108.13250 (submitted).

## Conférences :

- K. Baudin, A. Fusaro, J. Garnier, K. Krupa, G. Millot and A. Picozzi, Accélération dramatique de condensation d'ondes induite par le désordre dans les fibres optiques multimodes, Congrès Général SFP, Nantes 8-12 Juillet et 2019, oral.
- K. Baudin, A. Fusaro, K. Krupa, J. Garnier, C. Michel, S. Rica, G. Millot, and A. Picozzi, Light condensation in multimode fibers CLEO US, San José 9-14 Mai 2020, oral - invité.
- K. Baudin, A. Fusaro, J. Garnier, K. Krupa, G. Millot and A. Picozzi, Condensation of Optical Waves in Multimode Fibers, OSA, Montréal 13-16 Juillet 2020, oral.
- K. Baudin, A. Fusaro, J. Garnier, N. Berti, K. Krupa, S. Rica, G. Millot, and A. Picozzi, Rayleigh-Jeans condensation of light waves propagating in multimode fibers, Condensates of light, Utrecht 9-11 Décembre 2020, oral - invité.
- K. Baudin, A. Fusaro, J. Garnier, K. Krupa, N. Berti, C. Michel, I. Carusotto, S. Rica, G. Millot, and A. Picozzi, Condensation of optical waves in multimode fibers : observation and thermodynamic characterization, CLEO EU, Munich 21-25 Juin 2021, oral.
- K. Baudin, A. Fusaro, J. Garnier, N. Berti, K. Krupa, S. Rica, G. Millot, and A. Pi-

cozzi, Condensation d'ondes optiques en fibre multimodes, Congrès Général SFO, Dijon 5-9 Juillet 2021, poster.

- J. Garnier, K. Baudin, A. Fusaro, and A. Picozzi, Solitons cachés dans l'espace des phases et stabilisés par des structures gravitationnelles incohérentes, Congrès Général SFO, Dijon 5-9 Juillet 2021, poster.

- K. Baudin, A. Fusaro, J. Garnier, N. Berti, K. Krupa, S. Rica, G. Millot and A. Picozzi, Condensation of classical optical waves in multimode fibers : Theory and Experiments Dynamics Days, Nice 23-27 Août 2021, oral - invité.

## Dynamique et turbulence d'ondes dans les systèmes optiques multimodes

**Mots clés :** optique non linéaire, turbulence d'ondes, thermalisation d'ondes incohérentes, condensation d'ondes, fibres optiques multimodes, solitons.

**Résumé :** Le sujet de cette thèse porte essentiellement sur l'étude expérimentale et théorique de la turbulence d'ondes optiques se propageant dans différents milieux non linéaires. La première partie du manuscrit est consacrée à l'étude de la thermalisation et de la condensation d'ondes optiques qui se propagent dans des fibres multimodes à gradient d'indice. L'analyse basée sur la théorie de turbulence d'ondes révèle que le désordre inhérent à la propagation dans la fibre optique induit une accélération significative du processus de thermalisation optique, ce qui permet de clarifier le mécanisme de certains régimes de nettoyage de faisceau optique reportés récemment. Nous montrons expérimentalement que le champ optique relaxe au cours de sa propagation vers la distribution d'équilibre thermodynamique de Rayleigh-Jeans. La transition de phase vers l'état condensé se manifeste par une population macroscopique du mode fondamental de la fibre optique avec une fraction de puissance condensée en accord avec la théorie de Rayleigh-Jeans. Les propriétés thermodynamiques de la condensation d'ondes classiques sont discutées, ainsi que les différences avec la condensation de Bose-Einstein quantique. Dans la deuxième partie du manuscrit nous étudions la formation spontanée de solitons («condensation de solitons») en présence d'interactions gravitationnelles à longue portée dans le cadre de l'équation de Newton-Schrödinger. Nous mettons en évidence un nouveau régime qui se caractérise par la formation de solitons «cachés» dans le sens où les solitons sont immergés dans les fluctuations environnantes du champ incohérent : Les solitons sont difficilement identifiés dans l'évolution spatio-temporelle du champ, alors que leur existence est dévoilée dans l'espace des phases (spectrogramme optique). Sur la base d'un formalisme de Vlasov de turbulence d'ondes, nous montrons que les solitons sont piégés et stabilisés par les fluctuations incohérentes environnantes. Par ailleurs, dans un domaine différent de la turbulence d'onde, nous mettons en évidence expérimentalement la diffusion Raman stimulée en fibre à cœur creux remplie de CO<sub>2</sub>. Les expériences réalisées montrent qu'en dépit d'une faible puissance injectée et d'une relativement faible pression du gaz, les deux premières raies Stokes sont clairement observées avec une forte intensité grâce à une grande longueur d'interaction effective. Nous montrons un bon accord qualitatif entre les mesures expérimentales et les simulations numériques de l'équation de Schrödinger non linéaire.

---

## Wave dynamics and turbulence in multimode optical systems

**Keywords :** nonlinear optics, wave turbulence, thermalization of incoherent waves, wave condensation, multimode optical fibers, solitons.

**Abstract :** The subject of this thesis essentially focuses on the experimental and theoretical study of optical turbulence in different types of nonlinear media. The first part of the manuscript is devoted to the study of thermalization and condensation of optical waves during their propagation in graded-index multimode fibers. The analysis based on the wave turbulence theory reveals that the disorder inherent to light propagation in an optical fiber induces a significant acceleration of the process of optical thermalization, which can clarify the mechanism of certain regimes of spatial beam cleaning recently reported in the literature. We show experimentally that the optical field relaxes during its propagation towards the Rayleigh-Jeans thermodynamic equilibrium distribution. The phase transition to the condensed state manifests itself by a macroscopic population of the fundamental mode of the optical fiber with a fraction of condensed power in agreement with the Rayleigh-Jeans theory. The thermodynamic properties of classical wave condensation are discussed, as well as their differences with the quantum Bose-Einstein condensation. In the second part of the manuscript, we study the spontaneous formation of solitons («soliton condensation») in the presence of long-range gravitational interactions within the framework of the Newton-Schrödinger equation. We highlight a new regime which is characterized by the formation of «hidden» solitons in the sense that the solitons are fully immersed in the surrounding fluctuations of the incoherent field : The solitons are difficult to identify in the spatiotemporal evolution of the field, while their existence is unveiled in the phase space representation (optical spectrogram). On the basis of the Vlasov formalism of wave turbulence, we show that the solitons are trapped and stabilized by the surrounding incoherent fluctuations. On the other hand, aside from optical turbulence, we experimentally demonstrate stimulated Raman scattering in a hollow core fiber filled with CO<sub>2</sub>. The experiments carried out show that despite a low injected power and a relatively low gas pressure, the first two Stokes lines are clearly observed with a remarkable intensity thanks to the effective long interaction length. Finally, we show a good qualitative agreement between the experimental measurements and the numerical simulations of the nonlinear Schrödinger equation.



