

# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques  
UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

### Analyse du couplage non linéaire sur le comportement des modèles sine-Gordon et Klein-Gordon dans les bandes passante et interdite

■ MARIE ROLAND JOËL ALIMA



ARTS  
ET MÉTIERS  
ParisTech



UBFC  
UNIVERSITÉ  
BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

RÉGION  
BOURGOGNE  
FRANCHE  
COMTÉ



# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques  
UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

N° | X | X | X |

THÈSE présentée par

MARIE ROLAND JOËL **ALIMA**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

Spécialité : **Instrumentation et Informatique de l'Image**

### Analyse du couplage non linéaire sur le comportement des modèles sine-Gordon et Klein-Gordon dans les bandes passante et interdite

Soutenue publiquement le 28 septembre 2017 devant le Jury composé de :

DJILALI KOURTICHE	Rapporteur	Professeur Institut Jean Lamour
SERGE DOS SANTOS	Rapporteur	Maître de Conférences, HDR INSA Centre Val de Loire
FRÉDÉRIC GENIET	Examineur	Maître de Conférences Université de Montpellier II
PATRICK MARQUIÉ	Directeur de thèse	Professeur Université de Bourgogne Franche - Comté
BERNARD ZOBO ESSIMBI	Directeur de thèse	Professeur Université de Yaoundé I
SAVÉRIO MORFU	Co-Directeur de thèse	Maître de Conférences, HDR Université de Bourgogne Franche - Comté





# DÉDICACE

À mes parents bien-aimés, monsieur et madame **BELOMO**, qui n'ont jamais baissé les bras devant les difficultés de la vie et qui ont su m'insuffler le sens de la persévérance.

À mes frères et sœurs (Eric Armand **TOBIE EKOÉ**, Françoise **BELOMO MENGUE**, Françoise **NANGA**, Ignace **BELOMO EPOH**, Marguerite **BELOMO MENDOUGA**, Bienvenu **BELOMO** et Christian Gratien **ÉDOUNA**) qui ont compris et accepté mon absence durant les années de préparation de ce document.

Et à ma chère et tendre épouse Ingrid Stella **MBOGNING NGAPA Epse ALIMA**.

*Cette thèse est pour vous...*



# REMERCIEMENTS

Ce travail a été fait dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire d'Énergie Systèmes Électriques et Électroniques de l'Université de Yaoundé I, Cameroun, et le Laboratoire d'Électronique Informatique et Image (LE2I) de l'Université de Bourgogne, France. En toute humilité et simplicité, ce travail n'aurait jamais vu le jour sans l'immense soutien moral, intellectuel et les conseils, on ne peut plus très précieux, de certaines personnes à qui je souhaite témoigner toute ma gratitude.

Je pense tout d'abord à mes Directeurs de thèse, Monsieur Bernard ESSIMBI ZOBO, Professeur à l'Université de Yaoundé I, Monsieur Patrick MARQUIÉ, Professeur à l'Université de Bourgogne, et à mon co-directeur de thèse Monsieur Savério MORFU, Maître de conférences HDR à l'Université de Bourgogne pour l'encadrement, leurs conseils, leur patience, leur disponibilité et le soutien constant montrés à mon égard. Leurs encouragements, leurs compétences scientifiques m'ont permis de prendre confiance en moi et d'apprendre à travailler en toute sérénité.

Je remercie le Conseil Régional de Bourgogne Franche Comté pour leur soutien financier (PARI - Convention 2014-9201AAO49S01401 (SSTIC 6)).

J'exprime également mes remerciements à Messieurs les membres du jury :

1. à Djilali KOURTICHE, Professeur à l'Institut Jean Lamour, d'avoir bien voulu rapporté ce travail.
2. à Serge DOS SANTOS, Maître de Conférences HDR à l'INSA Centre Val de Loire, d'avoir également accepté d'être un rapporteur pour ce travail.
3. à Frédéric GENIET, Maître de Conférences à l'Université de Montpellier II, qui a bien voulu examiné ce travail.

Je remercie également messieurs les Professeurs Jean-Marie BILBAULT, Stéphane BINCZAK, El-Bay BOURENNANE, messieurs les Maîtres de Conférences Toufik

BAKIR, Jacquir SABIR, Cyrille MIGNIOT, les docteurs Maxime YOCHUM, Amar ZEHER, les Doctorants du LE2I, pour le temps passé en leur compagnie. Leur convivialité et leurs conseils m'ont permis de traverser des moments difficiles en toute tranquillité et oublier en partie le froid et l'éloignement de mon pays.

Je remercie tous les enseignants du Département de Physique de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I pour leurs enseignements, leurs conseils, leurs encouragements et leur soutien. Une pensée particulière au Professeur Timoléon Crépin KOFANE, au Dr. Jean-Sire Armand EYEBE FOUUDA, au Dr. Bertrand BODO, au Dr. Joseph EFFA...

Je n'oublierai pas aussi tous mes oncles et mes tantes qui ont toujours été à l'écoute de mes sollicitations diverses.

Mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui m'ont accompagné, soutenu et encouragé pour que ce travail puisse aboutir. Je pense à tous mes cousins, mes cousines et à tous mes amis qui, de près ou de loin, n'ont cessé de m'encourager.

Ma vie de thésard a aussi été l'occasion de rencontrer des être particuliers avec qui j'ai partagé des moments d'incertitude et de joie. Je pense à Yannick ABANDA avec qui j'ai partagé des heures d'enseignement à n'en plus finir dans les collèges et des établissements supérieurs privés de Yaoundé. Je pense également à ceux qui m'ont accueilli, le Docteur Maxime BORDET, le Docteur Rachid BEHDAD, Jacques MATANGA, merci d'avoir facilité mon acclimatation à la vie de Dijon.

# SOMMAIRE

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Dynamique non linéaire</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Modes non linéaires dans le modèle de Klein-Gordon d'ordre 3</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction . . . . .	9
2.2	Modèle . . . . .	11
2.2.1	Modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage linéaire pur . . . . .	11
2.2.1.1	Profil de la relation de dispersion . . . . .	11
2.2.1.2	Modes localisés . . . . .	12
2.2.1.3	Influence du nombre d'onde $k$ sur l'instabilité modulationnelle . . . . .	20
2.2.1.4	Simulations numériques . . . . .	21
2.2.2	Modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte . . . . .	24
2.2.2.1	Modes localisés . . . . .	24
2.2.2.2	Influence du nombre d'onde $k$ sur l'instabilité modulationnelle . . . . .	25
2.2.2.3	Cas des couplages symétriques . . . . .	26
2.2.2.4	Simulations numériques . . . . .	29
2.2.2.5	Cas des couplages dissymétriques . . . . .	31
2.2.2.6	Simulations numériques . . . . .	33
2.3	Conclusion . . . . .	35

<b>3</b>	<b>Modes non linéaires dans le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	37
3.2	Modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage linéaire pur . . . . .	38
3.2.1	Modes localisés . . . . .	39
3.2.2	Influence du nombre d'onde $k$ sur l'instabilité modulationnelle . . . . .	41
3.2.3	Simulations numériques . . . . .	42
3.3	Modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte . . . . .	45
3.3.1	Modes localisés . . . . .	45
3.3.2	Influence du nombre d'onde $k$ sur l'instabilité modulationnelle dans le modèle à couplage symétrique . . . . .	46
3.3.3	Simulations numériques . . . . .	47
3.3.4	Modèle à couplages dissymétriques . . . . .	51
3.3.5	Simulations numériques . . . . .	52
3.4	Conclusion . . . . .	54
<b>II</b>	<b>Phénomène de supratransmission non linéaire</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Supratransmission dans le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5</b>	<b>59</b>
4.1	Introduction . . . . .	59
4.2	Modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage linéaire pur . . . . .	60
4.2.1	Mise en évidence du phénomène de supratransmission . . . . .	63
4.2.2	Simulations numériques . . . . .	65
4.2.3	Seuil de supratransmission . . . . .	69
4.3	Modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte . . . . .	70
4.4	Conclusion . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Supratransmission dans le modèle de sine-Gordon modifié</b>	<b>79</b>

5.1	Introduction . . . . .	79
5.2	Modèle de sine-Gordon classique . . . . .	80
5.3	Modèle de sine-Gordon modifié . . . . .	84
5.4	Conclusion . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Résolution de l'équation du modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte par l'application de l'AQD</b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>Condensé des résultats des travaux de T. Dauxois et <i>al.</i> sur les propriétés de l'équation de Schrödinger non linéaire</b>	<b>127</b>
<b>C</b>	<b>Résolution de l'équation du modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte par l'application de l'AQD</b>	<b>131</b>
<b>D</b>	<b>Liste des travaux</b>	<b>139</b>





# INTRODUCTION

Dans la nature, il existe plusieurs exemples qui illustrent les systèmes non linéaires. Certains peuvent être fascinants, par exemple, la « ola » faite par les supporters dans un stade de football, l'ondulation des feuilles sous l'effet du vent, pour ne citer que ceux là. D'autres exemples de systèmes non linéaires par contre, suscitent la crainte pour la gente humaine car peuvent être très dévastateurs. Dans ce registre, sans être exhaustif, nous pouvons citer : les séismes, les tornades, les vagues scélérates, les tsunamis, les crises d'épilepsies et les crises cardiaques. Pourtant, définir et comprendre le terme "non linéaire" semble parfois brumeux, même pour les plus avertis. Bien que les phénomènes non linéaires suscitent beaucoup d'intérêt depuis l'observation d'une onde solitaire en 1834 par John Scott Russell [1], la nonlinéarité a souvent été écartée et traitée comme une perturbation de la linéarité. Pourtant, le "non linéaire" est aujourd'hui quelque chose d'essentiel en physique, riche de particularités et de propriétés propres à lui-même.

Le concept d'onde non linéaire est aujourd'hui globalement compris [2] et joue un rôle important dans plusieurs sciences et applications technologiques [3]. L'une des caractéristiques de la théorie des ondes, est que le spectre d'ondes planes de certains milieux périodiques est gouverné par le théorème de Floquet [4]. C'est-à-dire que, pour certaines bandes de fréquences appelées bandes interdites, le système ne permet pas la propagation des ondes, alors qu'il l'autorise pour d'autres bandes de fréquences. En réalité dans la littérature, il est admis que, si on irradie la bande interdite d'un milieu par une onde plane, dans le cas linéaire, l'onde s'évanouit exponentiellement dans le milieu. Cependant, dans le cas non linéaire, on peut observer dans la bande interdite (Gap), la formation de modes propres découverts par Chen et Mills en 1987, qu'ils ont nommé "solitons de gap" [5].

Cette thèse procède par l'étude des systèmes modélisés par des équations non linéaires, telle que l'équation de Klein-Gordon et l'équation de sine-Gordon modifiée associant couplage linéaire pur et couplage non linéaire. Elle a pour objectif d'explorer le rôle du couplage non linéaire dans la transmission d'une onde plane dont la fréquence se trouve dans la bande interdite du milieu de propagation. Elle fait suite aux travaux réalisés au sein de notre équipe, où, en considérant une ligne électrique non linéaire passe-bande gouvernée par l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS), il a été montré que l'addition du bruit permettait la génération de solitons enveloppes au-delà de la fréquence de cut-off [6]. Il a également été montré que l'apport du bruit dans un système excité avec une onde de fréquence prise dans la bande interdite (Gap) peut entraîner la génération et la propagation de modes non linéaires via le phénomène de supratransmission non linéaire [7, 8]. Lorsqu'un réseau de transmission non linéaire est excité avec une fréquence prise dans sa bande interdite, il transmet de l'énergie si et seulement si l'amplitude du signal excitateur est supérieure ou égale à un seuil. Ce phénomène est appelé supratransmission non linéaire [9–14]. Il a été introduit par Geniet et Léon [15, 16] lorsqu'ils ont observé une soudaine augmentation d'amplitude du signal transmis dans un réseau non linéaire excité avec une fréquence prise dans sa bande interdite.

Les chaînes de pendules discrètes gouvernées par les équations de sine-Gordon discrète et de Klein-Gordon discrète sont deux modèles passes-bandes pour lesquels, une étude déterministe complète de la transmission au voisinage de la fréquence de gap a été réalisée par Geniet et Léon et rien jusqu'alors n'a été proposé avant notre thèse dans le cas des systèmes à couplage mixte, associant couplage linéaire pur et couplage non linéaire.

Pour l'étude du rôle du couplage non linéaire dans la génération de modes non linéaires dans les chaînes discrètes de sine-Gordon modifié et de Klein-Gordon, nous avons organisé le document de cette thèse en quatre chapitres divisés en deux parties. Une première partie qui traite de la dynamique interne et une seconde partie qui parle du phénomène de supratransmission non linéaire [15, 16], qui montre l'existence d'un seuil au-delà duquel un mode non linéaire est émis, et se propage dans un milieu non linéaire. Ce processus est obtenu en forçant l'équation d'onde à une extrémité dans la bande interdite, et il résulte d'une instabilité fondamentale du profil d'ondes évanescents généré dans le milieu par l'onde incidente [17].

Dans le chapitre 2, nous étudions un milieu caractérisé par l'équation de Klein-Gordon d'ordre 3 et dans le chapitre 3 nous parlons du modèle de Klein-Gordon d'ordre 5. Ces deux modèles sont traités dans les cas à couplage linéaire pur seul et à couplage mixte associant couplage linéaire pur et couplage non linéaire. Par l'application de la méthode à échelles multiples et l'Approximation Quasi-Discrete (AQD) [18–21], nous déterminons les modes non linéaires qui caractérisent la dynamique interne du système. Nous montrons, par application des calculs de T. Dauxois et al [21], qu'il est possible d'observer dans la chaîne le phénomène d'instabilité modulationnelle. Nous vérifions également que pour une chaîne discrète Klein-Gordon d'ordre 3 et une chaîne discrète de Klein-Gordon d'ordre 5, il se forme effectivement dans le Gap des modes localisés très particuliers appelés « breathers » [5, 22, 23].

Dans le chapitre 4, nous étudions le phénomène de supratransmission non linéaire, en régime déterministe, dans une chaîne de Klein-Gordon d'ordre 5. L'objectif est de montrer à l'aide de simulations numériques, qu'il est possible pour ce système passe-bande, de transmettre une onde plane dans la bande interdite (Gap) à condition de faire varier l'amplitude de l'onde plane appelée signal de forçage. L'observation du phénomène de supratransmission non linéaire consiste ici à forcer la chaîne à son entrée, avec une onde plane de fréquence prise dans la bande interdite, et d'observer pour quelle valeur d'amplitude de cette onde un mode non linéaire est émis dans la chaîne. On établira en fonction de la fréquence de forçage, le seuil d'amplitude permettant le déclenchement du phénomène de supratransmission non linéaire dans le milieu. Le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 considéré dans ce chapitre sera pris, dans un premier temps, avec couplage linéaire pur seul, et dans dans un second temps avec couplage mixte, pour montrer l'effet de l'augmentation du coefficient du couplage non linéaire sur l'amplitude seuil du signal exciteur, nécessaire pour le déclenchement du phénomène de supratransmission, en maintenant le coefficient du couplage linéaire pur constant.

Le chapitre 5 quant à lui, fait l'objet de l'étude du phénomène de supratransmission non linéaire, en régime déterministe, dans un modèle de sine-Gordon modifié associant couplage linéaire pur et couplage non linéaire. Cette étude a pour but de montrer les conditions d'existence du phénomène de supratransmission dans le milieu et montrer également l'effet de l'augmentation du coefficient du couplage non linéaire sur l'amplitude seuil du signal exciteur, nécessaire pour le déclenchement du phénomène

de supratransmission, en maintenant le coefficient du couplage linéaire pur constant. On établira en fonction de la fréquence de forçage, le seuil d'amplitude permettant le déclenchement du phénomène de supratransmission non linéaire dans le milieu.

Les modèles de Klein-Gordon et de sine-Gordon modifié étudiés dans cette thèse, associant couplage linéaire pur et couplage non linéaire, sont caractérisés par l'équation suivante :

$$\frac{d^2 U_n}{dt^2} = -\gamma \frac{dU_n}{dt} + \omega_L^2 (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + \omega_{NL}^2 [(U_{n+1} - U_n)^3 + (U_{n-1} - U_n)^3] - \omega_0^2 f(U_n). \quad (1.1)$$

où  $U_n$  représente une variable d'état, qui peut être un déplacement ou une tension selon le système étudié,  $\gamma$  l'amortissement,  $\omega_L^2$  le coefficient de couplage linéaire,  $\omega_{NL}^2$  le coefficient de couplage non linéaire et  $\omega_0^2$  la pulsation de coupure basse.

La fonction non linéaire  $f(U_n)$  sera définie selon le modèle pour lequel l'étude est réalisée. Plus précisément

$$f(U_n) = U_n - \frac{U_n^3}{3!} \quad (1.2)$$

pour le modèle de Klein-Gordon d'ordre 3,

$$f(U_n) = U_n - \frac{U_n^3}{3!} + \frac{U_n^5}{5!} \quad (1.3)$$

pour le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 et

$$f(U_n) = \sin(U_n) \quad (1.4)$$

pour le modèle de sine-Gordon.

La fonction non linéaire  $f(U_n)$ , dans l'approximation linéaire des modèles sus-cités, se réduit à

$$f(U_n) = U_n. \quad (1.5)$$

Nous considèrerons également les cas des systèmes à couplage linéaire pur

(c'est à dire en prenant le coefficient de couplage linéaire pur  $\omega_L^2$  non nul et le coefficient du couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  nul) et le cas des systèmes à couplage mixte (c'est à dire le coefficient du couplage linéaire pur  $\omega_L^2$  et le coefficient du couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  sont non nuls).





# DYNAMIQUE NON LINÉAIRE





# MODES NON LINÉAIRES DANS LE MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE

## Sommaire

---

<b>2.1 Introduction</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2.2 Modèle</b> . . . . .	<b>11</b>
2.2.1 Modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage linéaire pur . . . . .	11
2.2.2 Modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte . . . . .	24
<b>2.3 Conclusion</b> . . . . .	<b>35</b>

---

## 2.1/ INTRODUCTION

L'introduction des breathers par Sievers et Takeno en 1988, lorsqu'ils ont étudié les modes intrinsèques localisés dans les cristaux [24], a entraîné au fil des années de nombreuses analyses nodales dans des lignes de transmission non linéaires dont la loi de variation s'écarte de la fonction sinusoïdale. Plusieurs phénomènes, tels que la ola dans un stade se football, les vagues scélérates, les battements cardiaques, et bien d'autres, résultant de la nature ont alors été parfaitement décrits par la réponse de tels systèmes non linéaires, qui peuvent être modélisés avec des circuits élémentaires couplés et régis par des équations différentielles discrètes décrivant l'évolution des tensions nodales.

L'analyse nodale des lignes de transmission non linéaires a également montré l'existence de certains modes localisés appelés solitons : ondes solitaires qui se propagent sans se déformer dans un milieu non linéaire et dispersif. En effet, ils ont été observés pour la première fois, le long d'un canal près d'Edinburgh, par John Scott Russell en 1834 [1], et de nombreuses études ont montré leur existence et leur propagation dans des domaines et milieux divers : hydrodynamique [25–27], optique [28–31], lignes de transmission non linéaires [32, 33].

L'intérêt a aussi été tourné vers les solitons de gap dans plusieurs contextes, tels que les lignes de transmission non linéaires [34], les vibrations du réseau à l'état solide [35, 36], l'optique non linéaire [37, 38], les matériaux photoniques à bandes de gap [39] et le phénomène de supratransmission non linéaire [8, 16, 40, 41]. Le concept de soliton de gap a été présenté pour la première fois par Chen et Mills en 1987 lors de leur étude de la réponse non linéaire de lignes de transmission optiques [5]. La découverte de structures périodiques à trois dimensions, pouvant montrer ce qu'on appelle un « photonic band gap » et ouvrant une variété d'applications dans le domaine des micro-ondes [42, 43], a également stimulé l'intérêt d'étude dans le spectre de gap. Ces études, montrant l'existence des modes non linéaires localisés, ont principalement été menées sur les lignes de transmission électriques discrètes (LTEs) [6, 44, 45]. Parmi ces systèmes non linéaires et discrets, on trouve le modèle de Klein-Gordon. En effet, dans ce modèle, des études (numériques et théoriques) ont été réalisées pour montrer l'existence et la propagation des modes localisés (breathers et kinks) par l'application de différentes méthodes parmi lesquelles la collocation spectrale [46], la méthode à échelles multiples combinée à l'Approximation Quasi-Discrete [19, 47–49], l'application du formalisme des fonctions de Green [50], la procédure pseudo inverse [51, 52] et bien d'autres encore [53–56]. En revanche, ces études ont été réalisées sur le modèle de Klein-Gordon non linéaire et discret avec une non linéarité d'ordre trois (potentiel quartique) et un couplage linéaire pur seul.

Dans ce chapitre nous faisons l'analyse nodale, par l'utilisation de la méthode à échelles multiples combinée à l'Approximation Quasi Discrete (AQD), dans le modèle de Klein-Gordon avec une non linéarité d'ordre 3 et un couplage mixte, par extension aux études faites pour le cas du couplage linéaire pur seul et rappelées en première partie de ce chapitre. Nous montrerons qu'un système gouverné par l'équation de Klein-Gordon

non linéaire (KGNL) d'ordre 3 à couplage mixte peut donner naissance au phénomène d'instabilité modulationnelle. De même, nous établirons que dans le cas discret, il se forme dans le gap de la chaîne des modes localisés intrinsèques.

## 2.2/ MODÈLE

Le modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 est celui pour lequel la fonction non linéaire  $f(U_n)$  de l'équation (1.1) a la forme donnée à l'expression (1.2). Pour réaliser une étude complète de ce modèle, dans le cas sans amortissement  $\gamma$ , nous considérerons deux cas de figure : celui du modèle à couplage linéaire pur ainsi que celui du modèle à couplage mixte.

### 2.2.1/ MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE 3 À COUPLAGE LINÉAIRE PUR

Le modèle de Klein-Gordon à couplage linéaire pur est celui pour lequel le coefficient de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  de l'équation (1.1) est nul. Ainsi l'équation caractéristique du modèle de Klein-Gordon à couplage linéaire pur est :

$$\frac{d^2 U_n}{dt^2} = \omega_L^2 (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) - \omega_0^2 f(U_n). \quad (2.1)$$

où  $\omega_L^2$  représente le coefficient du couplage linéaire pur,  $\omega_0^2$  la pulsation de coupure basse

#### 2.2.1.1/ PROFIL DE LA RELATION DE DISPERSION

L'expression théorique de la relation de dispersion s'obtient en considérant une solution onde plane de l'équation (2.1) en régime linéaire où la fonction  $f(U_n)$  est de la forme (1.5). Ainsi, en considérant une solution de l'équation (2.1) sous la forme :

$$U_n(t) = U_0 e^{i(kn - \omega t)} + c.c, \quad (2.2)$$

où  $c.c$  représente le complexe conjugué, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\omega_L^2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right), \quad (2.3)$$

où  $\omega$  est la pulsation des ondes linéaires, et  $k$  leur nombre d'onde. Le spectre linéaire correspondant est limité par la pulsation de coupure haute  $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 + 4\omega_L^2}$ . La figure 2.1 présente un cas particulier pour lequel nous avons fixé le coefficient de couplage linéaire pur  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  et la pulsation de coupure basse  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

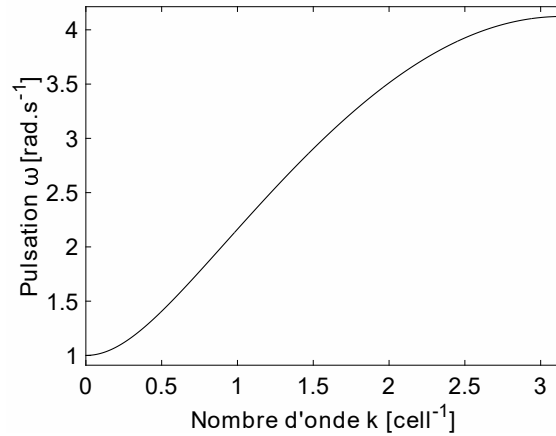


FIGURE 2.1 – Représentation de la courbe de dispersion linéaire théorique du système de Klein-Gordon d'ordre 3. La pulsation  $\omega$ , donnée à la relation (2.3), est tracée en fonction du nombre d'onde  $k$  pour les paramètres  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

### 2.2.1.2/ MODES LOCALISÉS

Pour obtenir le profil des modes non linéaires supportés par notre modèle, nous utilisons la méthode à échelles multiples [18–21], qui nous permet la séparation entre la phase variant rapidement, et l'enveloppe qui module cette phase. Pour cela, une solution du système est prise sous la forme suivante :

$$U_n(t) = \epsilon U^{(1)}(\tau, \xi_n, \theta_n) + \epsilon^2 U^{(2)}(\tau, \xi_n, \theta_n) + \epsilon^3 U^{(3)}(\tau, \xi_n, \theta_n) + \dots \quad (2.4)$$

Dans l'expression de cette solution,  $\epsilon$  est un réel très petit indiquant l'amplitude relative de l'excitation,  $U^{(j)}$   $j = 1, 2, 3, \dots$  représente l'excitation relative, tandis que la variable rapide,  $\theta_n = kn - \omega t$ , représentant la phase de l'onde porteuse, est considérée comme étant complètement discrète. De plus,  $\xi_n$  et  $\tau$  sont des variables lentes, ou encore appelées variables à échelles multiples, définies par

$$\xi_n = \epsilon(n - \mu t) \quad \text{et} \quad \tau = \epsilon^2 t. \quad (2.5)$$

Enfin, dans l'expression de  $\xi_n$ ,  $\mu$  est un paramètre qui sera déterminé par une condition de solvabilité afin d'éviter des termes séculaires dans le développement asymptotique [19]. Afin de mener à bien les calculs, il est préférable d'adopter la notation  $U_{n,n}^{(j)} = U^{(j)}(\tau, \xi_n, \theta_n)$ , c'est à dire que le premier indice de  $U_{n,n}^{(j)}$  est relatif à l'indice de la variable  $\xi_n$  et le second correspond à celui de  $\theta_n$ . Ainsi, d'après (2.4), la solution  $U_n$  s'exprime sous la forme

$$U_n = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j U_{n,n}^{(j)}. \quad (2.6)$$

Pour exprimer  $U_{n+1}$  et  $U_{n-1}$  intervenant dans l'équation (2.1), la relation (2.6) et le développement de Taylor mènent à [19] :

$$\begin{aligned} U_{n\pm 1}(t) &= \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p U^p(\tau, \xi_n \pm \epsilon, \theta_{n+1}) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left( \pm \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^r U_{n,n\pm 1}^{(p)} \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La méthode de détermination des profils de solution  $U_n$  consiste alors à reporter les expressions (2.6) et (2.7) dans l'équation (2.1) et à regrouper les termes selon les puissances de  $\epsilon$ . On obtient ainsi le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial^2 U_{n,n}^{(j)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(j)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(j)} + U_{n,n-1}^{(j)} \right] = M_{n,n}^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.8)$$

où les  $U^{(j)}$  représentent la projection de la solution du système à l'ordre  $j$ , et où les termes  $M_{n,n}^{(j)}$  peuvent être explicités, pour  $j = 1, 2, 3$  selon les relations ci-après ;

$$M_{n,n}^{(1)} = 0, \quad (2.9)$$

$$M_{n,n}^{(2)} = 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t \partial \xi_n} + \omega_L^2 \frac{\partial}{\partial \xi_n} (U_{n,n+1}^{(1)} - U_{n,n-1}^{(1)}), \quad (2.10)$$

et

$$\begin{aligned} M_{n,n}^{(3)} &= 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial t \partial \xi_n} - \mu^2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial \xi_n^2} - 2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t \partial \tau} + \omega_L^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} (U_{n,n+1}^{(1)} + U_{n,n-1}^{(1)}) \right) \\ &\quad + \omega_L^2 \frac{\partial}{\partial \xi_n} (U_{n,n+1}^{(2)} - U_{n,n-1}^{(2)}) + \frac{\omega_0^2}{3!} (U_{n,n}^{(1)})^3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les expressions de  $M_{n,n}^{(j)}$  ( $j = 4, 5, \dots$ ) ne sont pas explicitement écrites dans ce manuscrit, car elles ne sont pas indispensables pour présenter les phénomènes étudiés.

Pour l'ordre le plus bas d' $\epsilon$ , soit  $j = 1$ , l'équation (2.8) conduit au système d'équations linéaires aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(1)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(1)} + U_{n,n-1}^{(1)} \right] = 0, \quad (2.12)$$

dont les solutions peuvent s'exprimer à l'aide d'une amplitude complexe  $A_1(\tau, \xi_n)$  sous la forme :

$$U_{n,n}^{(1)} = A_1(\tau, \xi_n) e^{i\theta_n} + \bar{A}_1(\tau, \xi_n) e^{-i\theta_n}. \quad (2.13)$$

Dans (2.13),  $\bar{A}_1$  représente le complexe conjugué de  $A_1$ .

En remplaçant le profil de solution donné par l'expression (2.13) dans le système d'équations linéaires aux dérivées partielles (2.12), nous retrouvons facilement la relation de dispersion définie par l'expression (2.3).

Pour l'ordre 2 en  $\epsilon$ , soit en prenant  $j = 2$  dans l'équation (2.8) et en tenant compte de l'expression (2.13), nous obtenons le système d'équations du second ordre suivant :

$$\frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(2)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(2)} + U_{n,n-1}^{(2)} \right] = -2i\omega \left( \mu - \frac{\omega_L^2 \sin(k)}{\omega} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \xi_n} e^{i\theta_n} + c.c., \quad (2.14)$$

où  $c.c$  représente le complexe conjugué. Dans le second membre de l'équation (2.14), le terme proportionnel à  $e^{i\theta_n}$  est un terme séculaire qui doit être annulé afin de préserver la validité de la méthode utilisée [57]. Ainsi, l'annulation du coefficient de ce terme permet de déduire l'expression de  $\mu$  sous la forme :

$$\mu = \frac{\omega_L^2 \sin(k)}{\omega}. \quad (2.15)$$

En utilisant la relation de dispersion (2.3), on remarque que la dérivée  $\frac{d\omega}{dk}$  correspond à l'expression (2.15) si bien que  $\mu$  peut être considéré comme étant la vitesse de groupe des ondes linéaires. Par conséquent, l'équation (2.14) admet comme solutions valides :  
soit

$$U_{n,n}^{(2)} = 0, \quad (2.16)$$

soit

$$U_{n,n}^{(2)} = A_2(\tau, \xi_n) e^{2i\theta_n} + \bar{A}_2(\tau, \xi_n) e^{-2i\theta_n}, \quad (2.17)$$

où l'amplitude  $A_2(\tau, \xi_n)$  est à nouveau une fonction complexe.

L'observation de l'expression de la fonction non linéaire  $f(u_n)$  du modèle de Klein-Gordon d'ordre 3, soit  $f(U_n) = U_n - \frac{U_n^3}{3!}$ , semble indiquer que le système n'admet pas de solution en  $e^{2i\theta_n}$ . Ainsi, pour la suite, nous avons choisi la solution (2.16).

Considérons à présent l'ordre 3 en  $\epsilon$ , soit  $j = 3$  dans l'équation (2.8) où l'expression de  $M_{n,n}^{(3)}$  est donnée par l'équation (2.11). En utilisant la relation de dispersion (2.3), l'expression de  $\mu$  obtenue avec l'équation (2.15), les relations (2.16) et (2.13) donnant  $U_{n,n}^{(2)}$  et  $U_{n,n}^{(1)}$  ainsi que l'expression de  $M_{n,n}^{(3)}$ , l'équation (2.8) pour l'ordre 3 se réduit à

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(3)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(3)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(3)} + U_{n,n-1}^{(3)} \right] \\ = \frac{\omega_0^2}{3!} A_1^3 e^{3i\theta_n} + \left[ 3 \frac{\omega_0^2}{3!} A_1 |A_1|^2 + 2i\omega \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + (\omega_L^2 \cos(k) - \mu^2) \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_n^2} \right] e^{i\theta_n} \end{aligned} \quad (2.18)$$

En éliminant le coefficient des termes séculaires dans la partie droite de l'équation (2.18), nous obtenons l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) [50] décrivant le profil de la fonction enveloppe  $A_1(\tau, \xi_n)$  suivante :

$$i \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_n^2} + Q A_1 |A_1|^2 = 0, \quad (2.19)$$

où les paramètres de nonlinéarité  $Q$  et de dispersion  $P$  sont respectivement donnés par :

$$Q = \frac{\omega_0^2}{4\omega}, \quad (2.20)$$

et

$$P = \frac{\omega_L^2 \cos(k) - \mu^2}{2\omega}, \quad (2.21)$$

expressions dans lesquelles  $\mu$  et  $\omega$  sont données respectivement par les expressions (2.15) et (2.3).

L'équation (2.19) est un système complètement intégrable qui admet des solutions solitons et des solutions périodiques [58].

En posant les changements de variables suivants

$$A_1(\tau, \xi_n) = \frac{1}{\epsilon} u(t, x_n) \text{ où } \tau = \epsilon^2 t \text{ et où } \xi_n = \epsilon x_n \text{ avec } x_n = n - \mu t, \quad (2.22)$$

l'équation (2.19) devient :

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + P \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + Qu|u|^2 = 0 \quad (2.23)$$

Les solutions de l'équation NLS (2.23) dépendent du signe du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  et le paramètre de non linéarité  $Q$ . Les paramètres  $P$  et  $Q$  étant donnés par les relations (2.21) et (2.20), c'est le nombre d'onde  $k$  qui déterminera le signe du produit  $PQ$  avec la contrainte  $0 \leq k \leq \pi$ . D'après la figure 2.2, il est possible de distinguer deux zones de valeur du nombre d'onde  $k$  définissant le signe du produit  $PQ$  :

- La zone  $0 \leq k < k_1$  avec  $k_1 = 0.915$  où  $\text{sign}(PQ) > 0$ ,
- La zone  $k_1 < k \leq \pi$  où  $\text{sign}(PQ) < 0$ ,

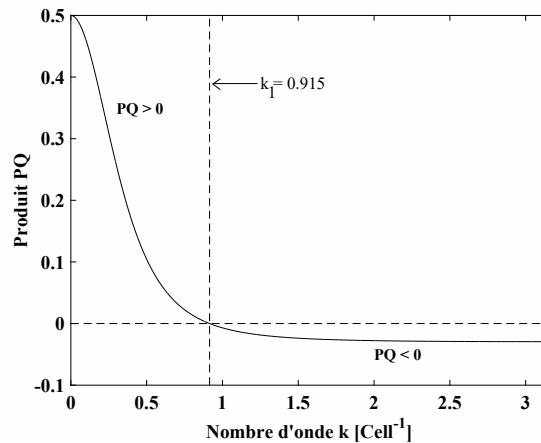


FIGURE 2.2 – Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  et de non linéarité  $Q$  de l'équation de NLS en fonction du nombre d'onde  $k$ . Le produit  $PQ$  est calculé à partir des relations (2.21) et (2.20) en utilisant les expressions (2.3) et (2.15). Paramètres :  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

C'est lorsque le signe du produit  $PQ$  est positif, c'est à dire pour des nombres d'onde  $k$  vérifiant la contrainte  $0 \leq k < k_1$ , que le phénomène d'instabilité modulationnelle apparaît dans le système, mécanisme qui conduit à la localisation de l'énergie [59]. Ainsi, pour  $\text{sign}(PQ) > 0$ , nous considérons la solution de l'équation NLS (2.23) sous forme de solitons :



$$u(x_n, t) = a(x_n)e^{iP\lambda_0 t}, \quad (2.24)$$

où  $\lambda_0$  est un réel strictement positif. En substituant cette solution dans l'équation (2.23), on obtient

$$Pa'' - \lambda_0 Pa + Qa^3 = 0 \quad (2.25)$$

En multipliant cette dernière équation par  $a'$  et en intégrant une fois par rapport à  $x_n$ , on aboutit à

$$(a')^2 = \lambda_0 a^2 - \frac{Q}{2P} a^4. \quad (2.26)$$

La séparation des variables  $a$  et  $x_n$  nous donne

$$\frac{da}{\sqrt{\lambda_0 a^2 - \frac{Q}{2P} a^4}} = dx_n,$$

et l'intégration nous conduit à

$$\int \frac{da}{a \sqrt{\lambda_0 - \frac{Q}{2P} a^2}} = x_n. \quad (2.27)$$

D'après la page 97 du livre de I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik [60], nous appliquons l'égalité suivante

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{p + qx^2}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{arccosh} \left( \frac{2p}{x \sqrt{-\Delta}} \right), \quad p > 0, \quad \Delta < 0 \quad \text{avec} \quad \Delta = 4pq.$$

Cette égalité peut être adaptée pour exprimer l'intégrale de l'équation (2.27) sous la forme

$$\int \frac{da}{a \sqrt{\lambda_0 - \frac{Q}{2P} a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \operatorname{arccosh} \left( \frac{2\lambda_0}{a \sqrt{\frac{2\lambda_0 Q}{P}}} \right).$$

D'après (2.27), la variable  $x_n$  de la solution de l'équation de NLS (2.23) est définie par

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \operatorname{arccosh} \left( \frac{2\lambda_0}{a \sqrt{\frac{2\lambda_0 Q}{P}}} \right).$$

Ensuite, il suffit d'utiliser la solution réciproque pour exprimer la variable amplitude  $a$  en fonction de  $x_n$ , ce qui conduit à

$$a = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}} \frac{1}{\cosh(\sqrt{\lambda_0} x_n)},$$

Sachant que  $\operatorname{sech}(X) = \frac{1}{\cosh(X)}$ , le profil de solution de l'équation défini à l'équation (2.23) se ramène à

$$u(x_n, t) = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}} \operatorname{sech}[\sqrt{\lambda_0} x_n] e^{iP\lambda_0 t}. \quad (2.28)$$

D'après le changement de variables (2.22), cette solution de l'équation de NLS (2.28) permet d'exprimer la solution  $A_1$  de l'équation (2.19). Nous obtenons ainsi le profil de solution suivant :

$$A_1 = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}} \operatorname{sech}[\sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t)] e^{iP\lambda_0 t}, \quad (2.29)$$

expression dans laquelle  $n_0$  représente le centre de la condition initiale. L'équation de NLS (2.19) ayant permis d'annuler le terme en  $e^{i\theta}$  de l'équation (2.18), cette dernière se réduit à

$$\frac{\partial^2 U_{n,n}^{(3)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(3)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(3)} + U_{n,n-1}^{(3)} \right] = \frac{\omega_0^2}{3!} A_1^3 e^{3i\theta_n}, \quad (2.30)$$

où il ne reste plus qu'à chercher  $U_{n,n}^{(3)}$  sous la forme

$$U_{n,n}^{(3)} = A_3(\tau, \xi_n) e^{3i\theta_n} + \bar{A}_3(\tau, \xi_n) e^{-3i\theta_n}. \quad (2.31)$$

En remplaçant les expressions (2.29) et (2.31) dans l'équation (2.30), on obtient

$$A_3 = -\frac{\omega_0^2}{12 [4\omega_0^2 + \omega_L^2 (8 - 9\cos(k) + \cos(3k))]} A_1^3, \quad (2.32)$$

où  $A_1$  est défini par l'expression (2.29).

Le profil théorique représentant la dynamique interne du modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage linéaire pur obéit à  $U_n(t) = A_1 e^{i\theta_n} + A_2 e^{2i\theta_n} + A_3 e^{3i\theta_n} + cc.$

Au regard des expressions (2.29), (2.16) et (2.32), le profil de solution devient donc

$$U_n(t) = K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] e^{i(kn - (\omega - P\lambda_0)t)} - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] e^{3i(kn - (\omega - P\lambda_0)t)} + cc, \quad (2.33)$$

avec

$$K_1 = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}}, \quad (2.34)$$

et

$$K_3 = \frac{\omega_0^2 K_1^3}{12 \left[ 4\omega_0^2 + \omega_L^2 (8 - 9 \cos(k) + \cos(3k)) \right]}. \quad (2.35)$$

La solution du modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 avec couplage linéaire pur, caractérisé par l'équation (2.1), est donc

$$U_n(t) = K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos(kn - (\omega - P\lambda_0)t) - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos(3(kn - (\omega - P\lambda_0)t)), \quad (2.36)$$

Le profil de vitesse correspondant, obtenu en déterminant  $\frac{dU_n}{dt}$ , est le suivant :

$$\begin{aligned} V_n(t) = & K_1 \sqrt{\lambda_0} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \tanh \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos(kn - (\omega - P\lambda_0)t) \\ & + K_1 (\omega - P\lambda_0) \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \sin(kn - (\omega - P\lambda_0)t) \\ & - 3K_3 \sqrt{\lambda_0} \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \tanh \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos(3(kn - (\omega - P\lambda_0)t)) \\ & + 3K_3 (\omega - P\lambda_0) \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \tanh \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \sin(3(kn - (\omega - P\lambda_0)t)) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Notons également un point particulier où la vitesse de groupe est nulle, c'est à dire où le nombre d'onde vaut zéro. Dans ce cas, on parle de solitons de gap dont le profil est donné par :

$$U_n(t) = K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0) \right] e^{i(kn - (\omega - P\lambda_0)t)} - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0) \right] e^{3i(kn - (\omega - P\lambda_0)t)} + cc. \quad (2.38)$$

soit

$$U_n(t) = K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0) \right] \cos (kn - (\omega - P\lambda_0) t) - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0) \right] \cos(3(kn - (\omega - P\lambda_0) t)). \quad (2.39)$$

L'instabilité modulationnelle est un effet de renforcement, par la nonlinéarité, d'une déformation d'une onde périodique pouvant entraîner la rupture de l'onde en un train d'impulsions (localisation d'énergie). D'après les résultats théoriques précédents, la stabilité du système de Klein-Gordon d'ordre 3 dépend essentiellement du nombre d'onde  $k$ . Nous nous proposons d'étudier son influence au prochain paragraphe.

### 2.2.1.3/ INFLUENCE DU NOMBRE D'ONDE $k$ SUR L'INSTABILITÉ MODULATIONNELLE

En utilisant les résultats des calculs de Thierry Dauxois et *al* rappelés en annexe B, l'instabilité modulationnelle existe dans un modèle gouverné par l'équation NLS lorsque la quantité  $(\nu')^2 = (\nu - 2Pk\delta)^2$  est négative. Dans cette expression,  $\nu$  et  $\delta$  représentent respectivement la pulsation et le nombre d'onde de la perturbation de l'onde plane d'amplitude  $a_0$  écrite sous la forme  $u = a_0 e^{(\delta x - \nu t)}$ , solution de l'équation de NLS. Par conséquent la région des nombres d'ondes  $k$ , dans laquelle l'instabilité modulationnelle est possible, est limitée. Cette condition sera toujours vérifiée si et seulement si  $\delta^2 - \frac{2Q}{P} a_0^2$  est négatif. Ce qui n'est possible que si le produit  $PQ$  est positif et le nombre d'onde  $\delta$  inférieur à  $a_0 \sqrt{\frac{2Q}{P}}$ . En effet, en suivant le signe du produit  $PQ$  selon les valeurs du nombre d'onde  $k$  et le signe de  $(\nu')^2$  suivant les valeurs du nombre d'onde  $\delta$  de la perturbation, nous distinguons trois cas possibles :

- Pour  $0 \leq k \leq k_{seuil} = 0.913$ , le produit  $PQ$  est positif. L'instabilité modulationnelle existe. Cependant, elle est partielle, car comme indiqué à la figure 2.3,  $(\nu')^2$  peut être négatif pour une gamme de nombres d'ondes  $\delta$ .
- Pour  $k_{seuil} < k < k_{cr} = 0.915$ , le produit  $PQ$  est toujours positif autorisant l'instabilité modulationnelle dans le modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage linéaire pur seul. Cette fois, cette instabilité est totale car, comme le montre la figure 2.4,  $(\nu')^2$  est négatif quel que soit le nombre d'onde de perturbation  $\delta$ .
- Pour  $k > k_{cr}$ , le produit  $PQ$  est négatif comme nous le voyons à la figure 2.2. L'équa-

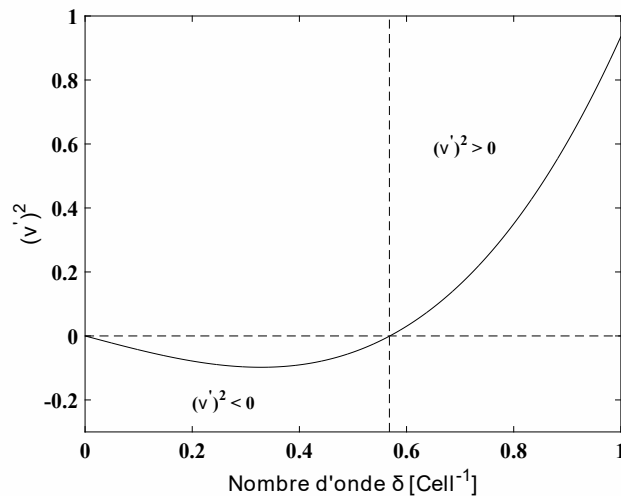


FIGURE 2.3 – Représentation de  $(v')^2$  en fonction du nombre d'onde  $\delta$  de la perturbation. Paramètres :  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $a_0 = 1$  et  $k = 0.25 \text{ Cell}^{-1}$ .

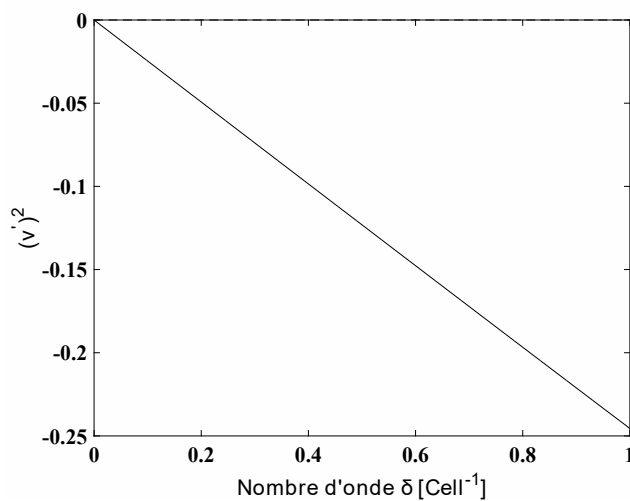


FIGURE 2.4 – Représentation de  $(v')^2$  en fonction du nombre d'onde  $\delta$  de perturbation. Paramètres :  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $a_0 = 1$  et  $k = 0.914 \text{ Cell}^{-1}$ .

tion de NLS n'admet alors pas de solutions solitons.

#### 2.2.1.4/ SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Après avoir étudié les conditions d'existence des solutions solitons par le biais de l'instabilité modulationnelle, nous nous proposons de valider ces prédictions théoriques par des simulations numériques.

Pour tout ce qui suit, le système de  $N$  cellules sera excité à l'entrée par le signal

$U_1(t) = a_0 \sin(\omega t)$  représenté à la figure 2.5.

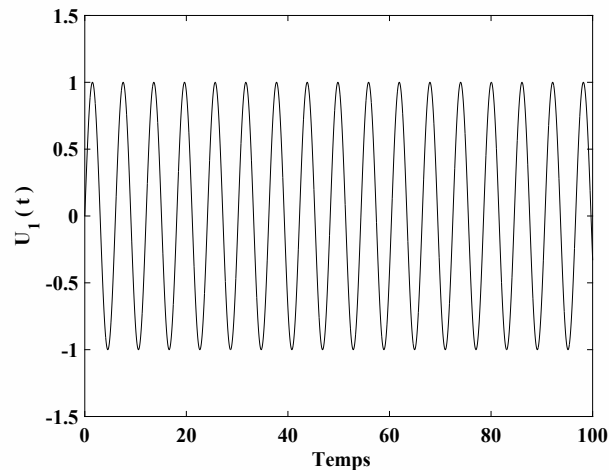


FIGURE 2.5 – Évolution temporelle du signal excitateur de la ligne. Paramètres :  $a_0 = 1$ .

La figure 2.6 présente l'évolution temporelle de la cellule  $n = 30$  pour deux valeurs de nombre d'onde  $k$  lorsque le système est excité en entrée par le signal sinusoïdal, d'amplitude 1V, représenté à la figure 2.5. De manière prévisible, on observe une

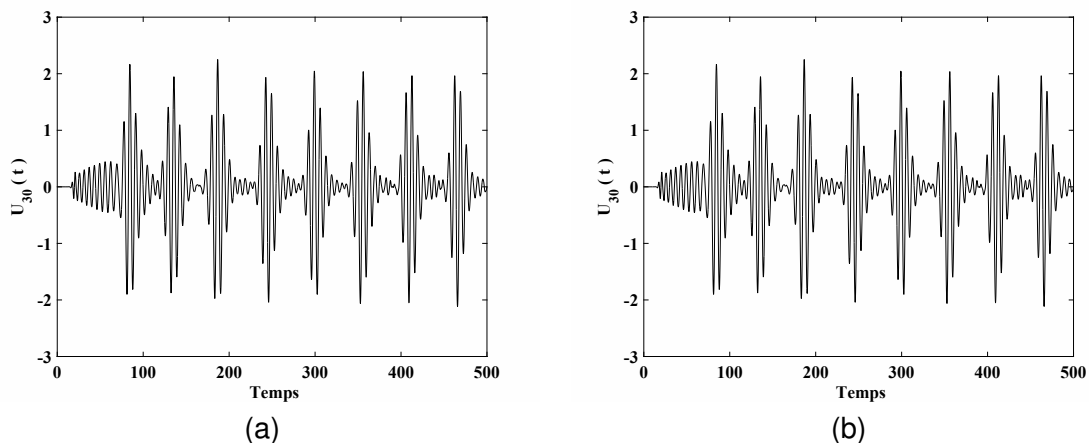


FIGURE 2.6 – Évolution temporelle de la cellule  $n = 30$  pour deux nombres d'onde  $k$  différents, (a) :  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$  et (b) :  $k = 0.88 \text{ Cell}^{-1}$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $a_0 = 1$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $N = 1000 \text{ Cellules}$ .

modulation d'amplitude pour une gamme de nombre d'onde  $k$  comprise entre 0 et 0.915, correspondant à la valeur critique en deçà de laquelle le produit entre le paramètre de dispersion  $P$  et de non linéarité  $Q$  de l'équation de NLS est positif permettant ainsi l'existence de l'instabilité modulationnelle.

En supposant que les conditions qu'impose le nombre d'onde  $k$  pour qu'un ré-

gime instable naisse dans la chaîne soient remplies, l'une des conséquences majeures dans le milieu est la création de modes intrinsèques localisés bien connus sous le nom de breathers [20, 24]. Les résultats précédents montrent que les faibles valeurs du nombre d'onde  $k$  peuvent permettre une instabilité de se développer, par conséquent, la non linéarité peut induire la localisation de l'énergie.

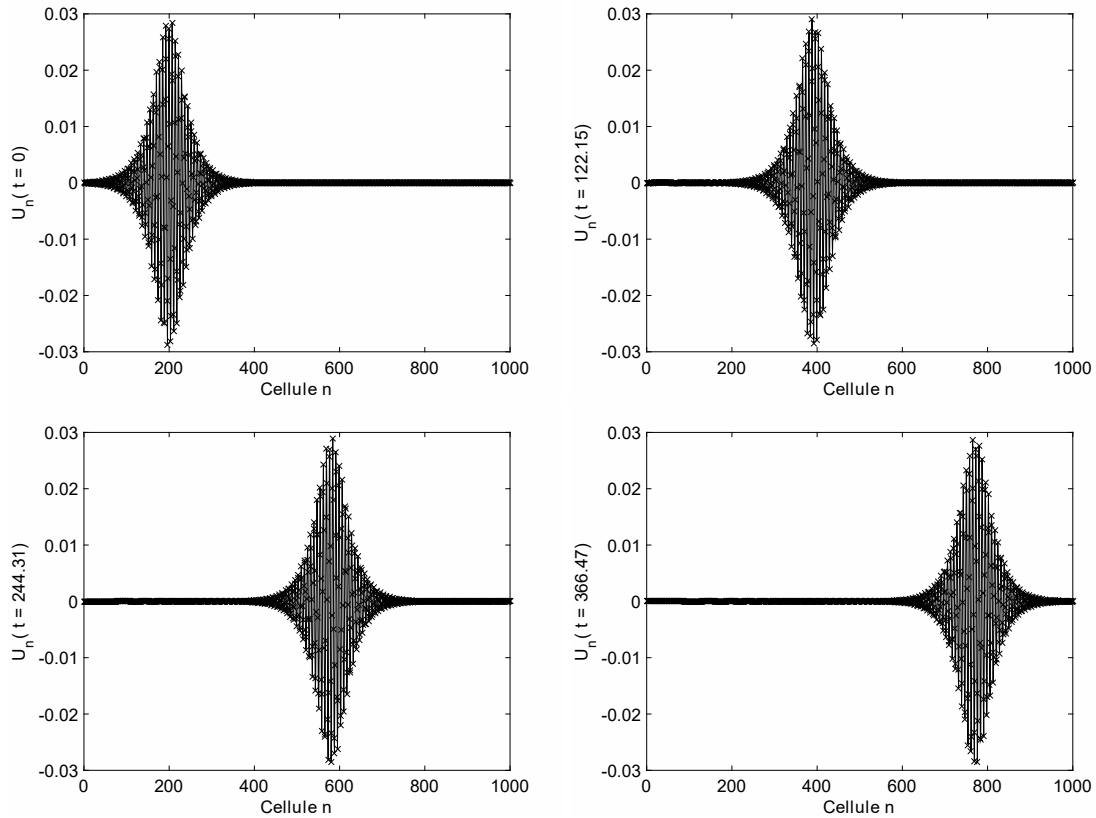


FIGURE 2.7 – Représentation spatiale de l'état de la ligne à quatre instants différents. Les instants choisis sont de gauche à droite et de haut en bas.  $t = 0$ ,  $t = 122.15$ ,  $t = 244.31$  et  $t = 366.47$ . Le profil de solution théorique, donné par l'expression (2.33), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulation numérique de l'équation (2.1) avec l'expression (2.33) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = \text{rad.s}^{-1}$ , taille du réseau  $N = 1000$  Cellules,  $n_0 = 200$ ,  $\lambda_0 = 0.001$ ,  $k = 0.85 \text{ Cell}^{-1}$  et le pas d'intégration de l'équation différentielle est  $\Delta t = 0.01$ .

En tenant compte de l'intervalle du nombre d'onde  $k$  où on observe de l'instabilité modulationnelle dans le modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage linéaire pur, c'est à dire les intervalles où l'équation de NLS admet des solutions solitons (produit  $PQ$  positif), des simulations numériques de la ligne ont été réalisées via l'équation (2.1). Pour la résolution numérique, une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est utilisée avec un pas d'intégration temporelle  $\Delta t = 0.01$ . De plus, les conditions initiales pour la résolution nu-

mérique de l'équation différentielle du modèle sont  $U_n(t=0)$  et  $V_n(t=0)$ , données par les relations (2.33) et (2.37). Ainsi, la figure 2.7 présente l'état de la ligne à quatre instants différents :  $t = 0$  (condition initiale),  $t = 122.15$ ,  $t = 244.31$  et  $t = 366.47$ . On remarque un bon accord entre l'expression théorique (2.33) obtenue par l'application de l'AQD et les simulations numériques de l'équation (2.1) du modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage linéaire pur.

### 2.2.2/ MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE 3 À COUPLAGE MIXTE

Le modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte obtenu lorsque le couplage linéaire pur est associé à un couplage non linéaire, est caractérisé par l'équation différentielle

$$\frac{d^2 U_n}{dt^2} - \omega_L^2 (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) - \omega_{NL}^2 [(U_{n+1} - U_n)^3 + (U_{n-1} - U_n)^3] + \omega_0^2 f(U_n) = 0, \quad (2.40)$$

la fonction  $f(U_n)$  étant le polynôme d'ordre 3 donné à l'expression (1.2).

Certaines études ont montré que ce modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte peut supporter des solutions kinks et des compactons [61]. D'autres études, menées sur ce modèle, ont aussi montré qu'il peut également supporter des solutions solitons [62]. Mais ces études ont été réalisées en considérant l'approximation des milieux continus. Dans le paragraphe suivant, nous déterminerons les modes non linéaires du modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte, en maintenant son caractère discret et en utilisant la méthode à échelles multiples.

#### 2.2.2.1/ MODES LOCALISÉS

L'application de la méthode à échelles multiples, appliquée à ce modèle, dont le détail du calcul est donné à l'annexe A, nous conduit à l'expression de la solution du modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte suivante :

$$U_n(t) = K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos(kn - (\omega - P\lambda_0)t) - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos(3(kn - (\omega - P\lambda_0)t)) \quad (2.41)$$



où

$$\mu = \frac{\omega_L^2 \sin(k)}{\omega}, \quad (2.42)$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}}, \quad (2.43)$$

et

$$K_3 = \frac{\omega_{NL}^2 (2\cos(3k) - 6\cos(2k) + 2\cos(k) - 2) + \frac{\omega_0^2}{6} \left(\frac{2\lambda_0 P}{Q}\right)^{\frac{3}{2}}}{9\omega^2 + 2\omega_L^2 (\cos(3k) - 1) - \omega_0^2}, \quad (2.44)$$

avec  $\omega$  donné à l'expression (2.3). Si  $\omega_{NL} = 0$  dans l'expression (2.44), nous retrouvons bel et bien l'expression (2.35).

Le paramètre de dispersion  $P$  défini ici par :

$$P = \frac{\omega_L^2 \cos(k) - \mu^2}{2\omega}, \quad (2.45)$$

$\mu$  étant donné par l'expression (2.15).

Le paramètre de non linéarité  $Q$  s'exprime quant à lui sous la forme :

$$Q = \frac{\omega_{NL}^2 (24\cos(k) - 6\cos(2k) - 18) + \frac{\omega_0^2}{2}}{2\omega}. \quad (2.46)$$

### 2.2.2.2/ INFLUENCE DU NOMBRE D'ONDE $k$ SUR L'INSTABILITÉ MODULATIONNELLE

Les résultats des calculs de T. Dauxois et *al*, précédemment considérés dans le paragraphe 2.2.1.3, sont à nouveau utilisés dans ce paragraphe pour déterminer les valeurs du nombre d'onde, pour lesquelles il y a instabilité modulationnelle dans le modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte. D'après les relations (2.21) et (2.45), le paramètre de dispersion  $P$  de l'équation de NLS est le même pour les modèles de Klein-Gordon d'ordre 3 que ce soit à couplage linéaire pur ou à couplage mixte. Seul le paramètre de non linéarité  $Q$  de l'équation de NLS est différent pour les deux modèles (confer les équations (2.20) et (2.46)).

## 2.2.2.3/ CAS DES COUPLAGES SYMÉTRIQUES

Le cas des couplages symétriques correspond au cas où le coefficient du couplage linéaire et celui du couplage non linéaire ont la même valeur. Nous verrons deux cas particuliers :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ , où  $\omega_L^2$  représente le coefficient du couplage linéaire pur et  $\omega_{NL}^2$  celui du couplage non linéaire. Le but ici est d'observer la réponse du système lorsque les couplages linéaire et non linéaire ont la même valeur, situation difficile à mettre en oeuvre en pratique.

- Cas où  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$

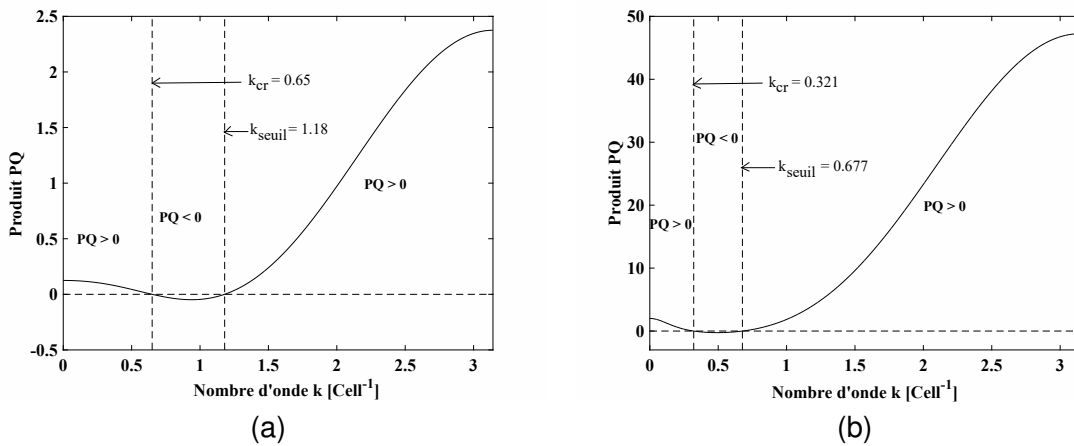


FIGURE 2.8 – Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  donné à l'équation (2.45) et le paramètre de non linéarité  $Q$  donné à l'équation (2.46), en fonction du nombre d'onde  $k$  de l'enveloppe pour deux valeurs de couplages  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)$ . (a) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et (b) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ .

En suivant le signe du produit  $PQ$  selon les valeurs du nombre d'onde  $k$  de l'enveloppe, et également le signe de  $(\nu')^2$  suivant les valeurs du nombre d'onde  $\delta$  de perturbation, les valeurs de  $k_{cr}$  (valeur en deçà de laquelle le produit  $PQ$  est positif) et de  $k_{seuil}$  (valeur à partir de laquelle le produit  $PQ$  est positif) étant différentes pour chaque couple de couplage linéaire et non linéaire  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)$ , nous distinguons trois cas possibles :

- Pour  $0 \leq k < k_{cr}$ ,  $k_{cr}$  obtenu pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$ , le produit  $PQ$  est positif comme le montre la figure 2.8(a). L'équation de NLS admet des solutions solitons. L'instabilité modulationnelle existe, mais elle est partielle car  $(\nu')^2$  est négatif pour une gamme de nombres d'ondes  $\delta$  comme le montre la figure 2.9(a).

- Pour  $k_{cr} \leq k \leq k_{seuil}$ , le produit  $PQ$  est négatif comme le montre la figure 2.8(a). L'équation de NLS n'admet pas de solutions solitons.  $(\nu')^2$  est positif quel que soit le nombre d'onde de perturbation  $\delta$  comme nous le voyons à la figure 2.9(b). L'onde plane est donc stable car la fréquence  $\nu$  de la perturbation est réelle, par conséquent il y a absence d'instabilité modulationnelle.
- Pour  $k > k_{seuil}$ ,  $k_{seuil}$  obtenu pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$ , le produit  $PQ$  est positif comme le montre la figure 2.8(a). L'équation de NLS admet des solutions solitons.  $(\nu')^2$  est positif quel que soit le nombre d'onde de perturbation  $\delta$  comme nous le voyons à la figure 2.9(c). L'onde plane est donc stable car la fréquence  $\nu$  de perturbation est réelle, par conséquent il y a également absence d'instabilité modulationnelle.

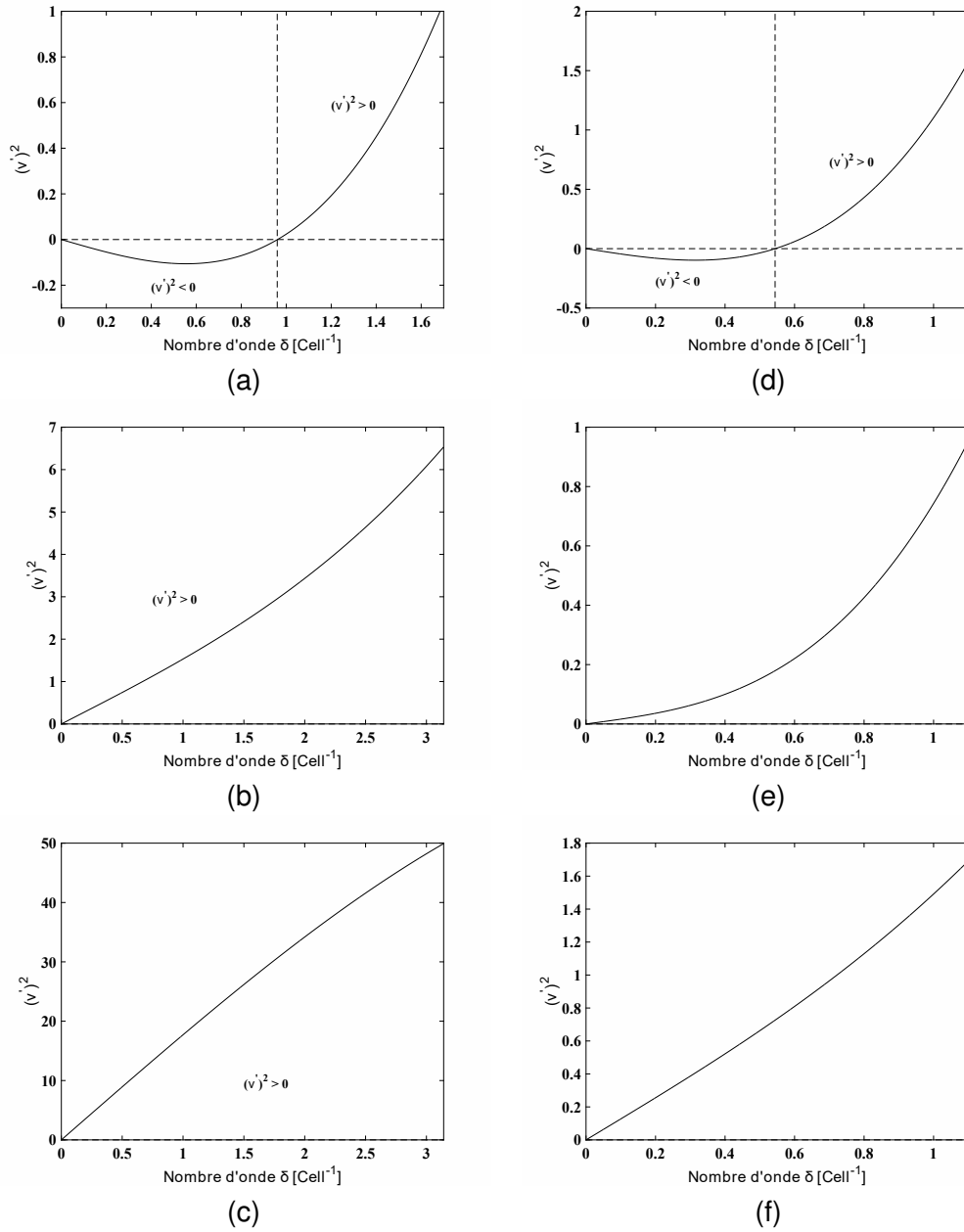


FIGURE 2.9 – Représentation de  $(v')^2$  en fonction du nombre de la perturbation pour trois valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$  et pour chacun des deux couplages étudiés. À la colonne de gauche  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et à droite  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ . Le nombre d'onde  $k$  vaut de haut en bas (a)  $k = 0.5$  Cell $^{-1}$ , (b)  $k = 1$  Cell $^{-1}$ , (c)  $k = 2.5$  Cell $^{-1}$ , (d)  $k = 0.2$  Cell $^{-1}$ , (e)  $k = 0.5$  Cell $^{-1}$ , et (f)  $k = 0.7$  Cell $^{-1}$ . Les paramètres sont :  $\omega_0^2 = 1$  et  $a_0 = 1$ .

- Cas où  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$

En suivant la courbe d'évolution du produit  $PQ$  en fonction du nombre d'onde  $k$  présenté à la figure 2.8(b), nous remarquons trois zones du nombre d'onde en fonction du signe du produit  $PQ$ . En effet, lorsque le nombre d'onde  $k$  est compris dans l'in-

tervalle  $[0, k_{cr}]$ , le produit  $PQ$  est positif. Ce qui a pour conséquence l'existence de l'instabilité modulationnelle. Cependant, la figure 2.9(d) montre que cette instabilité modulationnelle est partielle car le paramètre  $(\nu')^2$  est négatif pour une gamme de nombres d'onde  $\delta$  de la perturbation. Lorsque le nombre d'onde est compris dans l'intervalle  $]k_{cr}, k_{seuil}]$ , le produit  $PQ$  devient négatif, ce qui prouve l'absence de l'instabilité modulationnelle car le paramètre  $(\nu')^2$  est positif quelque soit le nombre d'onde de perturbation  $\delta$  comme nous le voyons à la figure 2.9(e). Enfin, lorsque la valeur du nombre d'onde  $k$  est supérieur à celle de  $k_{seuil}$ , le produit  $PQ$  redevient positif mais le paramètre  $(\nu')^2$  est positif quelque soit le nombre d'onde de perturbation  $\delta$  comme le montre la figure 2.9(f), entraînant l'absence de l'instabilité modulationnelle.

Les précédents résultats nous montrent qu'il y a aussi instabilité modulationnelle dans le milieu lorsque les coefficients de couplage linéaire et non linéaire ont la même valeur.

#### 2.2.2.4/ SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de confirmer les résultats théoriques sur le modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplages mixtes et symétriques, obtenus plus haut, par le biais des simulations numériques.

La figure 2.10 présente l'évolution temporelle de la cellule  $n = 30$  pour les deux cas symétriques précédemment présentés, lorsque le système est excité en entrée par le signal représenté à la figure 2.5. De manière prévisible, on observe une modulation d'amplitude pour une gamme de nombre d'onde  $k$  comprise entre 0 et  $k_{cr}$ , correspondant à la valeur critique à partir de laquelle le produit entre le paramètre de dispersion  $P$  et de nonlinéarité  $Q$  de l'équation de NLS devient négatif comme le montrent les figures 2.8(a) et 2.8(b). Nous observons également la formation de modes non linéaires de type breathers.

Le système (2.40) étant excité à son entrée par le signal défini par l'expression (2.41), la figure 2.11 présente l'état du milieu à quatre instants différents : à  $t = 0$ ,  $t = 102.25$ ,  $t = 204.51$  et  $t = 306.77$  avec pour paramètres de ligne  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ . On remarque un bon accord entre l'expression théorique (2.41) obtenue par l'application de

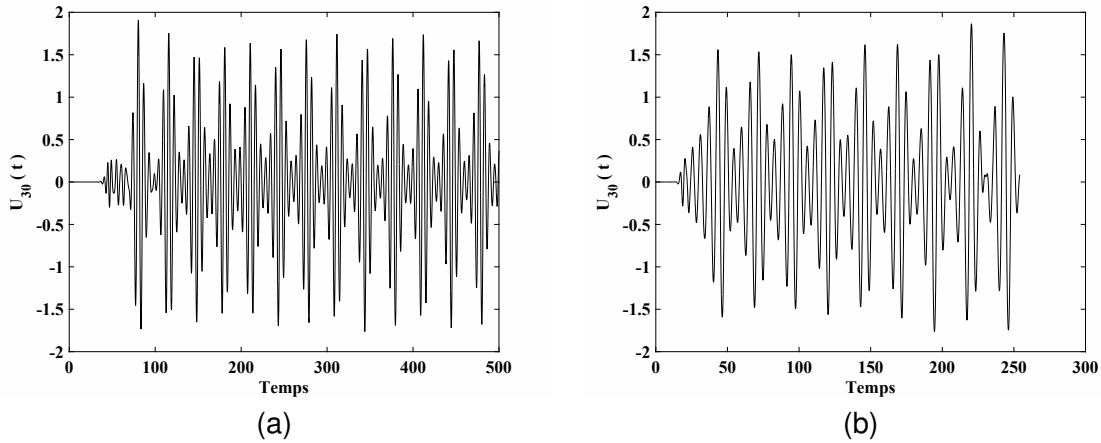


FIGURE 2.10 – Évolution temporelle de la cellule  $n = 30$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $a_0 = 1$ , pour 2.10(a)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$ ,  $k = 0.25$  et pour 2.10(b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ ,  $k = 0.16 \text{ Cell}^{-1}$ .

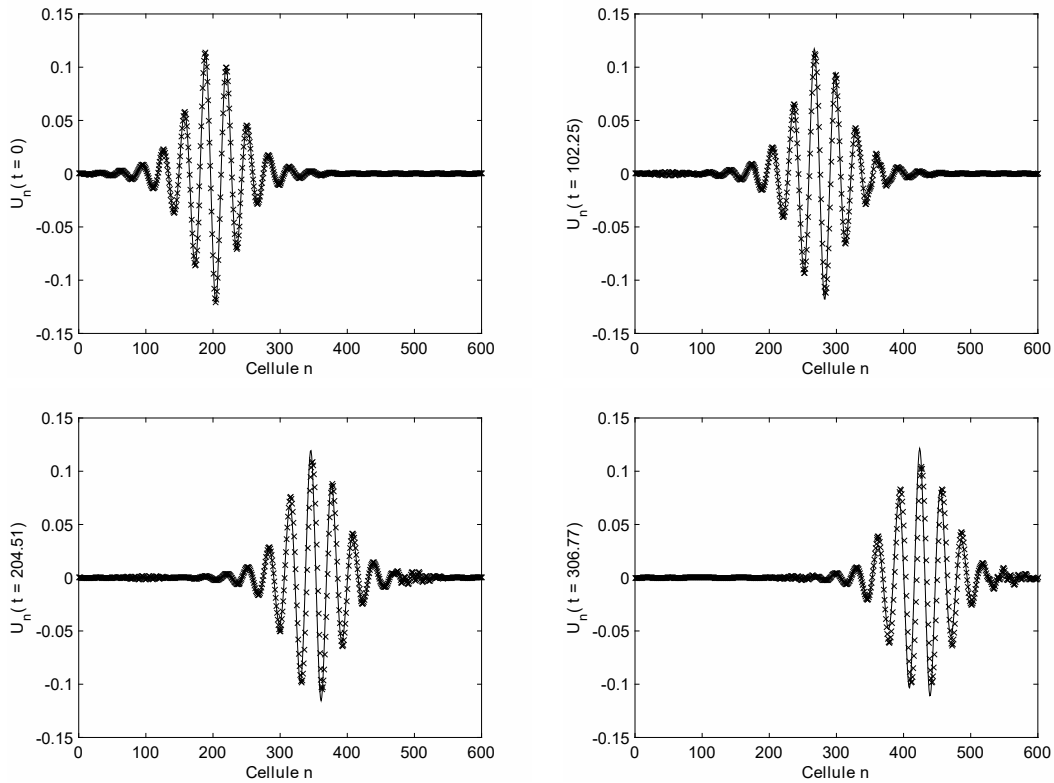


FIGURE 2.11 – Représentation spatiale de l'état de la ligne à quatre instants différents. Les instants choisis sont de gauche à droite et de haut en bas.  $t = 0$ ,  $t = 102.25$ ,  $t = 204.51$  et  $t = 306.77$ . Le profil de gauche théorique, donné à l'expression (2.41), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (2.40) avec l'expression (2.41) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.001$ ,  $n_0 = 200$ ,  $N = 600$  cellules,  $k = 0.2 \text{ Cell}^{-1}$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ , et le pas d'intégration de l'équation différentielle est  $\Delta t = 0.01$ .

l'AQD et les simulations numériques réalisées à travers l'équation du modèle (2.40), en prenant l'expression théorique (2.41) comme conditions initiales.

### 2.2.2.5/ CAS DES COUPLAGES DISSYMMÉTRIQUES

Le cas des couplages dissymétriques correspond au cas où le coefficient du couplage linéaire pur  $\omega_L^2$  et celui du couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  n'ont pas la même valeur. Nous verrons deux cas particuliers :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ .

- Cas où  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$

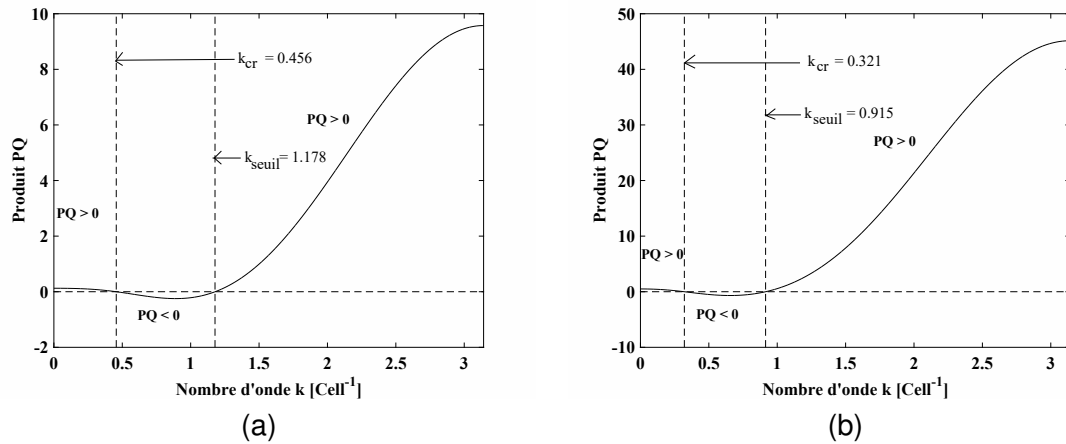


FIGURE 2.12 – Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  donné à l'équation (2.45) et le paramètre de non linéarité  $Q$  donné à l'équation (2.46), en fonction du nombre d'onde  $k$  pour deux jeux de couplage. (a) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et (b) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ .

L'observation de la courbe du produit  $PQ$  de la figure 2.12(a) nous montre clairement les trois zones du nombre d'onde  $k$  en fonction du signe du produit  $PQ$ . En effet, le produit  $PQ$  est positif pour la gamme de nombres d'onde compris entre  $[0, k_{cr}]$  et  $]k_{seuil}, \pi]$ . La positivité du produit  $PQ$  dans l'intervalle  $[0, k_{cr}]$  et la négativité du paramètre  $(\nu')^2$  (pour une gamme de nombres d'ondes  $\delta$  comme l'indique la figure 2.13(a)) entraîne l'existence de l'instabilité modulationnelle. Le produit  $PQ$  étant également positif dans l'intervalle  $]k_{seuil}, \pi]$ , le fait que le paramètre  $(\nu')^2$  soit positif quelque soit le nombre d'onde de perturbation  $\delta$  comme nous le voyons à la figure 2.13(b) entraîne l'absence de l'instabilité modulationnelle. Lorsque le nombre d'onde  $k$  est compris dans l'intervalle  $]k_{cr}, k_{seuil}]$ , le produit  $PQ$  est négatif et le paramètre  $(\nu')^2$  est quant à lui positif pour tout nombre d'onde de perturbation  $\delta$  comme

le montre la figure 2.13(b), il s'en suit l'absence de l'instabilité modulationnelle.

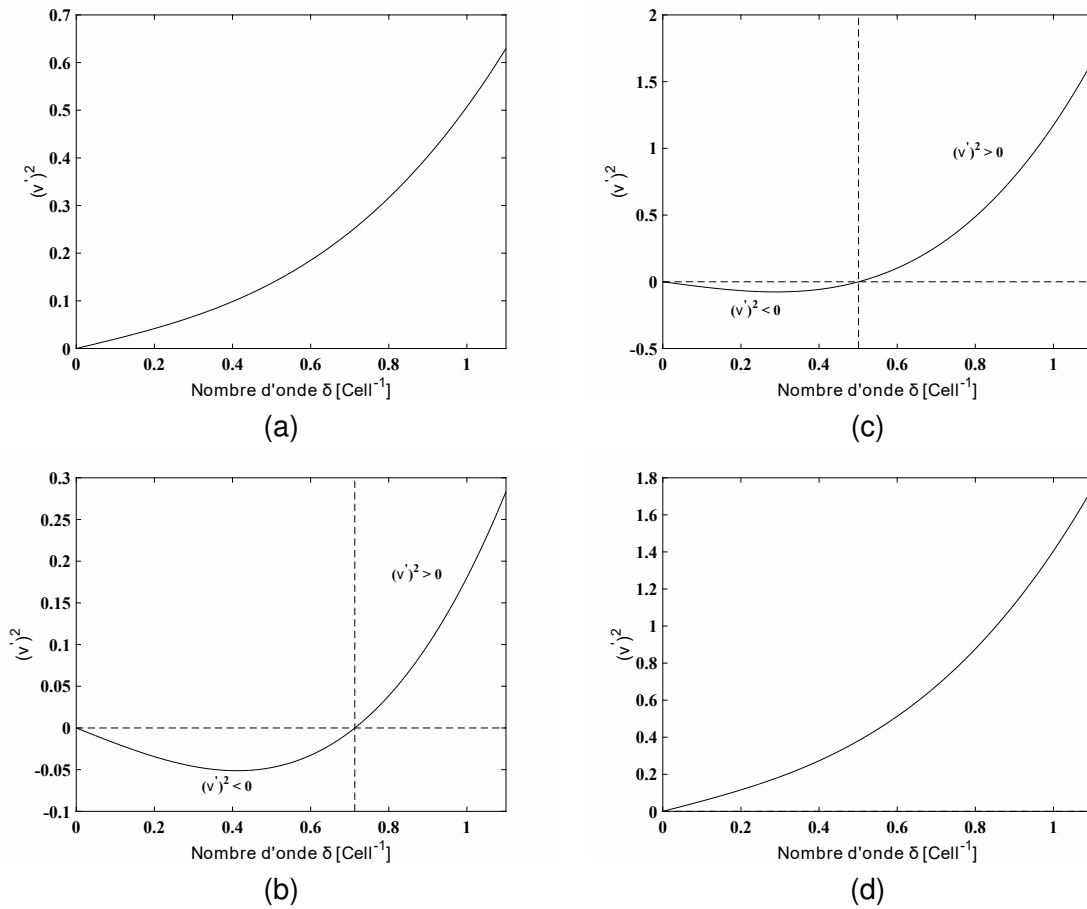


FIGURE 2.13 – Représentation de  $(v')^2$  en fonction du nombre d'onde  $\delta$  des perturbations pour deux valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$  et pour les deux jeux de couplage étudiés. À la colonne gauche  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et à droite  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ . (a) :  $k = 0.4 \text{ Cell}^{-1}$ , (b) :  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$ , (c) :  $k = 0.2 \text{ Cell}^{-1}$ , et (d) :  $k = 0.4 \text{ Cell}^{-1}$ . Les paramètres sont :  $\omega_0^2 = 1$  et  $a_0 = 1$ .



- Cas où  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$

L'observation de la courbe d'évolution du produit  $PQ$ , présentée à la figure 2.12(b), nous montre clairement les trois zones de valeurs du nombre d'onde  $k$  par rapport au signe du produit  $PQ$ . En effet, le produit  $PQ$  est positif pour les valeurs du nombre d'onde  $k$  comprises entre  $[0, k_{cr}]$  et  $]k_{seuil}, \pi]$ , mais négatif pour les valeurs du nombre d'onde  $k$  comprises entre  $]k_{cr}, k_{seuil}]$ . Le paramètre  $(v')^2$  est négatif pour une gamme de nombre d'onde de perturbation  $\delta$  comme le montre la figure 2.13(c) et pour le nombre d'onde  $k$  compris dans l'intervalle  $[0, k_{cr}]$ , ce qui entraîne l'existence de l'instabilité modulationnelle. Par contre, pour des valeurs du nombre d'onde  $k$  prises dans les intervalles  $]k_{cr}, k_{seuil}]$  et  $]k_{seuil}, \pi]$ , le paramètre  $(v')^2$  est positif pour toute valeur du nombre d'onde de perturbation  $\delta$  comme le montre l'illustration présentée à la figure 2.13(d). Cette positivité du paramètre  $(v')^2$  entraîne l'absence de l'instabilité modulationnelle.

Le paragraphe suivant nous servira de plateforme pour confirmer par des simulations numériques les prédictions théoriques présentées ci-dessus pour le cas du modèle à couplages dissymétriques.

### 2.2.2.6/ SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Le système étant excité son entrée par le signal représenté à la figure 2.5, la figure 2.14 présente l'évolution temporelle de la cellule  $n = 30$  pour les deux cas dissymétriques  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$  précédemment présenté. La modulation d'amplitude pour une gamme du nombre d'onde  $k$  comprise entre 0 et  $k_{cr}$ , ( $k_{cr}$  correspondant à la valeur critique à partir de laquelle le produit entre le paramètre de dispersion  $P$  et de non linéarité  $Q$  de l'équation de NLS devient négatif) observée sur les figures 2.12(a) et 2.12(b) confirme les prédictions théoriques présentées au paragraphe précédent. Cette modulation d'amplitude entraîne la formation des modes non linéaires appelés breathers.

Nous excitions à présent le système (2.40) à son entrée par le signal théorique donné à l'expression (2.41) avec les conditions aux bords de Dirichlet. Ainsi, la figure 2.15 présentent l'état de la ligne à quatre instants différents : à  $t = 0$ , à  $t = 259.2$ , à  $t = 518.41$  et à  $t = 777.62$  avec pour paramètres de ligne  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ . Il y a un bon accord entre

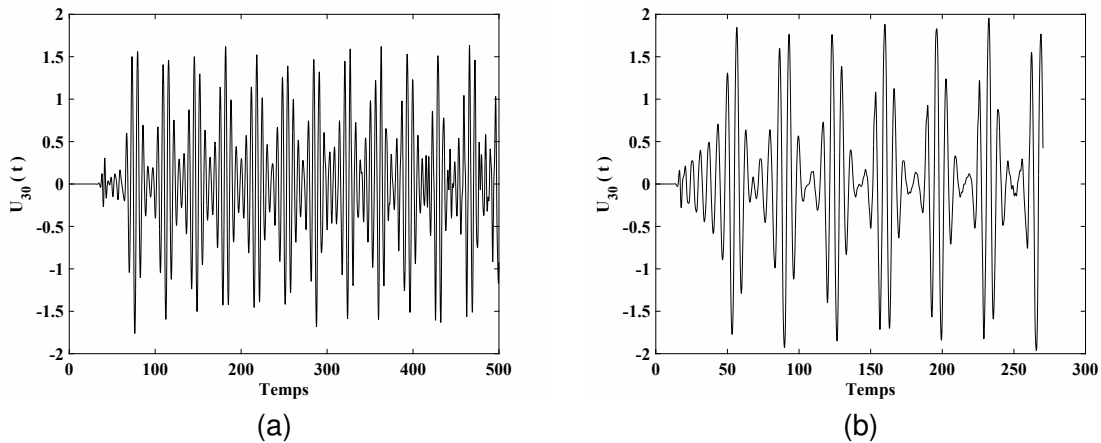


FIGURE 2.14 – Évolution temporelle de la cellule  $n = 30$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $a_0 = 1$ , pour 2.14(a)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ ,  $k = 0.1$  et pour 2.14(b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ ,  $k = 0.05$ .

l'expression théorique (2.41) obtenue par l'application de l'AQD et les simulations numériques réalisées à travers l'équation du modèle (2.40), en prenant l'expression théorique (2.41) comme conditions initiales.

Durant les précédentes simulations numériques, nous avons utilisé la solution théorique obtenue par application de l'AQD sur l'équation du modèle. Ainsi, pour le modèle représenté par l'équation (2.1), nous avons utilisé la solution théorique donnée à l'expression (2.36) et pour le modèle représenté par l'équation (2.40), nous avons utilisé la solution donnée à l'expression (2.41).

En considérant les paramètres suivants  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 0)$  et  $k = 0.85$  pour le modèle représenté par l'équation (2.1), les coefficients  $K_1$  et  $K_3$  de la solution théorique défini à l'expression (2.41) valent respectivement 0.0291 et  $-2.313 \cdot 10^{-07}$ , avec  $K_1$  donné à l'expression (2.43) et  $K_3$  à l'expression (2.44). Pour le modèle représenté par l'équation (2.40), en considérant les paramètres suivants  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ ,  $k = 0.25 \text{ Cell}^{-1}$ , les coefficients  $K_1$  et  $K_3$  de sa solution théorique valent respectivement 0.0625 et  $4.744 \cdot 10^{-04}$ .

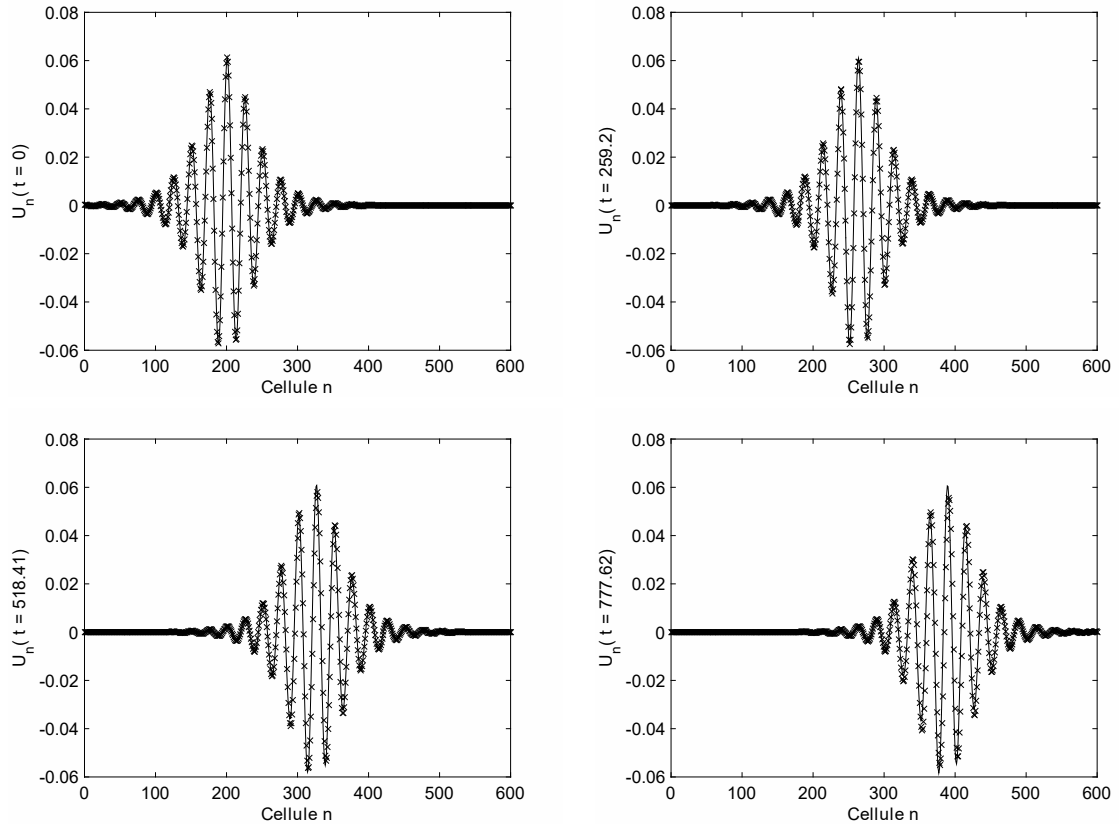


FIGURE 2.15 – Représentation spatiale de l'état de la ligne à quatre instants différents. Les instants choisis sont de gauche à droite et de haut en bas.  $t = 0$ ,  $t = 259.2$ ,  $t = 518.41$  et  $t = 777.62$ . Le profil de solution théorique, donné à l'expression (2.41), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (2.40) avec l'expression (2.41) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.001$ ,  $n_0 = 200$ ,  $N = 600$  cellules,  $k = 0.25 \text{ Cell}^{-1}$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ , et le pas d'intégration de l'équation différentielle est  $\Delta t = 0.01$ .

## 2.3/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons étudié des oscillations de la variable d'état  $U_n$  spatialement localisée dans un milieu de transmission discret modélisé par l'équation de Klein-Gordon d'ordre 3. D'un point de vue analytique, nous avons montré que le système d'équations non linéaires qui régit la physique de ce système peut être réduit à une équation de NLS classique facilement intégrable en fonction du signe du produit de ses coefficients de dispersion  $P$  et de non linéarité  $Q$ . En fonction du signe de ces deux paramètres ( $P$  et  $Q$ ), nous avons établi les conditions d'existence de l'instabilité modulationnelle dans le système.



# MODES NON LINÉAIRES DANS LE MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE

## Sommaire

---

<b>3.1 Introduction</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>3.2 Modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage linéaire pur</b> . . . . .	<b>38</b>
3.2.1 Modes localisés . . . . .	39
3.2.2 Influence du nombre d'onde $k$ sur l'instabilité modulationnelle . . . . .	41
3.2.3 Simulations numériques . . . . .	42
<b>3.3 Modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte</b> . . . . .	<b>45</b>
3.3.1 Modes localisés . . . . .	45
3.3.2 Influence du nombre d'onde $k$ sur l'instabilité modulationnelle dans le modèle à couplage symétrique . . . . .	46
3.3.3 Simulations numériques . . . . .	47
3.3.4 Modèle à couplages dissymétriques . . . . .	51
3.3.5 Simulations numériques . . . . .	52
<b>3.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>54</b>

---

## 3.1/ INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons analytiquement étudié des solutions spatialement localisées dans un milieu de transmission discret modélisé par l'équation de

Klein-Gordon d'ordre 3. Nous avons considéré deux cas de figure pour cette équation : l'équation de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage linéaire pur et l'équation de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte. Pour ces deux systèmes, nous avons montré qu'il existe, sous certaines conditions, le phénomène d'instabilité modulationnelle.

Dans ce chapitre, nous considèrerons un milieu de transmission discret modélisé cette fois ci, par l'équation de Klein-Gordon avec une nonlinéarité d'ordre 5. Nous étudierons deux cas de figure, comme dans le chapitre précédent, en commençant par l'étude d'un milieu gouverné par l'équation de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage linéaire pur. Ce modèle est celui dans lequel B. Bodo et *al.* [7, 8] ont montré l'existence du phénomène de supratransmission non linéaire induit par l'apport du bruit. Nous étudierons également le cas d'un milieu gouverné par l'équation de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte, qui est l'extension du modèle d'équation à couplage linéaire pur, dont le système expérimental a été réalisé au sein de notre laboratoire (LE2I) sous forme d'une ligne électrique Klein-Gordon.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude analytique du modèle de Klein-Gordon à couplage linéaire pur et la seconde partie est consacrée à l'étude du modèle à couplage mixte. Nous présenteront pour chacun de ces modèles, une solution analytique et les conditions d'existence du phénomène d'instabilité modulationnelle.

### 3.2/ MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE 5 À COUPLAGE LINÉAIRE PUR

Nous réaliserons une étude complète de ce modèle dans le cas sans amortissement ( $\gamma = 0$  dans l'équation (1.1)).

Le modèle d'équation de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage linéaire pur est celui pour lequel le coefficient de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  de l'équation (1.1) est nul. Ainsi l'équation caractéristique du modèle se réduit à

$$\frac{d^2 U_n}{dt^2} = \omega_L^2 (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) - \omega_0^2 f(U_n), \quad (3.1)$$

où  $f(U_n)$  est le polynôme d'ordre 5 défini par l'expression (1.3), soit  $f(U_n) = U_n - \frac{U_n^3}{3!} + \frac{U_n^5}{5!}$ .

L'expression théorique de la relation de dispersion s'obtient en considérant une solution onde plane de l'équation (3.1) en régime linéaire où la fonction  $f(U_n)$  est de la forme (1.5). Ainsi, en considérant une solution de l'équation (3.1) sous la forme :

$$U_n(t) = U_0 e^{i(kn - \omega t)} + c.c, \quad (3.2)$$

où  $c.c$  représente le complexe conjugué, on obtient la même relation de dispersion que pour le modèle de Klein-Gordon d'ordre 3, relation donnée à l'équation (2.3).

### 3.2.1/ MODES LOCALISÉS

Par application de la méthode à échelles multiples et l'AQD [18–21] , dont le détail des calculs est proposé à l'annexe C (en prenant  $\omega_{NL}^2 = 0$ ), on obtient la dynamique interne du modèle, caractérisée par la relation (3.3) suivante

$$U_n(t) = K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] e^{i(kn - (\omega - P\lambda_0)t)} \\ - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] e^{3i(kn - (\omega - P\lambda_0)t)} \\ + K_5 \operatorname{sech}^5 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] e^{5i(kn - (\omega - P\lambda_0)t)}, \quad (3.3)$$

avec

$$K_1 = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}}, \quad (3.4)$$

$$K_3 = \frac{\omega_0^2 \left( \frac{2\lambda_0 P}{Q} \right)^{\frac{3}{2}}}{12 \left[ 4\omega_0^2 + \omega_L^2 (8 - 9 \cos(k) + \cos(3k)) \right]}, \quad (3.5)$$

et

$$K_5 = \frac{\omega_0^2 \left( \frac{1}{5!} + \frac{\omega_0^2}{24 \left[ 4\omega_0^2 + \omega_L^2 (8 - 9 \cos(k) + \cos(3k)) \right]} \right) \left( \frac{2\lambda_0 P}{Q} \right)^{\frac{5}{2}}}{2 \left[ 12\omega_0^2 + \omega_L^2 (24 - 25 \cos(k) + \cos(5k)) \right]}. \quad (3.6)$$

Les paramètres de dispersion  $P$  et de non linéarité  $Q$  sont respectivement donnés par :

$$P = \frac{\omega_L^2 \cos(k) - \mu^2}{2\omega} \quad (3.7)$$

et

$$Q = \frac{\omega_0^2}{4\omega}, \quad (3.8)$$

avec  $\mu$  défini par la relation (2.15) ( $\mu = \frac{\omega_d^2 \sin(k)}{\omega}$ ), correspondant à la vitesse de groupe.

De la relation 3.3, nous déduisons la dynamique réelle du modèle suivante

$$\begin{aligned}
 U_n(t) = & K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos (kn - (\omega - P\lambda_0) t) \\
 & - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos [3 (kn - (\omega - P\lambda_0) t)] \\
 & + K_5 \operatorname{sech}^5 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos [5 (kn - (\omega - P\lambda_0) t)]. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Le profil de vitesse ( $V_n(t) = \frac{dU_n(t)}{dt}$ ) correspondant à cette dynamique réelle est :

$$\begin{aligned}
 V_n(t) = & \sqrt{\lambda_0} K_1 \mu \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \tanh \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos (kn - (\omega - P\lambda_0) t) \\
 & + K_1 (\omega - P\lambda_0) \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \sin (kn - (\omega - P\lambda_0) t) \\
 & - 3 \sqrt{\lambda_0} K_3 \mu \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \tanh \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos [3 (kn - (\omega - P\lambda_0) t)] \\
 & - 3 K_3 (\omega - P\lambda_0) \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \sin [3 (kn - (\omega - P\lambda_0) t)] \\
 & + 5 \sqrt{\lambda_0} K_5 \mu \operatorname{sech}^5 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \tanh \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos [5 (kn - (\omega - P\lambda_0) t)] \\
 & + 5 K_5 (\omega - P\lambda_0) \operatorname{sech}^5 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \sin [5 (kn - (\omega - P\lambda_0) t)]. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où le nombre d'ondes  $k$  est égal à zéro, c'est à dire là où nous avons la vitesse de groupe nulle, la dynamique interne du modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 est sous la forme :

$$\begin{aligned}
 U_n(t) = & K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0) \right] \cos (\Omega_0 t) - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0) \right] \cos (3\Omega_0 t) \\
 & + K_5 \operatorname{sech}^5 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0) \right] \cos (5\Omega_0 t), \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

où la pulsation  $\Omega_0$  est définie par :

$$\Omega_0 = \omega_0 \left( 1 - \frac{\lambda_0 \omega_d^2}{2 \omega_0^2} \right). \quad (3.12)$$

La pulsation  $\Omega_0$  étant inférieure à la pulsation  $\omega_0$ , elle se trouve donc en dehors du spectre de dispersion, c'est à dire dans la bande interdite, par conséquent le profil de solution donné à l'équation (3.11) représente les solitons de gap du système.



3.2.2/ INFLUENCE DU NOMBRE D'ONDE  $k$  SUR L'INSTABILITÉ MODULATIONNELLE

D'après les calculs de T. Dauxois et al/ rappelés à l'annexe B, lorsqu'on perturbe une solution onde plane, d'amplitude  $a_0$  et de pulsation  $\Omega$ , de l'équation de Schrödinger par des fonctions réelles  $b(x, t) = b_0 e^{i(\delta x - \nu t)} + cc$  et  $\theta(x, t) = \theta_0 e^{i(\delta x - \nu t)} + cc$ , il y a instabilité modulationnelle dans le système lorsque le paramètre  $(\nu')^2 = (\nu - 2Pk\delta)^2$  est négatif.  $\nu$  étant la pulsation de perturbation et  $\delta$  leur nombre d'onde. Ainsi, la région des nombres d'ondes de modulation, dans laquelle l'instabilité modulationnelle est possible, est limitée. Cette condition sera toujours vérifiée si et seulement si  $\delta^2 - \frac{2Q}{P}a_0^2$  est négatif (car d'après les calculs de T. Dauxois et al,  $(\nu - 2Pk\delta)^2 = P^2\delta^2(\delta^2 - \frac{2Q}{P}a_0^2)$ ). Ce qui n'est possible que si le produit  $PQ$  est positif et le nombre d'onde  $\delta$  inférieur à  $a_0 \sqrt{\frac{2Q}{P}}$ . En représentant donc

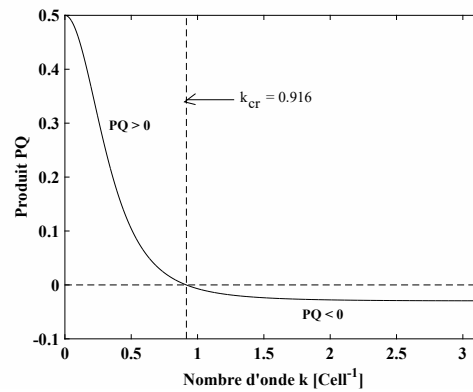


FIGURE 3.1 – Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  donné à l'équation (3.7) et le paramètre de dispersion  $Q$  donné à l'équation (3.8) en fonction du nombre d'onde  $k$ . Paramètres :  $\omega_L^2 = 4$  et  $\omega_0^2 = 1$ .

l'évolution du produit  $PQ$  suivant le nombre d'onde  $k$ , la figure 3.1 nous montre clairement les deux intervalles des valeurs de  $k$  suivant le signe du produit  $PQ$  :  $PQ$  est négatif pour  $k > k_{cr} = 0.916$ , ce qui a pour conséquence l'absence du phénomène d'instabilité modulationnelle dans le système. Par contre, le produit  $PQ$  est positif pour des valeurs du nombre d'onde comprises dans l'intervalle  $[0, k_{cr}[$ . Pour que le phénomène d'instabilité modulationnelle existe, il est nécessaire que le produit  $PQ$  soit positif, mais il faut aussi que le paramètre  $(\nu')^2$  soit négatif. C'est ainsi qu'il est possible de montrer que l'intervalle  $[0, k_{cr}[$  se décompose en deux (2) sous intervalles, l'un permettant l'observation du phénomène de l'instabilité modulationnelle  $[0, k^* = 0.683[$  ( $k^*$  correspond à la valeur du nombre d'onde  $k$  à partir de laquelle, quel que soit la valeur du nombre d'onde de perturbation  $\delta$ , le paramètre  $(\nu')^2$  est négatif) quel que soient les valeurs du nombre d'onde

de la perturbation  $\delta$  (figure 3.2(a)), l'autre intervalle ( $[k^*, k_{cr}]$ ) permettant l'observation du phénomène suivant une gamme de nombre d'onde  $\delta$  (figure 3.2(b)).

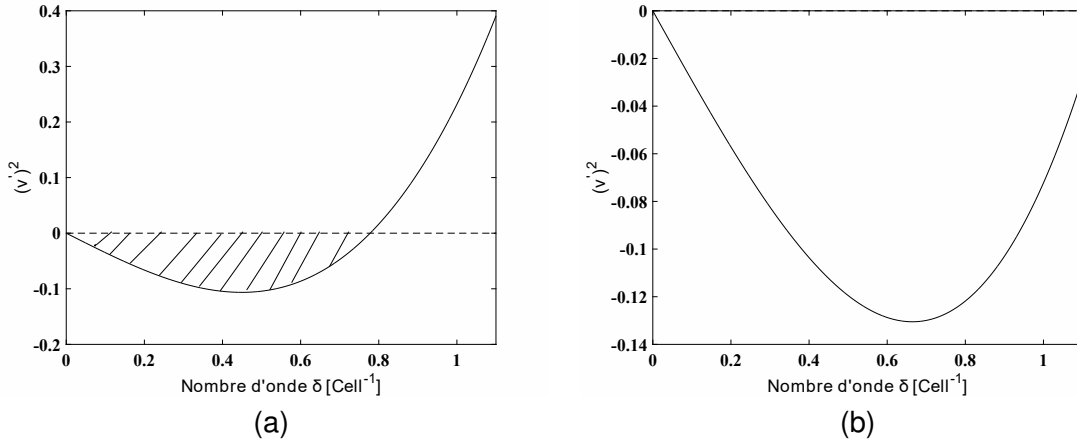


FIGURE 3.2 – Représentation de  $(v')^2$  en fonction des perturbations pour deux valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$  de l'enveloppe. (a)  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$ , (b)  $k = 0.7 \text{ Cell}^{-1}$ . Les paramètres sont :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega_L^2 = 4$  et l'amplitude de la perturbation est  $a_0 = 1$ .

Le paragraphe suivant nous permettra de confirmer les résultats théoriques obtenus précédemment à travers des simulations numériques.

### 3.2.3/ SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Dans cette section, nous examinons les résultats analytiques obtenus à la section précédente et réalisons les simulations numériques de l'équation (3.1). Prenant les solutions analytiques données par l'expression (3.9) comme conditions initiales, nous réalisons l'intégration numérique de l'équation (3.1), à l'aide de la méthode de Runge – Kutta de quatrième ordre. Cette intégration numérique est réalisée jusqu'à un temps  $T_{MAX}$ , qui fixe le nombre d'itérations.  $N$  représente le nombre de cellules élémentaires du réseau initialement excité à la cellule  $n_0$ .

En tenant compte des intervalles du nombre d'onde  $k$  où on observe de l'instabilité modulationnelle dans le milieu, c'est à dire l'intervalle où l'équation de NLS admet des solutions solitons (produit  $PQ$  positif), des simulations numériques du réseau ont été réalisées à travers l'équation (3.1), en prenant les conditions initiales définies par les expressions (3.9) et (3.10) pour lesquelles  $t = 0$ . En considérant les paramètres suivants  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 0)$ ,  $k = 0.5$  et  $\lambda_0 = 0.003$ , ce qui induit  $\mu = 1.3631$ ,  $P = 0.5872$  et  $Q = 0.1777$ , les coefficients  $K_1$ ,  $K_3$  et  $K_5$  de la solution théorique définis à l'équation (3.9) valent res-

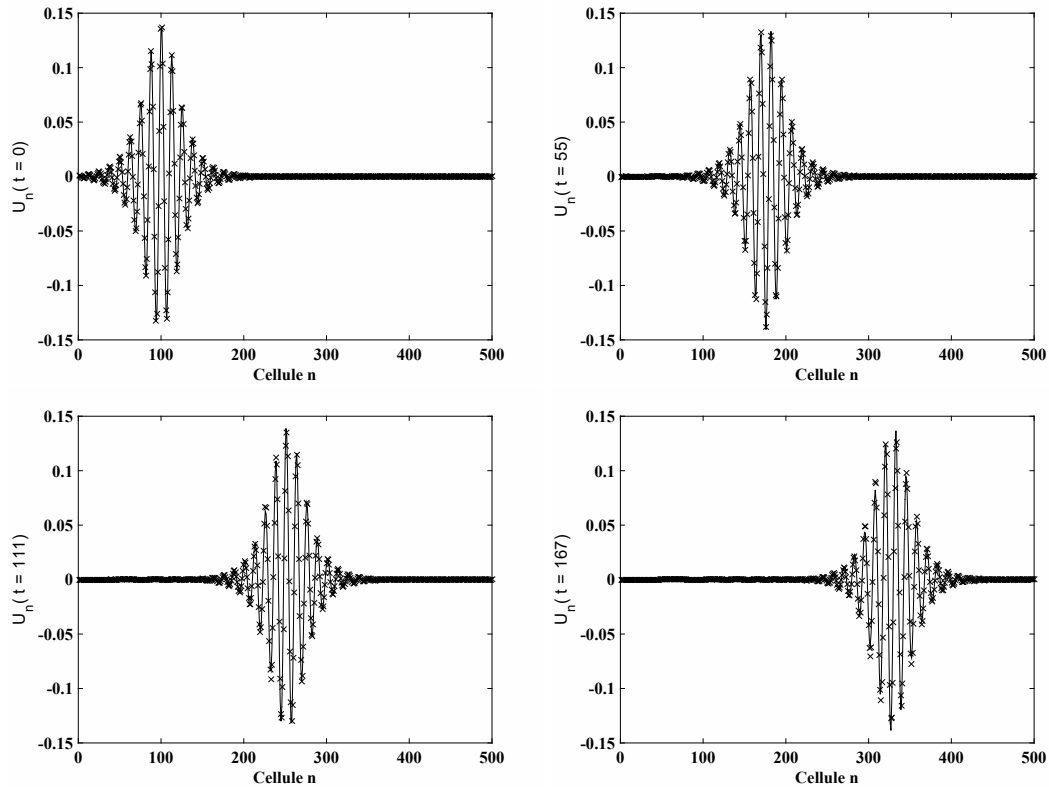


FIGURE 3.3 – État de la ligne à quatre instants différents.  $t = 0$ ,  $t = 55$ ,  $t = 111$  et  $t = 167$ . Le profil de solution théorique, donné par l'expression (3.9), est représenté en trait plein et les croix représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (3.1) avec l'expression (3.9) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_L^2 = 4$ ,  $\omega_0^2 = 1$ , taille du réseau  $N = 500$  Cellules,  $n_0 = 100$ ,  $\lambda_0 = 0.003$ ,  $k = 0.5$  et  $\Delta t = 0.01$ .

pectivement  $0.1408$ ,  $4.9610 \cdot 10^{-05}$  et  $1.3539 \cdot 10^{-08}$ . Ainsi, la figure 3.3 présente l'état de la ligne à quatre instants différents : à  $t = 0$ , à  $t = 55$ , à  $t = 111$  et à  $t = 167$ . On remarque un bon accord entre les résultats théoriques et les simulations numériques. Par conséquent, l'expression (3.9) est une solution de l'équation (3.1).

Notre intérêt se concentrant également sur le point particulier de la courbe de dispersion linéaire où le nombre d'ondes de la porteuse  $k$  est nul, là où nous avons la vitesse de groupe nulle comme indiqué plus haut, des simulations numériques ont également été réalisées dans ce cas de figure. Ainsi, en prenant les solutions analytiques données par l'expression (3.11) comme conditions initiales, nous avons réalisé l'intégration numérique de l'équation (3.1), à l'aide de la méthode de Runge – Kutta de quatrième ordre. Le réseau de Klein-Gordon d'ordre 5 modélisée par l'équation (3.1) est numériquement excitée avec le profil de solution donné par l'expression (3.11) à la cellule  $n_0 = 250$ . La pulsation de battements théorique  $\Omega_{0,theo}$  calculée grâce à l'expression (3.12)

vaut 0.994. La pulsation de battements  $\Omega_{0,simul}$  obtenue après simulations numériques de l'équation (3.1) avec l'expression (3.11) prise comme conditions initiales est égale à 0.99995. On peut constater que les deux valeurs de pulsations de battements sont très proches puisque l'écart avec la valeur théorique est de 0.6%. La figure 3.4 illustre l'état du

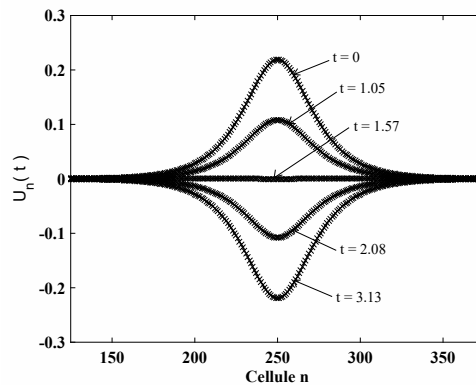


FIGURE 3.4 – État du réseau en quelques instants différents. Les croix sont obtenues par simulations numériques de l'intégration de l'équation de Klein-Gordon d'ordre 5 (3.1) en utilisant l'expression théorique (3.11) comme conditions initiales, représentée quant à elle en trait plein. Paramètres :  $\omega_L^2 = 4$ ,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $N = 500$  Cellules,  $n_0 = 250$ ,  $\lambda_0 = 0.003$  et  $k = 0$ .

réseau à des instants différents. On peut voir qu'au cours des oscillations, les amplitudes maximale et minimale sont conservées, et que les résultats théoriques (représentés en trait plein), sont en parfait accord avec les résultats issus de l'intégration numérique de l'équation (3.1) (représentés par des croix) à la première demi période. Ainsi, l'expression (3.11) représente une solution "soliton de gap" du système (3.1).

Nous avons réalisé une étude théorique sur le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage linéaire pur, modèle dans lequel nous avons déterminé une solution analytique à l'intérieur et en dehors de la bande passante. Nous avons également déterminé les conditions d'existence du phénomène d'instabilité modulationnelle. Le paragraphe suivant nous permettra de réaliser les mêmes études dans le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte, c'est à dire le système précédent dans lequel on rajoute un couplage non linéaire.

### 3.3/ MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE 5 À COUPLAGE MIXTE

Le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte est celui pour lequel le coefficient de couplage linéaire pur  $\omega_L^2$  et le coefficient de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  de l'équation (1.1) sont tous les deux non nuls, la fonction  $f(U_n)$  étant défini par l'expression (1.3).

#### 3.3.1/ MODES LOCALISÉS

L'application de la méthode à échelles multiples et l'AQD [18–21], dont le détail des calculs est donné à l'annexe B, conduit à l'obtention de la dynamique interne du modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte caractérisé par l'équation (3.13) suivante, tout à fait semblable à l'équation 3.9

$$U_n(t) = K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos (kn - (\omega - P\lambda_0) t) \\ - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos [3 (kn - (\omega - P\lambda_0) t)] \\ + K_5 \operatorname{sech}^5 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos [5 (kn - (\omega - P\lambda_0) t)], \quad (3.13)$$

mais dans laquelle les coefficients  $K_1$ ,  $K_3$ , et  $K_5$  sont maintenant définis par

$$K_1 = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}}, \quad (3.14)$$

$$K_3 = \frac{\frac{\omega_0^2}{3!} + 2\omega_{NL}^2 (\cos(3k) - 3 \cos(2k) + \cos(k) - 1)}{2 [4\omega_0^2 + \omega_L^2 (8 - 9 \cos(k) + \cos(3k))]} K_1^3 \quad (3.15)$$

et

$$K_5 = \frac{\left(\frac{2\lambda_0 P}{Q}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{\omega_0^2}{5!} - 10\omega_{NL}^2 K_1^2 K_3 [(\cos(5k) - 2 \cos(4k) + \cos(3k) - \cos(2k) + 2 \cos(k) - 1)]}{24\omega_0^2 + 2\omega_L^2 [24 - 25 \cos(k) + \cos(5k)]}. \quad (3.16)$$

Si le paramètre de dispersion  $P$  reste inchangé et s'inspire de la relation (3.7), le terme de non linéarité  $Q$  s'exprime par

$$Q = \frac{\omega_0^2}{4\omega} + \frac{\omega_{NL}^2}{\omega} (12 \cos(2k) - 3 \cos(k) - 9). \quad (3.17)$$

La suite de ce chapitre traitera des conditions d'existence du phénomène d'instabilité modulationnelle dans le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte. À cet effet, nous distinguerons deux cas de figure : le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte symétrique et le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte dissymétrique.

### 3.3.2/ INFLUENCE DU NOMBRE D'ONDE $k$ SUR L'INSTABILITÉ MODULATIONNELLE DANS LE MODÈLE À COUPLAGE SYMÉTRIQUE

Dans ce modèle, le coefficient de couplage linéaire pur  $\omega_L^2$  et le coefficient de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  ont la même valeur. Nous verrons deux cas particuliers : le cas où  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et le cas où  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ .

La figure 3.5 présente l'évolution du produit  $PQ$  en fonction du nombre d'onde  $k$  pour deux valeurs de coefficients de couplages différents : (a) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et (b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ .

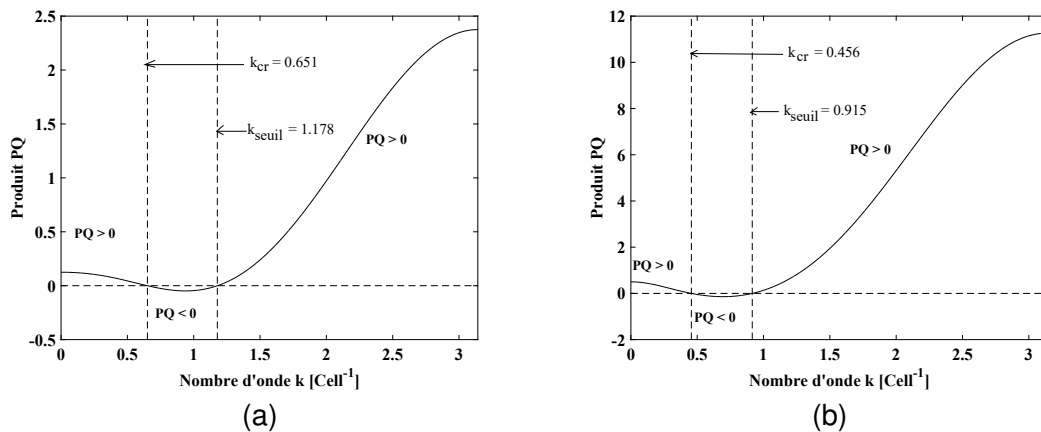


FIGURE 3.5 – Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  donné par l'équation (3.7) et le paramètre de dispersion  $Q$  donné par l'équation (3.17) en fonction du nombre d'onde  $k$ , pour deux valeurs de couplage différentes. (a) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et (b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ .

Les figures 3.5(a) et 3.5(b) montrent clairement trois intervalles de valeurs du nombre d'onde  $k$  pour lesquels le produit  $PQ$  est soit positif, soit négatif. En effet, pour l'intervalle  $[0, k_{cr}[$ , le produit  $PQ$  est positif comme le montre les figures 3.5(a) et 3.5(b). En prenant une valeur du nombre d'onde  $k$  dans cet intervalle (soit  $k =$ ), les figures 3.6(a) (obtenue pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$ ) et 3.6(d) (obtenue pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ ), présentant

l'évolution du paramètre  $(\nu')^2$  en fonction du nombre d'onde  $\delta$  de perturbation, montrent que le paramètre  $(\nu')^2$  est négatif (partie hachurée) pour une gamme de nombre d'onde  $\delta$ , ce qui prouve l'existence du phénomène d'instabilité modulationnelle dans la zone en question. Pour l'intervalle  $[k_{cr}, k_{seuil}[$ , le produit  $PQ$  est négatif et pour  $k > k_{seuil}$ , le produit  $PQ$  est à nouveau positif. En prenant une valeur du nombre d'onde  $k$  dans ces deux intervalles, les figures 3.6(b) et 3.6(c) (obtenues pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$ ) et les figures 3.6(e) et 3.6(f) (obtenues pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ ) montrent clairement que, quelle que soit la valeur du nombre d'onde  $\delta$  de perturbation, le paramètre  $(\nu')^2$  sera toujours positif, ce qui entraîne l'inexistence du phénomène d'instabilité modulationnelle.

Le paragraphe suivant nous permettra de confirmer les résultats théoriques obtenus ci-dessus à travers des simulations numériques.

### 3.3.3/ SIMULATIONS NUMÉRIQUES

La figure 3.7 présente l'évolution temporelle de la cellule  $n = 30$  pour les deux cas symétriques présentés ci-dessus lorsque le système est excité en entrée par le signal sinusoïdal représenté à la figure 2.5 et d'amplitude  $A = 1V$ . De manière prévisible, dans les deux cas, il y a auto modulation d'amplitude pour une gamme de nombres d'onde  $k$  comprise entre 0 et  $k_{cr}$ , correspondant à la valeur critique en desa de laquelle le produit entre le paramètre de dispersion  $P$  et de non linéarité  $Q$  de l'équation de NLS est positif comme on le voit aux figures 3.5(a) et 3.5(b). Ce qui confirme là l'existence du phénomène d'instabilité modulationnelle conformément au paragraphe précédent.

Les figures 3.8 et 3.9 qui suivent, présentent l'état de la ligne à quatre instants différents :  $t = 0$ ,  $t = 211$ ,  $t = 422$ , et  $t = 634$  pour la figure 3.8, avec pour paramètres de réseau  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$ , et  $t = 0$ ,  $t = 55$ ,  $t = 111$ , et  $t = 167$  pour la figure 3.9, avec pour paramètres de ligne  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ . Il y a un bon accord entre l'expression théorique (3.13) obtenue par l'application de l'AQD et les simulations numériques réalisées à travers l'équation du modèle (1.1) en prenant l'expression théorique (3.13) comme conditions initiales. Donc l'expression (3.13) représente bien la dynamique interne du système d'équations (1.1).

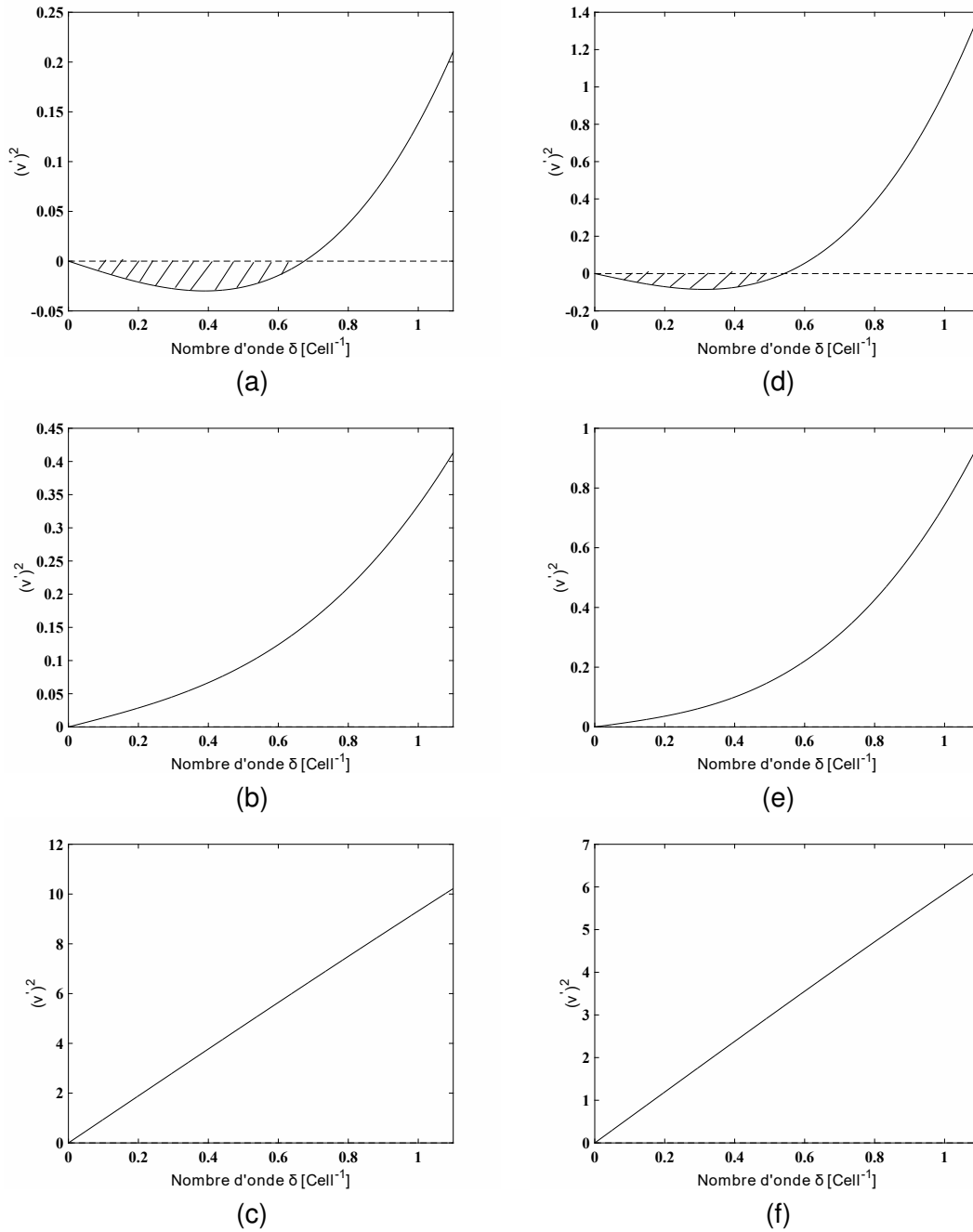


FIGURE 3.6 – Représentation de  $(v')^2$  en fonction des perturbations pour trois valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$  pour chacun des deux valeurs de couplages spécifiques étudiées. À la colonne de gauche,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et celle de droite  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ . Les trois valeurs du nombre d'onde  $k$ , pour le couplage spécifique  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  représenté à la colonne de gauche, sont de haut en bas (a)  $k = 0.6 \text{ Cell}^{-1}$ , (b)  $k = 0.7 \text{ Cell}^{-1}$ , (c)  $k = 1.8 \text{ Cell}^{-1}$ , et pour le couplage spécifique  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$  représenté à la colonne de droite (d)  $k = 0.25 \text{ Cell}^{-1}$ , (e)  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$  et (f)  $k = 1.8 \text{ Cell}^{-1}$ . Les paramètres du réseau sont :  $\omega_0^2 = 1$  et  $a_0 = 1$ .



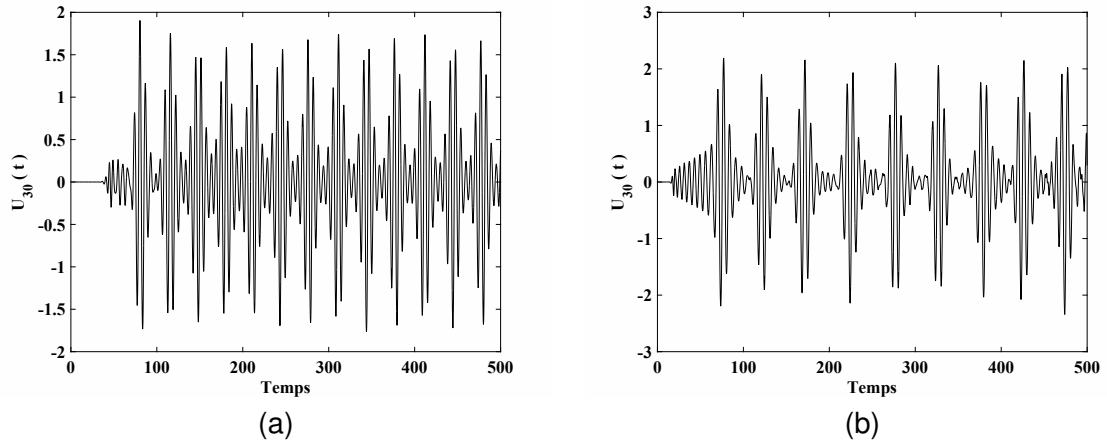


FIGURE 3.7 – Évolution temporelle de la cellule  $n = 30$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $a_0 = 1$ , pour 3.7(a)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$ ,  $k = 0.5$  et pour 3.7(b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ ,  $k = 0.05$ .

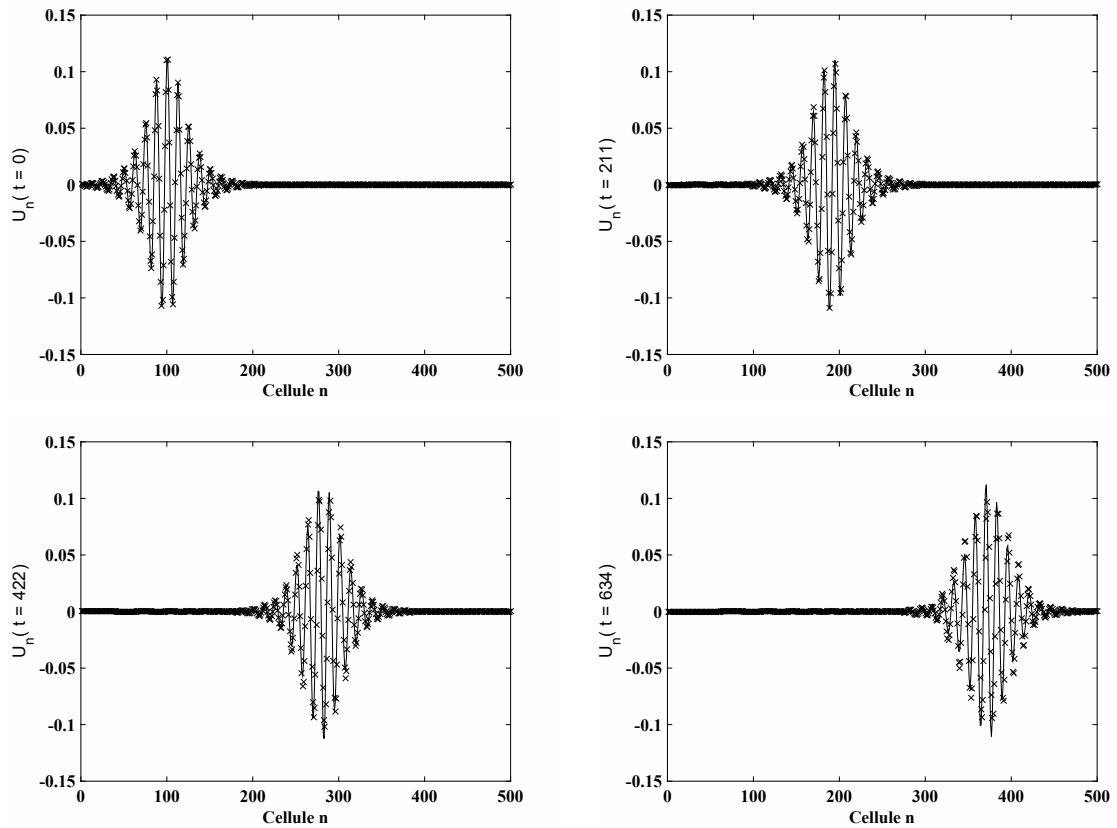


FIGURE 3.8 – État de la ligne à quatre instants différents :  $t = 0$ ,  $t = 211$ ,  $t = 422$  et  $t = 634$ . Le profil de la solution théorique, donnée à l'expression (3.13), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (1.1) avec l'expression (3.13) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.003$ ,  $n_0 = 100$ ,  $N = 500$  cellules,  $k = 0.5$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et  $\Delta t = 0.01$ .

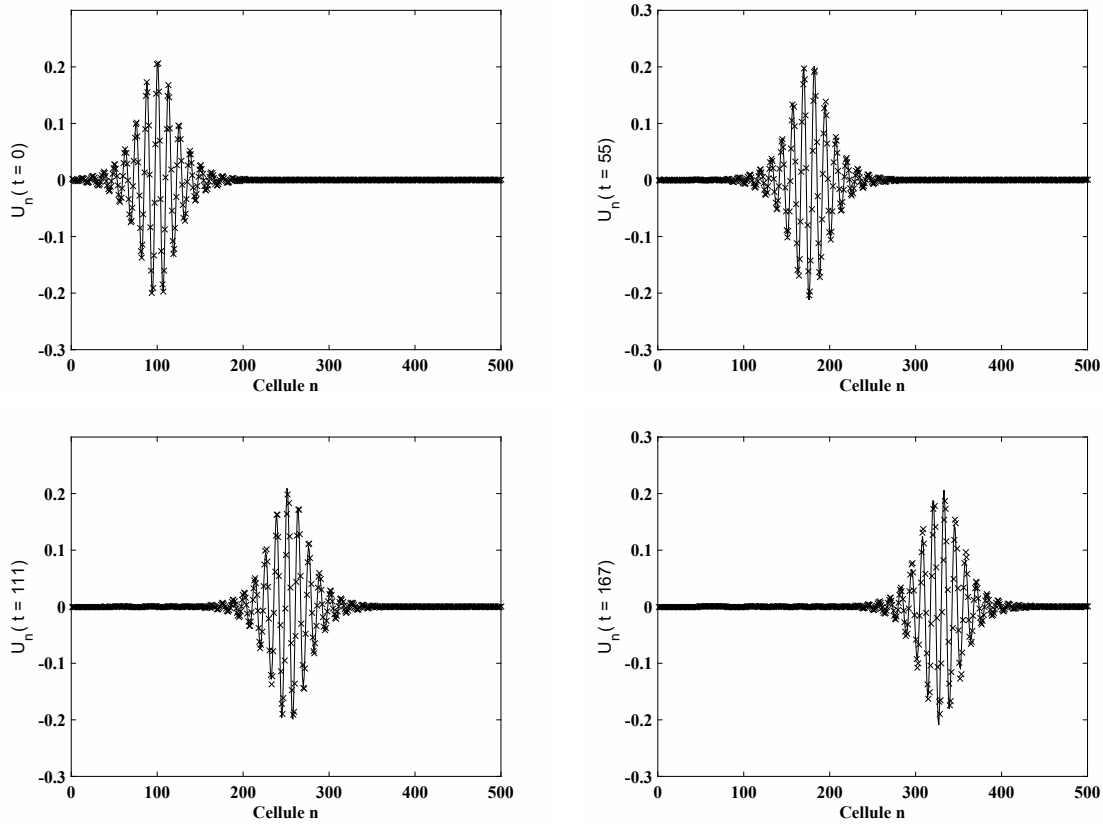


FIGURE 3.9 – État de la ligne à quatre instants différents :  $t = 0$ ,  $t = 55$ ,  $t = 111$  et  $t = 167$ . Le profil de la solution théorique, donnée à l'expression (3.13), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (1.1) avec l'expression (3.13) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.003$ ,  $n_0 = 100$ ,  $N = 500$  cellules,  $k = 0.5$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$  et  $\Delta t = 0.01$ .

En considérant les paramètres suivants  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et  $k = 0.5$ , les coefficients  $K_1$ ,  $K_3$  et  $K_5$  (avec  $K_1$  défini à l'expression (3.14),  $K_3$  à l'expression (3.15) et  $K_5$  à l'expression (3.16)) de la solution théorique défini à l'équation (3.13) valent respectivement  $0.0206$ ,  $-3.3292 \cdot 10^{-06}$  et  $1.6990 \cdot 10^{-10}$ . Aussi, pour les paramètres suivants  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$  et  $k = 0.5$ , ces coefficients valent  $0.0156$ ,  $-5.3572 \cdot 10^{-06}$  et  $4.8553 \cdot 10^{-10}$  respectivement.

## 3.3.4/ MODÈLE À COUPLAGES DISSYMMÉTRIQUES

Le modèle à couplages dissymétriques correspond à celui où le coefficient de couplage linéaire pur  $\omega_L^2$  et le coefficient de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  n'ont pas la même valeur. Nous verrons deux cas particuliers : le cas où  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et le cas où  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ . Pour ces deux cas particuliers, nous présentons à la figure 3.10 l'évolution du produit  $PQ$ , en 3.10(a) pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et en 3.10(b) pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ . Pour les deux cas étudiés, nous remarquons tout de suite les trois intervalles du nombre d'onde  $k$  par rapport au signe du produit  $PQ$ . Ainsi, pour  $k \in [0, k_{cr}[$ , le produit  $PQ$  est positif. En prenant une valeur du nombre d'onde  $k$  dans cet intervalle, les figures 3.11(a) (obtenue pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ ) et 3.12(a) (obtenue pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ ), représentant l'évolution du paramètre  $(v')^2$  en fonction du nombre d'onde  $\delta$  de perturbation, nous montrent clairement que le paramètre  $(v')^2$  est négatif pour une gamme de nombre d'onde  $\delta$  (partie hachurée), entraînant l'existence du phénomène de l'instabilité modulationnelle. Lorsque le nombre d'onde  $k$  est compris dans l'intervalle  $[k_{cr}, k_{seuil}[$ , le produit  $PQ$  est négatif, et lorsque  $k > k_{seuil}$ , le produit  $PQ$  est positif. En choisissant une valeur de  $k$  dans ces deux intervalles, l'évolution du paramètre  $(v')^2$  en fonction du nombre d'onde  $\delta$  de perturbation représentée aux figures 3.11(b) (pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ ) et 3.12(b) (pour  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ ) nous montre qu'il est positif quel que soit le nombre d'onde  $\delta$ . Ceci entraîne donc l'absence de l'instabilité modulationnelle dans le domaine en question.

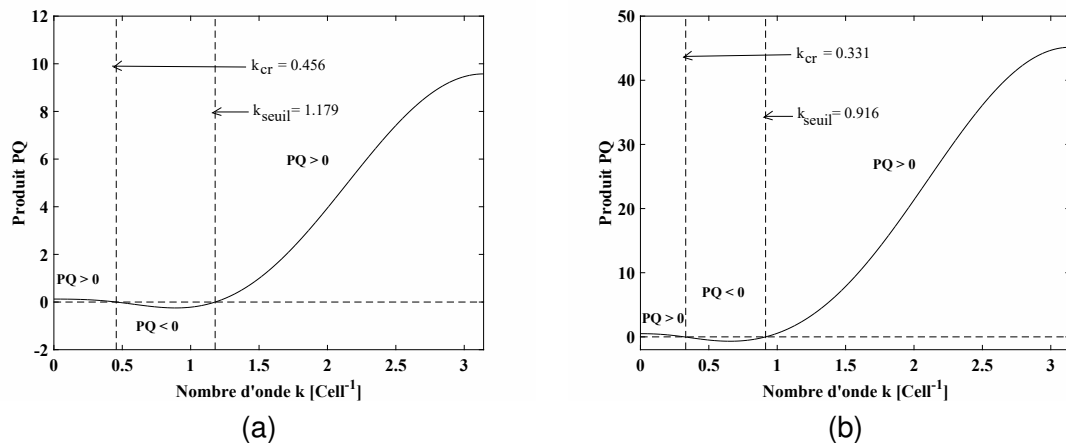


FIGURE 3.10 – Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  donné à l'équation (3.7) et le paramètre de dispersion  $Q$  donné à l'équation (3.17) en fonction du nombre d'onde  $k$  pour deux jeux de couplages différents. (a) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et (b) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ .

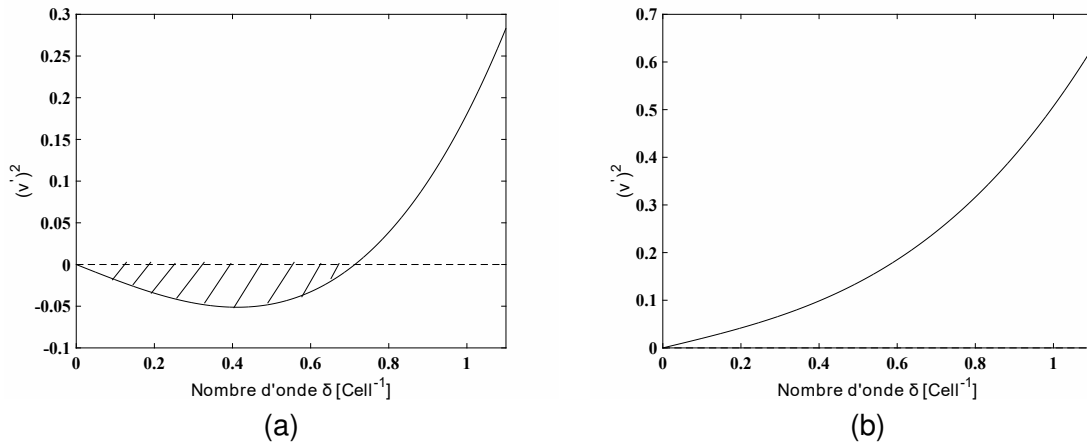


FIGURE 3.11 – Représentation de  $(v')^2$  en fonction des perturbations pour deux valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$ . (a)  $k = 0.4$  Cell $^{-1}$  et (b)  $k = 0.5$  Cell $^{-1}$ . Les paramètres sont :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et l'amplitude de la perturbation est  $a_0 = 1$ .

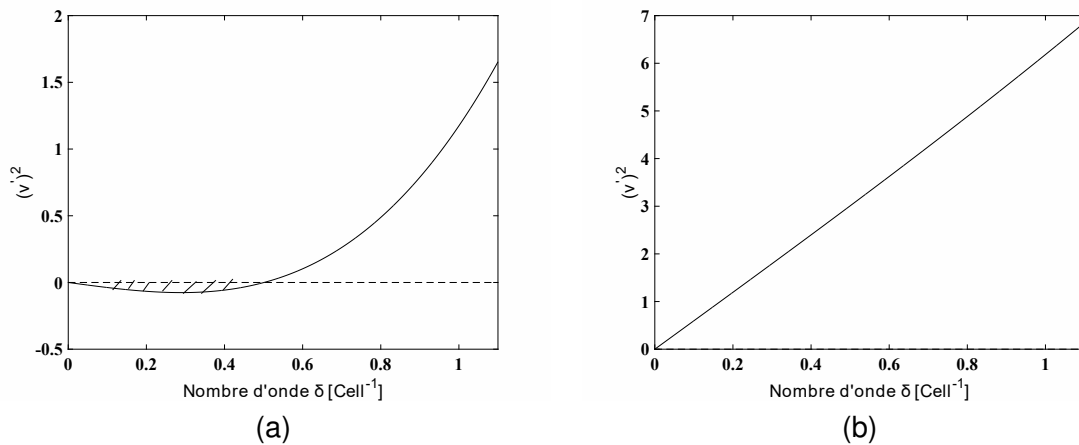


FIGURE 3.12 – Représentation de  $(v')^2$  en fonction des perturbations pour deux valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$ . (a)  $k = 0.2$  Cell $^{-1}$  et (b)  $k = 0.5$  Cell $^{-1}$ . Les paramètres sont :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$  et l'amplitude de la perturbation est  $a_0 = 1$ .

### 3.3.5/ SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Ce paragraphe nous permet de vérifier et de confirmer les résultats théoriques du modèle à couplages dissymétriques via des simulations numériques.

La figure 3.13 présente l'évolution temporelle de la cellule  $n = 30$  pour les deux cas dissymétriques présentés ci-dessus, lorsque le système est excité en entrée par le signal sinusoïdal représenté à la figure 2.5. De manière prévisible, il y a auto modulation d'amplitude pour une gamme de nombres d'onde  $k$  compris entre 0 et  $k_{cr}$  : C'est le phénomène d'instabilité modulationnelle.

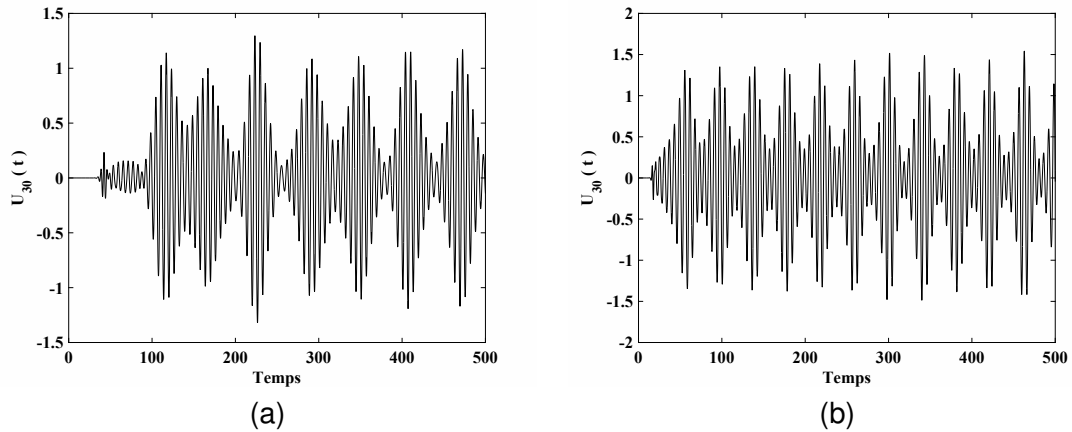


FIGURE 3.13 – Évolution temporelle de la cellule  $n = 30$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $a_0 = 1$ , pour 3.13(a)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ ,  $k = 0.13$  et pour 3.13(b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ ,  $k = 0.16$ .

La figure 3.14 présente l'état de la ligne à quatre instants différents :  $t = 0$ ,  $t = 219$ ,  $t = 438$ , et  $t = 657$  avec, pour paramètres de réseau,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ . Il y a un bon accord entre l'expression théorique (3.13) obtenue par l'application de l'AQD et les simulations numériques réalisées à travers l'équation du modèle (1.1) en prenant l'expression théorique (3.13) comme conditions initiales.

En considérant les paramètres suivants  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 0)$  et  $k = 0.5$  pour le modèle de Klein-Gordon à couplage linéaire pur caractérisé par l'équation (3.1), les coefficients  $K_1$ ,  $K_3$  et  $K_5$  de la solution théorique défini à l'expression (3.9) valent respectivement  $0.1408$ ,  $4.961 \cdot 10^{-05}$  et  $3.393 \cdot 10^{-07}$ , avec  $K_1$  donné à l'expression (3.4),  $K_3$  défini par (3.5) et  $K_5$  par (3.6).

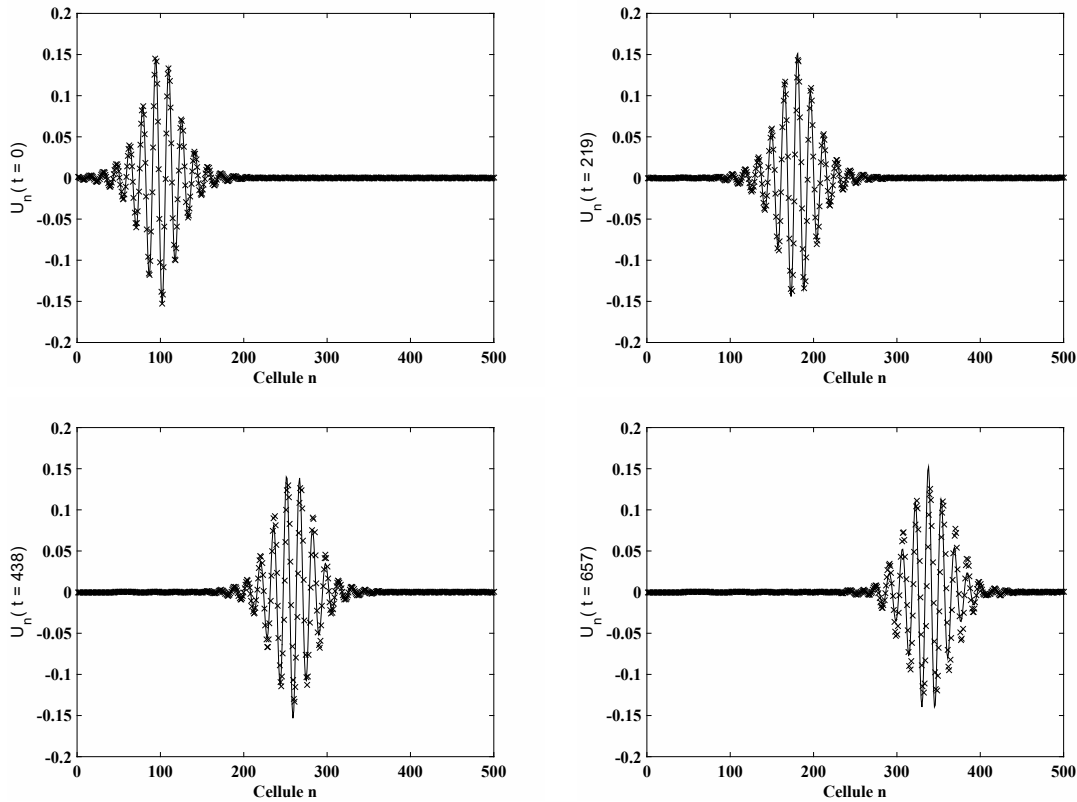


FIGURE 3.14 – État de la ligne à quatre instants différents :  $t = 0$ ,  $t = 219$ ,  $t = 438$  et  $t = 657$ . Le profil de la solution théorique, donnée à l'expression (3.13), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (1.1) avec l'expression (3.13) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.003$ ,  $n_0 = 100$ ,  $N = 500$  cellules,  $k = 0.4$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et  $dt = 0.01$ .

### 3.4/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons étudié des oscillations de la dynamique interne, spatialement localisées, dans un milieu gouverné par l'équation de Klein-Gordon d'ordre 5. Dans un premier temps, nous avons considéré ce modèle avec un couplage linéaire pur, avant de considérer le cas d'un couplage mixte symétrique et enfin le cas d'un couplage mixte asymétrique. D'un point de vue analytique, nous avons montré que le système d'équations non linéaires qui régit la physique d'un tel milieu peut être réduit à une équation de NLS classique facilement intégrable en fonction du signe du produit de ses coefficients de dispersion  $P$  et de non linéarité  $Q$ . Nous avons enfin pu montrer que, dans ce milieu, il peut exister le phénomène d'instabilité modulationnelle suivant certaines conditions.

Nous pouvons également conclure que, en observant les expressions des solu-

tions (2.39) et (2.41) obtenues dans le chapitre précédent lors de l'étude du modèle de Klein-Gordon d'ordre 3, et les expressions des solutions (3.9) et (3.13) obtenues dans ce chapitre en ce qui concerne le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5, on peut finalement constater que toutes ces formules ont exactement la même forme et la même structure. Ceci pourrait permettre d'extrapoler sur la solution du système de Klein-Gordon d'ordre  $n$  quelconque en considérant cette forme de solution, en l'injectant dans l'équation caractéristique du système de Klein-Gordon considéré puis en résolvant ordre par ordre.







PHÉNOMÈNE DE SUPRATRANSMISSION NON  
LINÉAIRE



# SUPRATRANSMISSION DANS LE MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE

## Sommaire

---

<b>4.1 Introduction</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>4.2 Modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage linéaire pur</b> . . . . .	<b>60</b>
4.2.1 Mise en évidence du phénomène de supratransmission . . . . .	63
4.2.2 Simulations numériques . . . . .	65
4.2.3 Seuil de supratransmission . . . . .	69
<b>4.3 Modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>4.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>78</b>

---

## 4.1/ INTRODUCTION

Le modèle d'équation non linéaire de Klein-Gordon d'ordre 5 dérive de l'équation de sine-Gordon [7, 16] dans le cas des petites amplitudes, mais suffisantes pour ne pas se ramener au cas linéaire. Dans ce chapitre, ce modèle sera considéré avec un couplage mixte, c'est à dire un couplage linéaire pur associé à un couplage non linéaire. Nous nous proposons de montrer que dans un tel milieu, en régime déterministe et sous certaines conditions, il peut se créer le phénomène de supratransmission non linéaire dans sa bande interdite. Le phénomène de supratransmission se manifeste par un changement de comportement de la réponse du système par rapport à la fois à l'amplitude  $A$  et à la

pulsation  $\omega$  du signal excitateur. En effet, pour une pulsation fixe choisie dans la bande interdite, et pour une onde excitatrice de faible amplitude, la réponse du système présente un profil évanescent. Toutefois, si l'amplitude de l'onde excitatrice dépasse un certain seuil, le système transmet de l'énergie via le déclenchement de modes non linéaires de forte amplitude. Nous montrerons également l'effet de la variation de la valeur du coefficient du couplage non linéaire sur l'amplitude seuil du signal excitateur nécessaire pour déclencher le phénomène de supratransmission non linéaire dans le milieu lorsque la valeur du coefficient du couplage linéaire pur est donnée et fixée.

Dans un premier temps, notre étude sera basée sur le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage linéaire pur, ensuite sur le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte.

## 4.2/ MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE 5 À COUPLAGE LINÉAIRE PUR

Le modèle de réseau non linéaire dit de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage linéaire pur est caractérisé par l'équation (1.1) avec la fonction  $f(U_n)$  défini à l'expression (1.3) et le coefficient du couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  pris égal à zéro. Ainsi l'équation caractérisant le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage linéaire pur est telle que :

$$\frac{d^2 U_n}{dt^2} + \gamma \frac{dU_n}{dt} - \omega_L^2 (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + \omega_0^2 \left( U_n - \frac{U_n^3}{3!} + \frac{U_n^5}{5!} \right) = 0. \quad (4.1)$$

L'amortissement  $\gamma$  est pris ici constant pour toutes les cellules et reste invariable spatialement et temporellement. L'étude de ce modèle nous servira de référence pour observer l'impact de l'addition du couplage non linéaire.

Les expressions théoriques de la relation de dispersion et de l'amortissement sont obtenues en considérant une solution onde plane, dans l'équation (4.1), de la forme

$$U_n(t) = U_0 e^{i(\beta n - \omega t)} + U_0 e^{-i(\beta n - \omega t)}, \quad (4.2)$$

où  $\beta$  est un nombre d'onde complexe qui peut être pris sous la forme suivante

$$\beta(\omega) = k(\omega) + j\alpha(\omega). \quad (4.3)$$

Dans l'expression (4.3),  $k$  correspond à la dispersion et  $\alpha$  à l'amortissement. En substituant l'onde plane définie par l'expression (4.2) dans l'équation (4.1) et en considérant l'approximation linéaire, on obtient

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_L^2} = j \frac{\omega\gamma}{2\omega_L^2} + \cos(k) \cosh(\alpha) - j \sin(k) \sinh(\alpha) - 1. \quad (4.4)$$

Par identification de la partie réelle et imaginaire de l'équation (4.4), on a

$$\begin{cases} 1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_L^2} = \cos(k) \cosh(\alpha) \\ \frac{\omega\gamma}{2\omega_L^2} = \sin(k) \sinh(\alpha) \end{cases}. \quad (4.5)$$

Dans la présente étude, nous nous restreignons au cas des faibles valeurs de l'amortissement  $\alpha$  (soit  $\alpha \rightarrow 0$ ). Ainsi, nous pouvons effectuer des approximations telles que  $\cosh(\alpha) \approx 1$  et  $\sinh(\alpha) \approx \alpha$ . En tenant compte de ces approximations dans le système (4.5), nous obtenons l'expression théorique de la relation de dispersion suivante

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\omega_L^2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right), \quad (4.6)$$

où  $\omega$  est la pulsation des ondes linéaires et  $k$  leur nombre d'onde. Le spectre linéaire correspondant est limité par la pulsation de coupure haute  $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 + 4\omega_L^2}$ . La figure 4.1 présente un cas particulier pour lequel nous avons fixé le coefficient de couplage linéaire pur  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et la pulsation de coupure basse  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Nous obtenons également l'expression théorique de l'amortissement suivante

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega \gamma}{2\omega_L^2 \sin\left[\arccos\left(1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_L^2}\right)\right]}. \quad (4.7)$$

Le profil de l'amortissement  $\alpha$  est présenté à la figure 4.2 pour le cas particulier où  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . Le trait plein représente l'expression théorique (4.7), tandis que les croix sont déduites des simulations numériques du modèle défini par l'équation (4.1) excité à son entrée par  $U_0(t) = A \sin \omega t$ . En effet, pour chaque pulsation angulaire à l'intérieur de la bande passante  $[\omega_0; \omega_c]$  du système, nous avons déterminé la valeur maximale atteinte par  $U_n(t)$  pour chaque cellule constituant le milieu non linéaire. Pour obtenir l'amortissement  $\alpha$  correspondant à chaque pulsation angulaire  $\omega$  de la bande

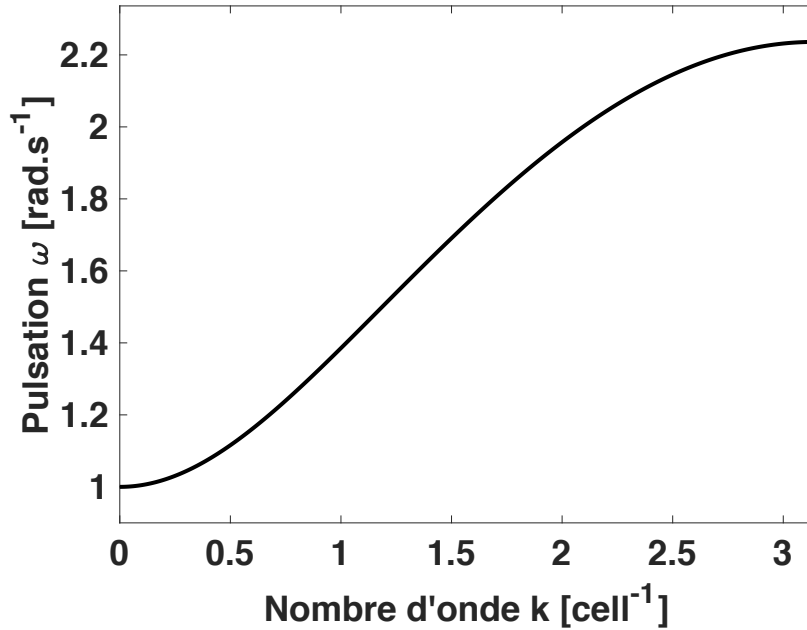


FIGURE 4.1 – Représentation de la courbe de dispersion théorique du réseau de type Klein-Gordon d'ordre 5 décrit par l'équation (4.6) en fonction du nombre d'onde  $k$ . Paramètres :  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

passante, nous avons par la suite considéré la loi suivante

$$\max[U_n(t)] = Ae^{-\alpha n}. \quad (4.8)$$

Le profil de solution  $Ae^{-\alpha n}$  considéré dans la loi (4.8) est relatif à l'onde plane (4.2) prise comme solution du système (4.1), car lorsqu'on force exactement l'extrémité de la chaîne de Sine-Gordon avec le comportement temporel d'un breather statique de fréquence  $\Omega$  et une amplitude  $A$ , la solution semble être en accord avec une queue de breather à cette fréquence, décroissant à partir de  $A$  [16, 40]. Pour le modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 étudié dans ce chapitre, le profil de solution  $Ae^{-\alpha n}$  est pris par extrapolation.

Le coefficient d'amortissement  $\alpha$  a ainsi été identifié à l'équation (4.8) grâce à la méthode des moindres carrés. L'évolution de l'amortissement en fonction de la pulsation angulaire présentée à la figure 4.2 montre ainsi un accord parfait entre les prédictions théoriques et les simulations numériques.

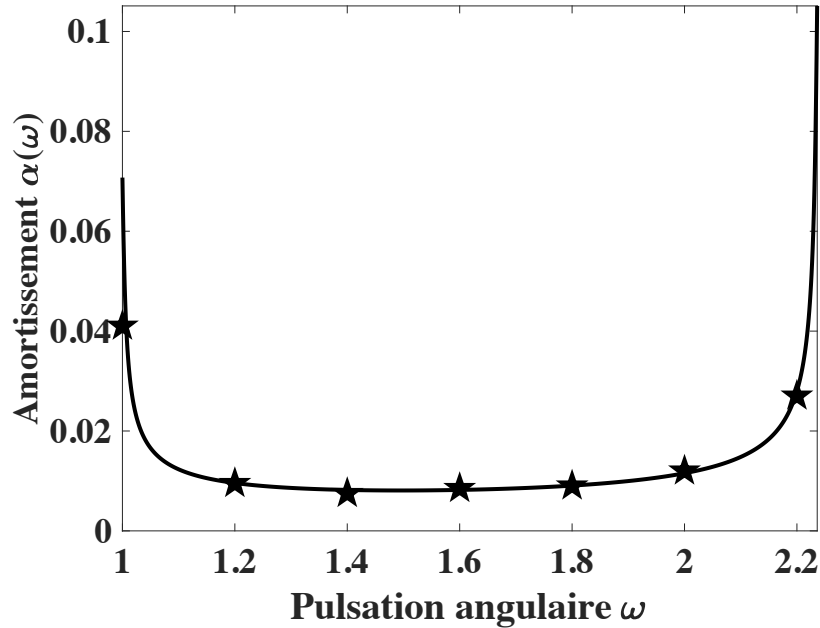


FIGURE 4.2 – Profil de l'amortissement en fonction de la pulsation angulaire  $\omega$ . Le trait plein représente l'expression théorique (4.7), tandis que les étoiles sont déduites des simulations numériques du modèle défini par l'équation (4.1). Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

#### 4.2.1/ MISE EN ÉVIDENCE DU PHÉNOMÈNE DE SUPRATRANSMISSION

Lorsqu'on force le système dans le gap ( $\omega < \omega_0$ ) avec un signal sinusoïdal de faible amplitude, le milieu supporte une onde évanescente dont le profil a pu être prédit mathématiquement par Geniet et Léon avec une approximation linéaire [16] lors de leur étude consacrée au modèle de sine-Gordon classique. Dans cette limite linéaire, l'évolution du site  $n$  pour des pulsations  $\omega$  prises dans le gap obéit à :

$$U_n(t) = A \sin(\omega t) e^{-\lambda n}. \quad (4.9)$$

Dans l'expression (4.9),  $\lambda$  se calcule en considérant que si  $\omega < \omega_0$ , alors le nombre d'onde  $k$  est imaginaire pur, soit  $k = i\lambda$ . En remplaçant cette expression du nombre d'onde dans la relation de dispersion (4.6), on trouve

$$\lambda = \operatorname{arccosh} \left( 1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_L^2} \right), \quad (4.10)$$

où  $\lambda$  est défini par unité de cellule.

La comparaison de ces résultats théoriques à ceux issus de nos simulations numériques est faite en considérant les conditions aux bords de Dirichlet modifiées suivantes

$$U_0(t) = A \sin(\omega t), \quad U_n(0) = 0, \quad \dot{U}_n(0) = A\omega e^{-\lambda n}. \quad (4.11)$$

La figure 4.3 présente l'état de la ligne à l'instant  $t = 30$ , obtenu à partir des simulations numériques de l'équation (4.1) et du profil théorique obtenu par Geniet et Léon donné à l'expression (4.9) et pris ici par extrapolation. Le trait plein représente le profil théorique (4.9) tandis que les symboles "x" représentent les simulations numériques de l'équation (4.1). Il y a un bon accord entre l'expression théorique donnée par Geniet et Léon et nos simulations numériques.

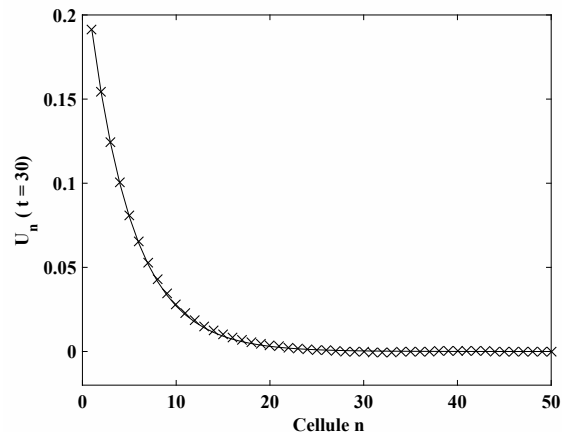


FIGURE 4.3 – Profil d'onde évanescence obtenue dans la bande interdite d'un milieu de Klein-Gordon d'ordre 5 pour une valeur du couplage linéaire pur  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ . L'état du milieu est représenté à l'instant  $t = 30$  pour les paramètres fixés suivants :  $A = 0.2$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.9 \text{ rad.s}^{-1}$ . Le trait plein représente le profil théorique (4.9) tandis que les symboles "x" représentent les simulations numériques de l'équation (4.1).

Après simulations numériques de l'équation (4.1) pour une pulsation de forçage  $\omega$  fixée à 0.9 et pour une amplitude  $A$  valant 0.2 avec les conditions aux limites de Dirichlet modifiées définies en (4.11), on obtient la figure 4.4 où est présentée l'évolution temporelle des cellules  $n = 5$ ,  $n = 8$  et  $n = 15$ . Cette figure montre clairement que l'amplitude de l'onde plane s'atténue au fur et à mesure qu'elle rentre dans la chaîne en conservant sa forme. Malgré son amplitude très atténuée, la figure montre que le signal de la cellule  $n = 15$  reste une sinusoïde. L'onde plane se propageant dans le gap est donc une sinu-



soïde atténuée comme l'ont prédit Geniet et Léon dans le cas du modèle classique de sine-Gordon [15].

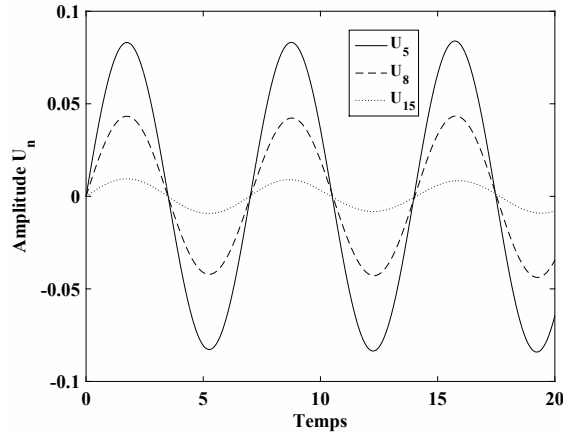


FIGURE 4.4 – Évolution temporelle des cellules  $n = 5$ ,  $n = 8$  et  $n = 15$ . Paramètres :  $A = 0.2$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $T = 180$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega = 0.9 \text{ rad.s}^{-1}$ .

L'amplitude d'une cellule  $n$  de la chaîne non linéaire s'atténue en  $Ae^{-\lambda n}$  où  $A$  est l'amplitude de la cellule excitatrice à l'entrée de la ligne et  $\lambda$  est l'amortissement dans la bande interdite et calculé avec l'expression (4.10). Nous avons ainsi décidé que le phénomène de supratransmission apparaît dans le milieu, pour une pulsation  $\omega < \omega_0$  du signal d'entrée d'amplitude  $A$  donnée, si et seulement si l'amplitude maximale de la trentième cellule de la ligne est strictement supérieure à  $A$ , soit  $\max[U_{30}(t)] > A$ .

#### 4.2.2/ SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Dans cette section, nous faisons l'étude numérique des conditions d'existence du phénomène de supratransmission dans le milieu gouverné par l'équation (4.1) et soumis aux conditions aux bords de Dirichlet (4.11). Les paramètres du milieu sont pris tels que :  $N = 300$  cellules,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les simulations numériques ont été réalisées avec l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 avec pour pas temporel  $dt = 0.01$ .

Pour plus de simplicité d'écriture et de clarté dans la lecture, on notera  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  l'amplitude seuil correspondant à la valeur d'amplitude qui déclenche le phénomène de supratransmission dans le milieu avec pour coefficient de couplage linéaire pur  $\omega_L^2$  et pour coefficient de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$ .

Pour numériquement illustrer l'apparition du phénomène de supratransmission dans le milieu, nous avons représenté aux figures 4.5 (pour  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ) et 4.6 (pour  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ ) le comportement du système pour deux valeurs de couplage linéaire pur, et pour une valeur fixe de la pulsation du signal excitateur  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ . Pour chacune des figures 4.5 et 4.6, deux valeurs d'amplitude du signal excitateur ont été utilisées, légèrement en dessous et légèrement au dessus de l'amplitude seuil  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$ . Ainsi, pour la figure 4.5, nous avons utilisé les amplitudes  $A = 1.27$  et  $A = 1.29$  car, pour cette figure, le couplage linéaire pur vaut  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et l'amplitude seuil permettant le déclenchement du phénomène de supratransmission vaut  $A_{th,(\omega_L^2=1,0)} = 1.28$ . Lorsque l'amplitude de l'onde excitatrice est prise légèrement en dessous du seuil, le chronogramme et le spectre d'amplitude de la trentième cellule, présentés aux figures 4.5(a) et 4.5(c) respectivement, montrent que l'excitation sinusoïdale d'amplitude  $A = 1.27$  s'atténue dans le système. La représentation spatio temporelle présentée à la figure 4.5(e) confirme bien cette observation. À contrario, lorsque l'amplitude de l'excitation sinusoïdale est prise légèrement au dessus du seuil, soit  $A = 1.29$ , le chronogramme (figure 4.5(b)) et le spectre d'amplitude (figure 4.5(d)) de la trentième cellule montrent l'apparition de modes non linéaires dans le milieu. Cependant, comme le montre la représentation spatio temporelle de la figure 4.5(f), ces modes générés, révélant l'existence du phénomène de supratransmission, ne se limitent pas à la trentième cellule, ils se propagent dans le milieu. Pour la figure 4.6, nous avons utilisé les amplitudes  $A = 1.25$  et  $A = 1.27$  car pour cette figure le couplage linéaire pur vaut  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  et l'amplitude seuil permettant le déclenchement du phénomène de supratransmission vaut  $A_{th,(\omega_L^2=4,0)} = 1.26$ . Nous avons également remarqué que lorsque l'amplitude de l'onde excitatrice est prise légèrement en dessous du seuil, le chronogramme et le spectre d'amplitude de la trentième cellule présentés aux figures 4.6(a) et 4.6(c) respectivement montrent que l'excitation sinusoïdale d'amplitude  $A = 1.25$  conduit à une onde évanescence. La représentation spatio temporelle présentée à la figure 4.6(e) le confirme. Par contre, lorsque l'amplitude de l'excitation sinusoïdale est prise légèrement au dessus du seuil, soit  $A = 1.27$ , le chronogramme (figure 4.6(b)) et le spectre d'amplitude (figure 4.6(d)) de la trentième cellule montrent l'apparition de modes non linéaires. Cependant, comme le montre la représentation spatio temporelle de la figure 4.6(f), ces modes générés, révèlent l'existence du phénomène de supratransmission et se propagent dans le milieu.

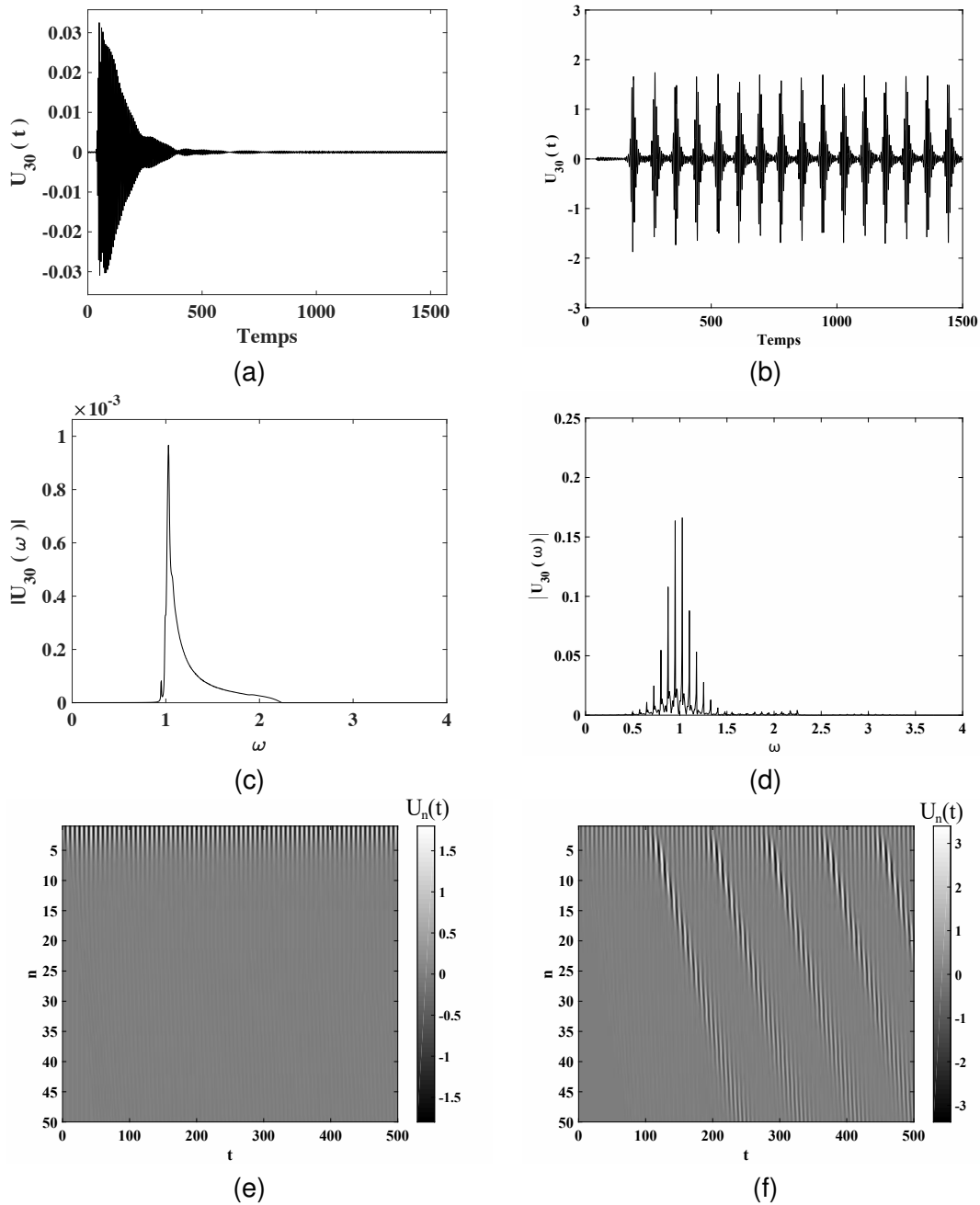


FIGURE 4.5 – Changement de comportement dans le modèle classique de Klein-Gordon d'ordre 5 en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,27$  et  $A = 1,29$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>me</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d), l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(1,0)} = 1.28$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,27$  et  $A = 1,29$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ .

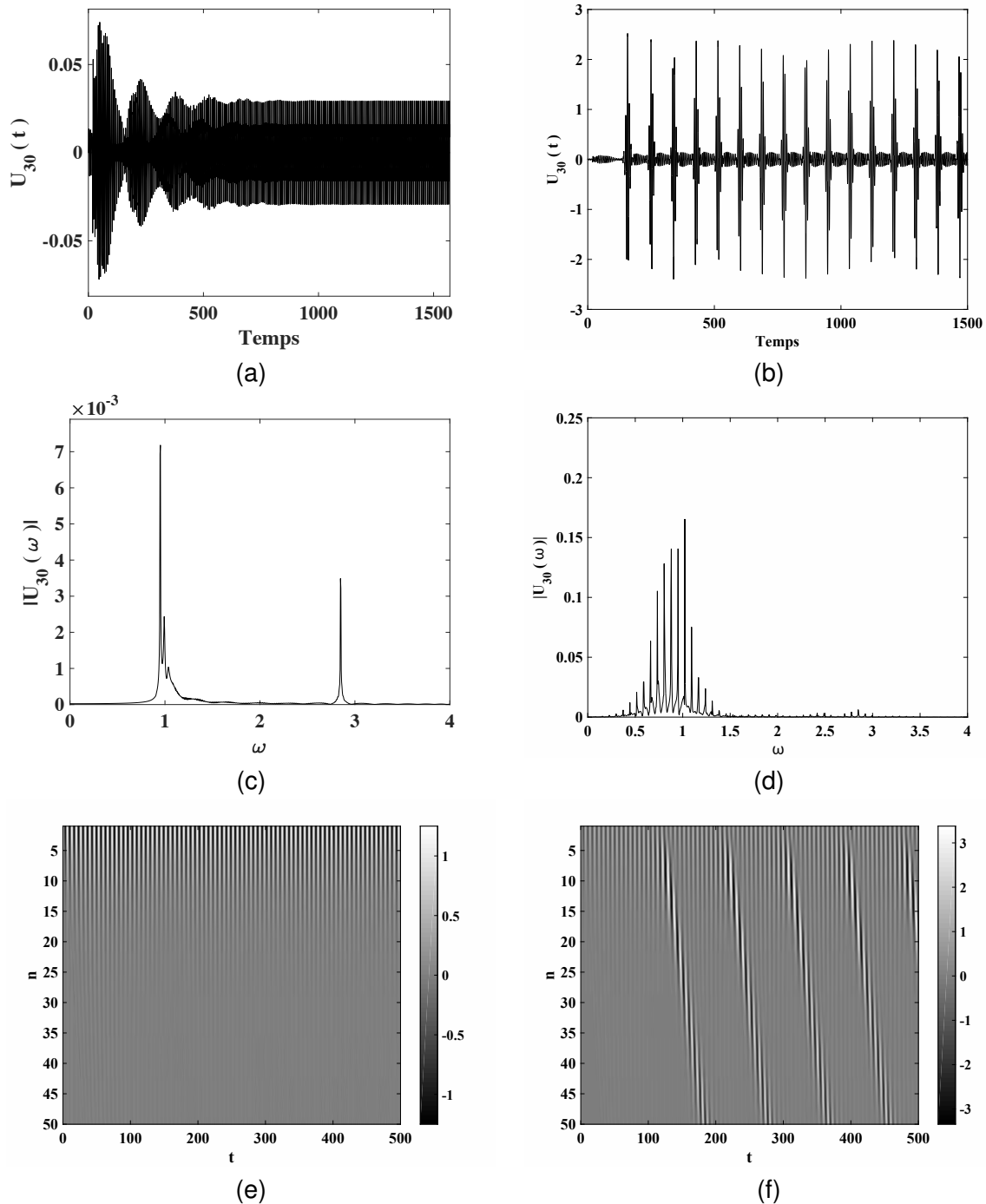


FIGURE 4.6 – Changement de comportement dans le modèle classique de Klein-Gordon en raison du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ème</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d), l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,0)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ .

## 4.2.3/ SEUIL DE SUPRATRANSMISSION

Pour caractériser le phénomène de supratransmission non linéaire, l'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$  au-delà de laquelle le milieu transmet de l'énergie doit être déterminée pour chaque pulsation  $\omega$  du gap. Geniet et Leon ont prédit théoriquement comment le seuil d'amplitude se comporte dans le cas du modèle classique de sine-Gordon [16]. Ils ont en effet établi que le seuil dépend de la pulsation angulaire  $\omega$  selon la loi suivante

$$A_{th,(\omega_L^2,0)} = 4 \arctan \left[ \frac{\omega_L}{\omega} \operatorname{arccosh} \left( 1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_L} \right) \right] \quad (4.12)$$

obtenue en considérant que quand l'amplitude de forçage  $A$  est supérieure à l'amplitude maximale possible du breather de fréquence  $\Omega$ , on a immédiatement génération de solitons de gap et supratransmission.

Étant donné que la non linéarité du modèle de Klein-Gordon considéré (4.1) est du 5<sup>ème</sup> ordre, correspondant à l'approximation de la fonction sinus, on peut supposer, en première approximation, que la précédente loi théorique, pour prédire l'amplitude du seuil induisant la supratransmission, est aussi la même dans le système classique de Klein-Gordon. Pour vérifier cet accord, nous avons effectué différentes simulations numériques du modèle de Klein-Gordon avec diverses amplitudes  $A$  et pulsations  $\omega$  du signal d'entrée. Pour chaque valeur de  $\omega$ , nous avons déterminé par dichotomie l'amplitude du seuil  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$ , qui conduit à la bifurcation entre l'état évanescent et la transmission d'énergie par l'intermédiaire du phénomène de supratransmission.

Pour définir si oui ou non la supratransmission se produit, nous avons tout d'abord noté que dans le cas d'une onde évanescente, l'amplitude de la  $n^{\text{ème}}$  cellule s'atténue en  $Ae^{-\lambda n}$  où  $A$  est l'amplitude de l'onde excitatrice, tandis que  $\lambda$  est défini par l'expression (4.10). Nous décidons alors que la supratransmission non linéaire est déclenchée si et seulement si l'amplitude de crête de la 30<sup>ème</sup> cellule est strictement supérieure à l'amplitude  $A$ , soit  $\max[U_{30}(t)] > A$ . L'évolution de l'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$  est tracée en croix en fonction de la pulsation  $\omega$  dans la figure 4.7 et est comparée à la loi théorique (4.12) prédite par Geniet et Leon. Deux valeurs du couplage linéaire ont été examinées,  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  pour 4.7(a) et  $\omega_L^2 = 4$  pour 4.7(b), afin d'établir le diagramme de bifurcation dans le plan de paramètres amplitude-pulsation. Au-dessous de la courbe de la figure 4.7, l'excitation conduit à une onde évanescente alors qu'au-delà de cette courbe

la supratransmission se produit. Dans la gamme de pulsations  $[0.85; 1]$ , on observe une bonne concordance entre la valeur théorique et numérique de  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$ , qui induit la supratransmission. Les écarts observés pour des pulsations  $\omega$  en-dessous de 0.85 peuvent être imputables à l'ordre du modèle de Klein-Gordon considéré (ordre 5), qui n'est pas suffisant pour approximer la fonction sinusoïdale du modèle de sine-Gordon.

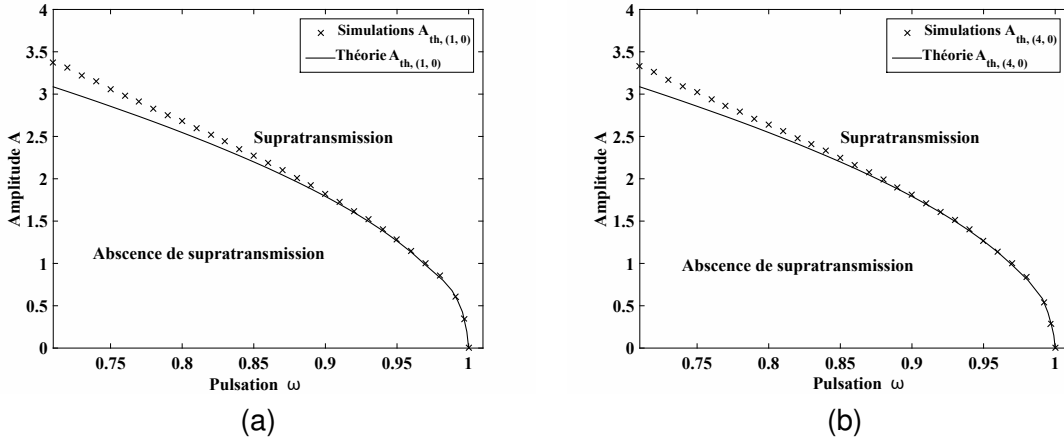


FIGURE 4.7 – Diagramme de bifurcation du modèle classique de Klein-Gordon d'ordre 5 dans le plan de paramètres amplitude-pulsation, pour le couplage linéaire suivant : (a)  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et (b)  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ . La courbe en trait plein correspond à l'amplitude du seuil théorique  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$  prédite par l'équation (4.12) tandis que les croix sont obtenues via des simulations numériques du modèle classique de Klein-Gordon (4.1). Paramètres :  $N = 1800 \text{ cellules}$ ,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

La courbe d'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$  en fonction de la pulsation de gap  $\omega$  présentée à la figure 4.7 partage le plan amplitude de forçage - pulsation en deux régions :

- Pour des amplitudes dépassant l'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$ , il y a transmission d'énergie dans la chaîne sous forme de modes non linéaires.
- Pour des amplitudes en dessous de l'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$ , le milieu ne permet pas de transmission. On observe une onde plane atténuée exponentiellement comme le montrent les figures 4.3 et 4.4.

### 4.3/ MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE 5 À COUPLAGE MIXTE

Nous allons maintenant examiner la contribution du couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  dans le système de Klein-Gordon gouverné par l'équation (1.1) avec une non-linéarité

$f(U_n)$  d'ordre 5 définie par l'expression (1.3).

La figure 4.8 présente l'état de la ligne à l'instant  $t = 30$ , obtenu à partir des simulations numériques de l'équation (1.1) et du profil théorique obtenu par Geniet et Léon donné à l'expression (4.9) et pris ici par extrapolation. Le trait plein représente le profil théorique (4.9) tandis que les symboles "x" représentent les simulations numériques de l'équation (1.1). Les paramètres sont pris tels que pour les figures 4.8(a), 4.8(b), 4.8(c) et 4.8(d), le coefficient de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  prend respectivement les valeurs 0, 4, 25 et = 49, pendant que  $\omega_L^2$  est fixé à  $4 \text{ rad.s}^{-1}$ . Ces figures révèlent un bon accord entre la valeur théorique donnée par Geniet et Léon et les résultats obtenus par simulations numériques. L'augmentation de la valeur du coefficient du couplage non linéaire semble ne pas influencer l'état de la ligne : le profil théorique prédit par Geniet et Léon donné à l'expression (4.9) et pris ici par extrapolation pourrait être considéré comme le profil de l'onde évanescence supportée par le système lorsqu'il est forcé dans le gap.

Pour deux des valeurs spécifiques du couplage linéaire  $\omega_L^2$ , soient  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ , nous avons effectué une analyse du comportement du système en fonction du couplage non linéaire de valeur  $\omega_{NL}^2$ . En particulier, nous nous sommes concentrés sur le seuil de valeur  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  de l'amplitude critique qui déclenche la supratransmission. Un ensemble de valeurs spécifiques du couplage non linéaire a été sélectionné pour chaque valeur de couplage linéaire  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  afin d'établir la tendance globale de la réponse du système.

Comme le montrent les figures 4.9(a), 4.9(c), 4.9(e), 4.10(a), 4.10(c) et 4.10(e) pour lesquelles le couplage linéaire pur vaut  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  d'une part, et 4.11(a), 4.11(c), 4.11(e), 4.12(a), 4.12(c) et 4.12(e) pour lesquelles  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  d'autre part, lorsque l'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice est choisie légèrement en-dessous du seuil  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$ , le système supporte une onde évanescence. En revanche, lorsque l'amplitude de l'onde excitatrice est prise légèrement au-delà du seuil, nous observons la génération des breathers via le phénomène de supratransmission dont les signatures temporelles sont rapportées dans les figures 4.9(b), 4.10(b), 4.11(b) et 4.12(b). Les signatures spectrales correspondantes sont quant à elles présentées aux figures 4.9(d), 4.10(d), 4.11(d) et 4.12(d) tandis que le comportement de l'ensemble du réseau est disponible avec la représentation spatio temporelle dans les figures 4.9(f), 4.10(f), 4.11(f) et 4.12(f).

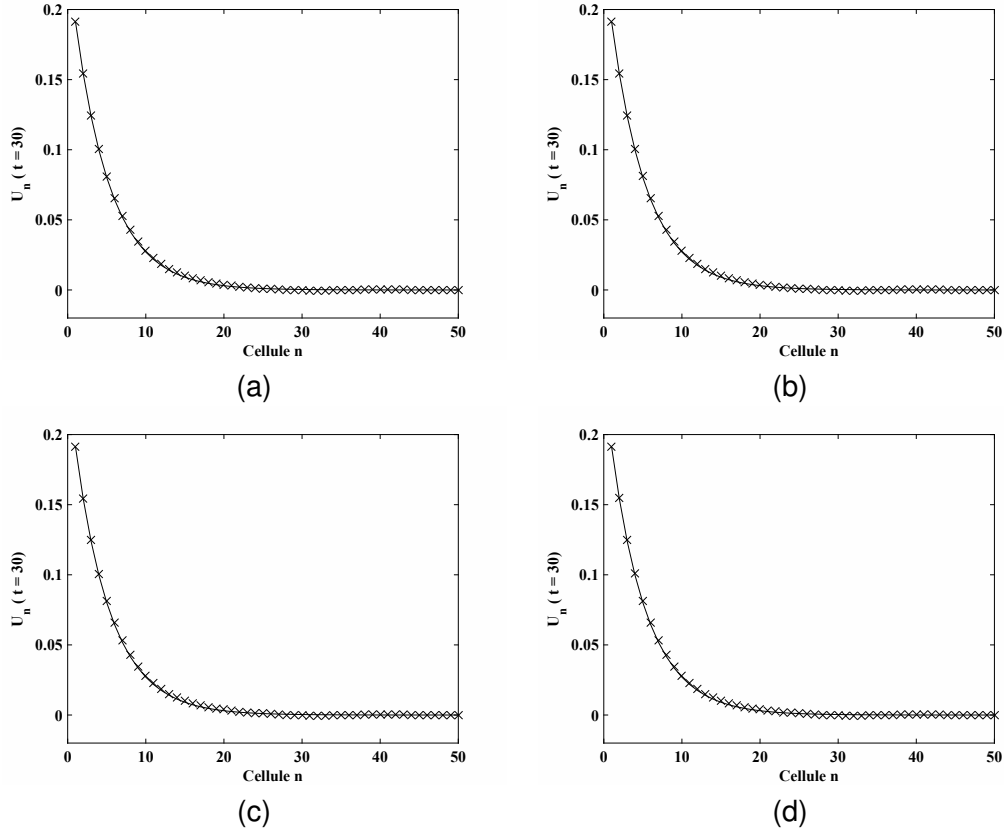


FIGURE 4.8 – Profil d'ondes évanescentes obtenues dans le Gap d'un milieu de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte pour différentes valeurs du couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$ . L'état du milieu est représenté à l'instant  $t = 30$  pour les paramètres fixés suivants :  $A = 0.2$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.9 \text{ rad.s}^{-1}$ , le couplage non linéaire vaut  $\omega_{NL}^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  (a),  $\omega_{NL}^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  (b),  $\omega_{NL}^2 = 25 \text{ rad.s}^{-1}$  (c) et  $\omega_{NL}^2 = 49 \text{ rad.s}^{-1}$  (d). Le trait plein représente le profil théorique (4.9) tandis que les symboles "x" représentent les simulations numériques de l'équation (1.1).

Les figures 4.13(a) et 4.13(b), obtenues pour  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  respectivement, présentent l'évolution de l'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  induisant la supratransmission en fonction de la pulsation  $\omega$  pour cinq valeurs spécifiques de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$ . Au regard des figures 4.13(a) et 4.13(b), nous avons tout d'abord noté que pour les deux couplages linéaires  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ , les courbes critiques correspondant à l'augmentation des valeurs du couplage non linéaire restent toujours en-dessous de la courbe de référence qui correspond au modèle de Klein-Gordon classique, c'est-à-dire sans couplage non linéaire ( $\omega_{NL}^2 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ ). Par conséquent, l'augmentation du couplage non linéaire réduit la valeur critique qui déclenche la supratransmission. Nous avons également noté que le milieu avec un faible couplage linéaire semble être plus impacté par l'augmentation de la valeur du couplage non linéaire. En effet, c'est pour



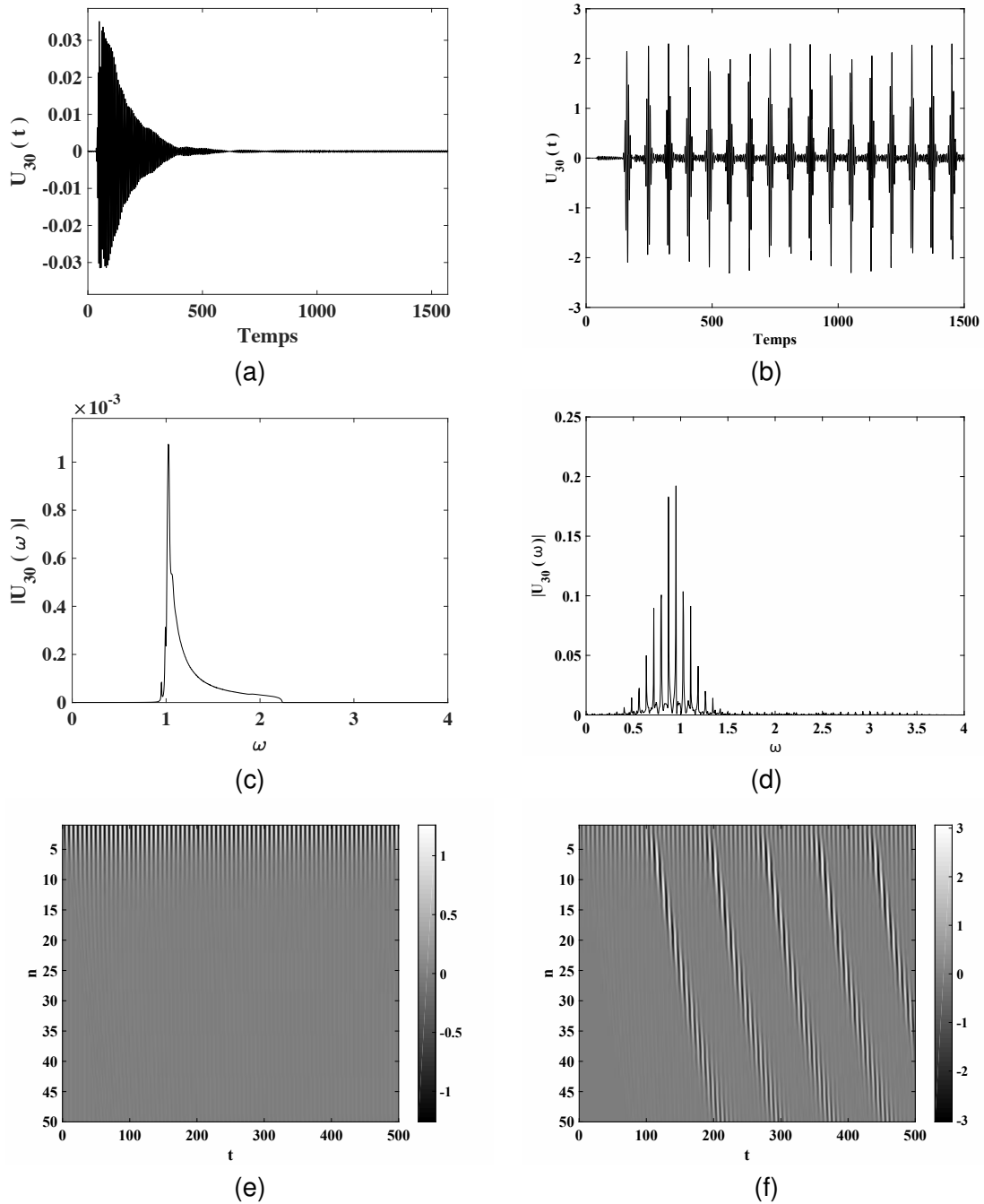


FIGURE 4.9 – Changement de comportement dans le modèle de Klein-Gordon à couplage mixte en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ème</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement ; les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(1,1)} = 1.27$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

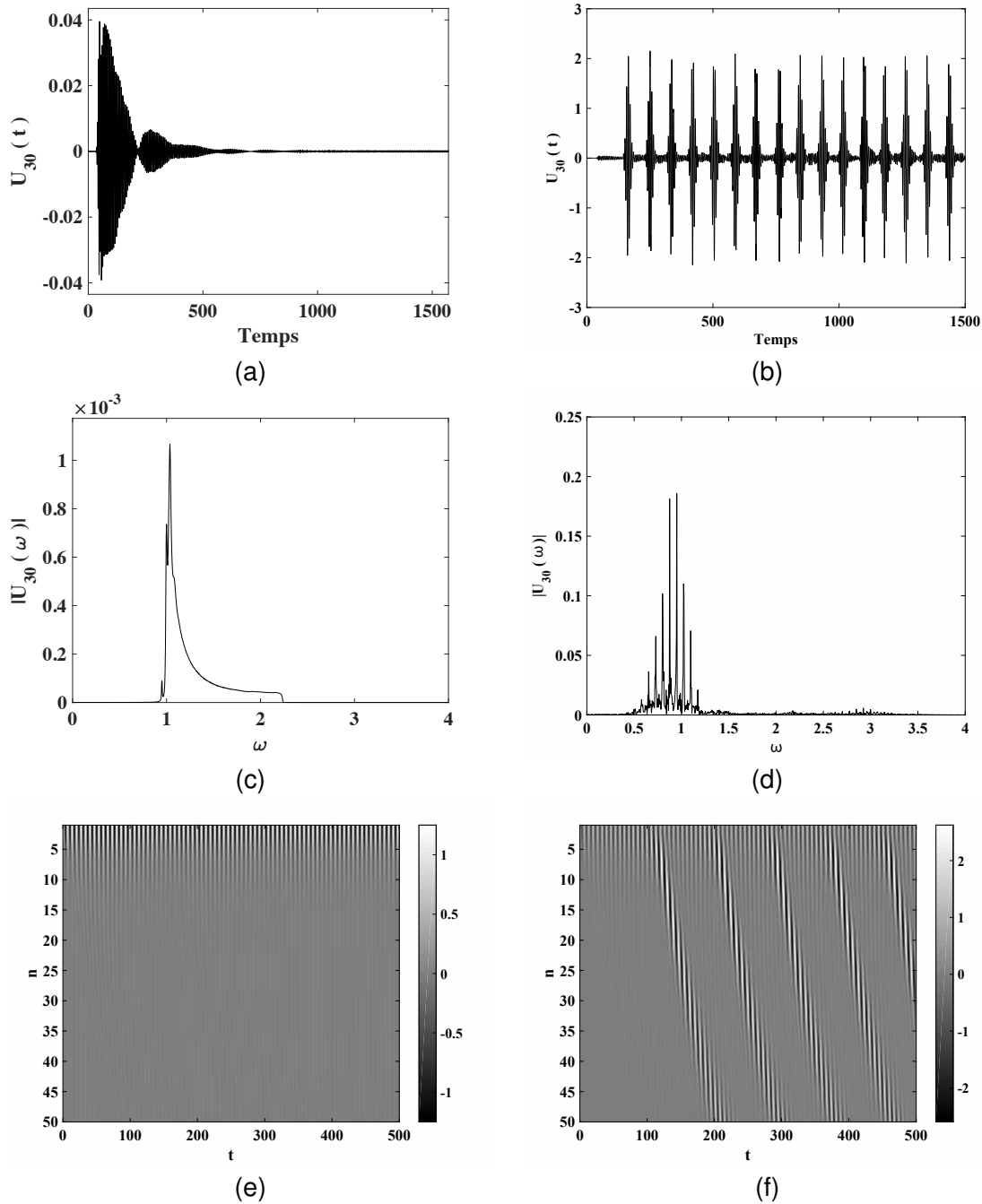


FIGURE 4.10 – Changement de comportement dans le modèle de Klein-Gordon à couplage mixte en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ème</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement ; les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(1,A)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ .

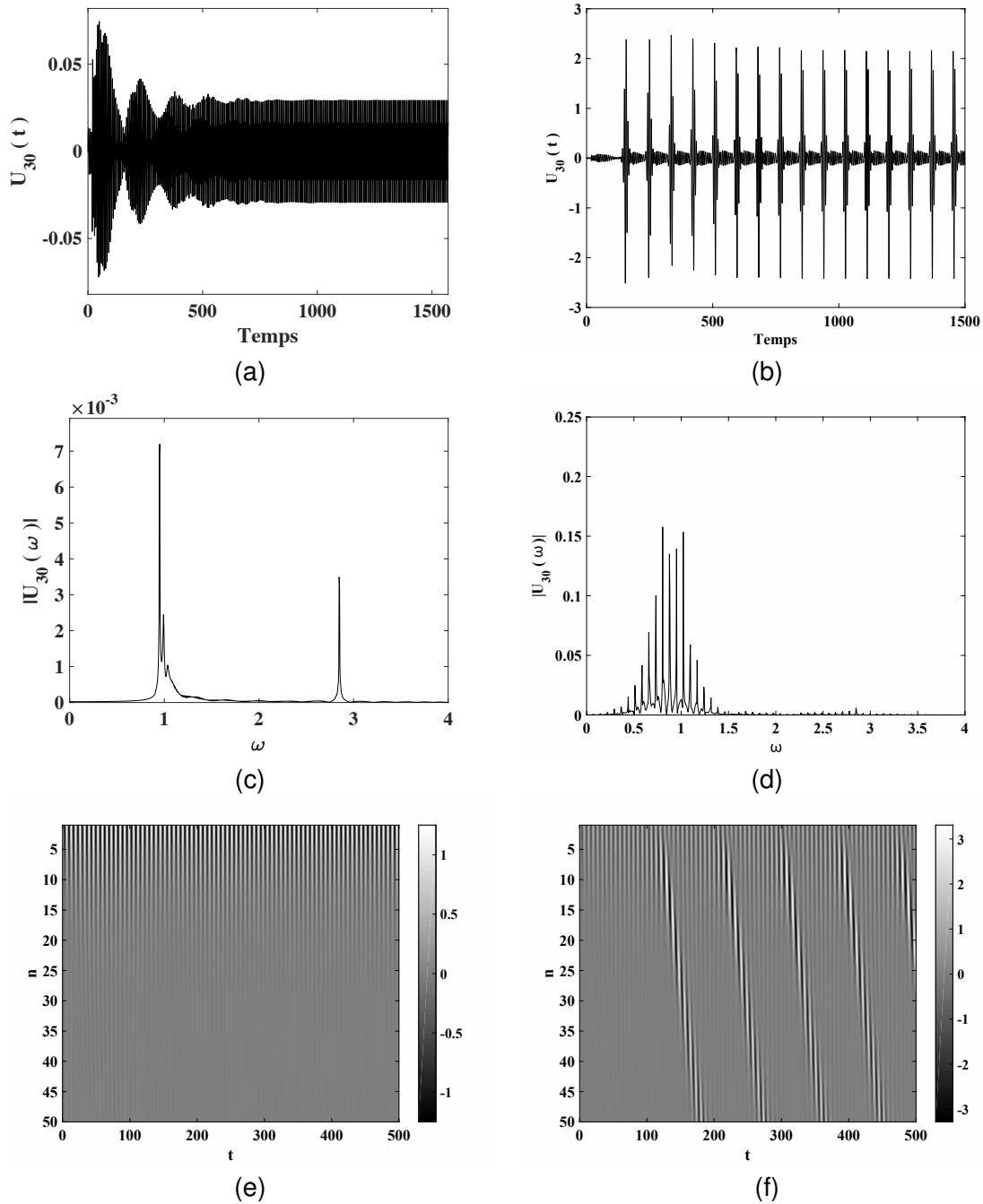


FIGURE 4.11 – Changement de comportement dans le modèle de Klein-Gordon à couplage mixte en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ème</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement ; les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,1)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

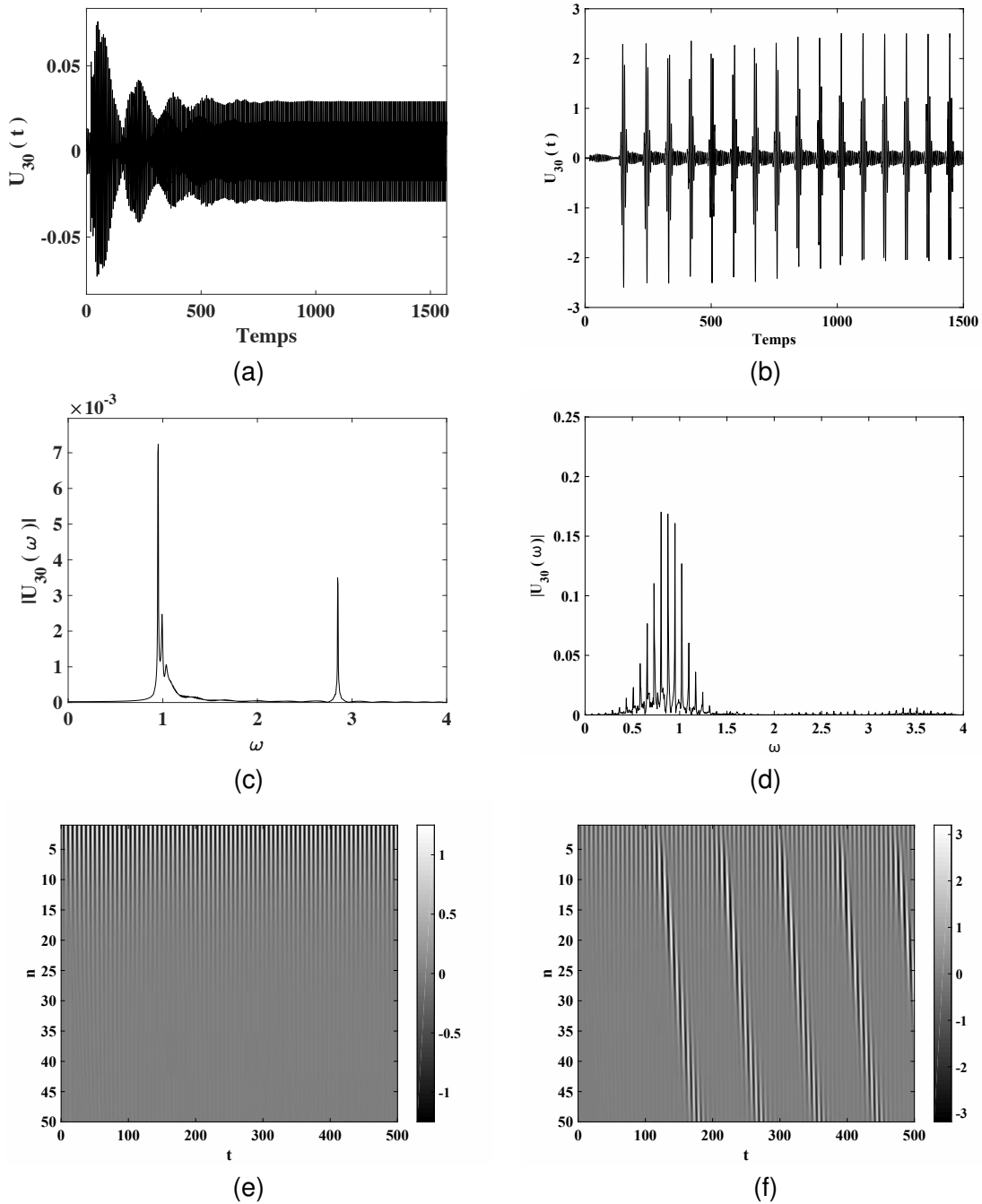


FIGURE 4.12 – Changement de comportement dans le modèle de Klein-Gordon à couplage mixte en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ème</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement ; les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,4)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ .

la plus faible valeur de couplage linéaire ( $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  en 4.13(a)) qu'on observe les plus grandes divergences entre la courbe critique correspondant au système de Klein-Gordon classique ( $\omega_{NL}^2 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ ) et les courbes obtenues avec le couplage non linéaire non nul. Nous avons également présenté le comportement du système près du seuil de bifurcation  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  dans les cas précis de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  en considérant la même pulsation  $\omega = 0,95$  permettant d'observer les breathers dans le système de Klein-Gordon classique (c'est-à-dire  $\omega_{NL}^2 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ ).

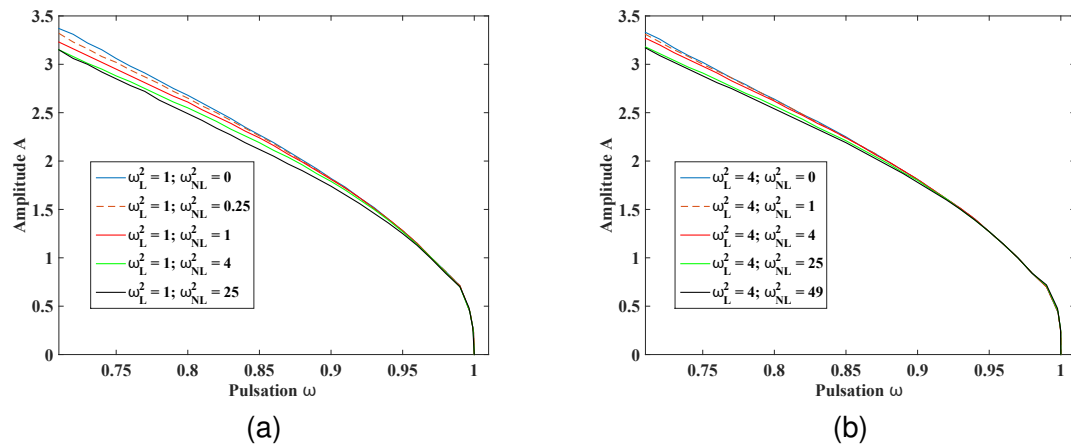


FIGURE 4.13 – Effet du couplage non linéaire sur l'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  permettant le déclenchement de la supratransmission dans le modèle de Klein-Gordon mixte, de couplage linéaire  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  4.13(a) et  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  4.13(b). Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\gamma = 0.01 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

#### 4.4/ CONCLUSION

Nous avons réalisé l'étude de la supratransmission dans une chaîne Klein-Gordon d'ordre 5. La première partie a été consacrée au modèle classique de Klein-Gordon d'ordre 5, c'est à dire avec un couplage linéaire pur. La seconde partie a, quant à elle, été consacrée au modèle de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte. Pour des pulsations prises dans le gap du système, les résultats obtenus par différentes simulations confirment ceux proposés par Geniet et Léon. Suite à cette étude, nous pouvons tirer plusieurs conclusions. Le phénomène de supratransmission dépend de l'amplitude du signal de forçage. Pour une valeur du coefficient de couplage linéaire pur donnée, l'amplitude seuil permettant le déclenchement du phénomène de supratransmission dans le milieu diminue lorsque la valeur du coefficient de couplage non linéaire augmente.

Ce phénomène d'abaissement de l'amplitude seuil pourrait faire l'objet d'une étude plus approfondie, le but étant de répondre à plusieurs questions, dont les principales pourraient être : quelles sont les règles d'abaissement de l'amplitude seuil lorsque le couplage non linéaire augmente ? ce phénomène d'abaissement de l'amplitude seuil continue t-il de diminuer ou bien est ce qu'il sature lorsque le couplage non linéaire continue d'augmenter ?.

# SUPRATRANSMISSION DANS LE MODÈLE DE SINE-GORDON MODIFIÉ

## Sommaire

---

5.1 Introduction . . . . .	79
5.2 Modèle de sine-Gordon classique . . . . .	80
5.3 Modèle de sine-Gordon modifié . . . . .	84
5.4 Conclusion . . . . .	93

---

## 5.1/ INTRODUCTION

Plusieurs études théoriques et/ou numériques ont montré l'existence du phénomène de supratransmission dans plusieurs systèmes. Certaines de ces études ont été réalisées sur des systèmes modélisés par l'équation de sine-Gordon classique, pour mettre en lumière certains phénomènes. Plus particulièrement, des études théoriques et numériques ont, de ce fait, montré que le modèle de sine-Gordon classique peut transmettre de l'énergie dans le Gap à travers le phénomène de supratransmission non linéaire [17, 63]. La nonlinéarité du modèle de sine-Gordon classique lui permet d'exhiber un comportement bistable [64]. D'autres études sur le modèle de sine-Gordon classique ont montré que la contribution du bruit peut permettre la génération de modes non linéaires dans le Gap via le phénomène de supratransmission non linéaire. Le cas du système à une dimension a été traité [65], et par extension, d'autres études ont porté sur les systèmes de dimension deux dans l'espace. Ces études ont conduit à certaines applications comme la simulation de la propagation des signaux binaires dans les chaînes

mécaniques semi infinies d'oscillateurs couplés [41, 66]. Le processus de supratransmission non linéaire est également employé pour propager les signaux binaires dans le réseau de  $\beta$ -Fermi-Pasta-Ulam délimité en deux dimensions de l'espace [67], pour montrer numériquement que des informations binaires peuvent être transmises en milieux continus de Frenkel-Kontorova [68]. L'étude du phénomène de supratransmission non linéaire a également été menée dans beaucoup d'autres systèmes comme les lignes de transmission non linéaires [69–72], certains guides d'ondes [73–76], les réseaux de Bragg [40], les chaînes de pendule [77], les fibres optiques [78], les milieux optiques bi-réfringents avec une non linéarité quadratique [79], les jonctions Josephson [80–85] et bien d'autres. Toutes ces études ont été faites dans des systèmes à couplage linéaire pur. D'autres ont été menées sur des systèmes à couplage mixte [9, 73, 86]. Cependant, ces derniers travaux n'ont pas démontré l'influence de l'addition du coefficient de couplage non linéaire sur le seuil d'amplitude du signal d'entrée qui déclenche l'observation du phénomène de supratransmission non linéaire dans le milieu. Notre étude est réalisée sur le modèle de sine-Gordon modifié associant couplage linéaire pur et couplage non linéaire. L'originalité de cette thèse porte sur l'analyse des conditions d'existence du phénomène de supratransmission dans les milieux à couplage mixte de type Klein-Gordon modifié et sine-Gordon modifié. Après avoir consacré le chapitre précédent à l'étude du modèle de Klein-Gordon modifié, le présent chapitre sera quant à lui consacré à l'étude du modèle de sine-Gordon modifié. Il s'agit, en effet, d'étudier comment le phénomène de supratransmission est affecté par la présence d'un couplage non linéaire.

Pour mener à bien cette étude, nous avons divisé ce chapitre en plusieurs sections. La section 2 est consacrée aux rappels des résultats sur l'étude de supratransmission dans le modèle classique de sine-Gordon, c'est-à-dire sans couplage non linéaire, réalisée par Geniet et Léon [16]. La section 3 présente le modèle étudié dans ce chapitre ainsi que la mise en évidence du phénomène de supratransmission non linéaire dans le modèle de sine-Gordon modifié. La section 4 conclut notre étude.

## 5.2/ MODÈLE DE SINE-GORDON CLASSIQUE

Geniet et Leon ont restreint leurs études au modèle classique de sine-Gordon (sans couplage non linéaire) et prédit l'expression théorique de l'amplitude seuil  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$  à



partir de laquelle le phénomène de supratransmission se produit [15, 16]. Dans cette section, Nous nous proposons de vérifier cette loi théorique (4.12) à travers des simulations numériques. Ceci nous fournira une référence pour la section suivante à fin d'examiner les effets de l'ajout du couplage non linéaire.

Pour comparer les résultats théoriques de Geniet et Léon, pris ici par extrapolation, à ceux issus de nos simulations numériques, nous considérons les conditions aux bords de Dirichlet (4.11). L'algorithme d'intégration numérique de Runge Kutta d'ordre 4 avec pour pas temporel  $dt = 0,01$  a été utilisé pour résoudre numériquement le système (1.1).

En prenant le couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  nul dans l'équation (1.1), avec la fonction  $f(U_n)$  définie à l'expression (1.4), on obtient le modèle classique de sine-Gordon. La figure 5.1 présente une illustration des résultats obtenus par Geniet et Léon lorsqu'ils ont réalisé leur étude sur ce modèle. Deux valeurs d'amplitude de l'onde excitatrice ont ainsi été considérées, légèrement en-dessous et légèrement au-dessus de la valeur seuil  $A_{th,(\omega_L^2=1,0)} = 1.27$ , soient  $A = 1.26$  et  $A = 1.28$  en ce qui concerne le cas où le couplage linéaire  $\omega_L^2$  vaut 1, et  $A_{th,(\omega_L^2=4,0)} = 1.26$ , soient  $A = 1.25$  et  $A = 1.27$  pour le cas où  $\omega_L^2 = 4$ . Le chronogramme de la trentième cellule ainsi que son amplitude spectrale, présentés respectivement aux figures 5.1(a) et 5.1(c) pour  $\omega_L^2 = 1$  et 5.2(a) et 5.2(c) pour  $\omega_L^2 = 4$ , montrent que le signal excitateur d'amplitude  $A = 1.26$  pour  $\omega_L^2 = 1$  et  $A = 1.25$  pour  $\omega_L^2 = 4$ , avec une pulsation  $\omega = 0.95$ , ne se propage pas dans le milieu et ne donne lieu qu'à une onde évanescence. Ce comportement est confirmé par la représentation spatio temporelle de la réponse du système présentée à la figure 5.1(e) pour  $\omega_L^2 = 1$  et à la figure 5.2(e) pour  $\omega_L^2 = 4$ . À contrario, le chronogramme et le spectre d'amplitude de la trentième cellule (figures 5.1(b) et 5.1(d) pour  $\omega_L^2 = 1$  et figures 5.2(b) et 5.2(d) pour  $\omega_L^2 = 4$  respectivement) montrent qu'en augmentant légèrement l'amplitude de l'onde excitatrice, soit  $A = 1.28$  pour  $\omega_L^2 = 1$  et  $A = 1.27$  pour  $\omega_L^2 = 4$ , il advient une transmission d'énergie dans le milieu à travers la formation de modes non linéaires via le phénomène de supratransmission. Le diagramme spatio temporel de la figure 5.1(f) pour  $\omega_L^2 = 1$  et de la figure 5.2(f) pour  $\omega_L^2 = 4$ , confirme cette observation et montre également que ces modes ne sont pas seulement localisés à la trentième cellule, mais qu'ils se propagent dans le milieu.

Geniet et Léon ont également prédit théoriquement l'amplitude critique à partir

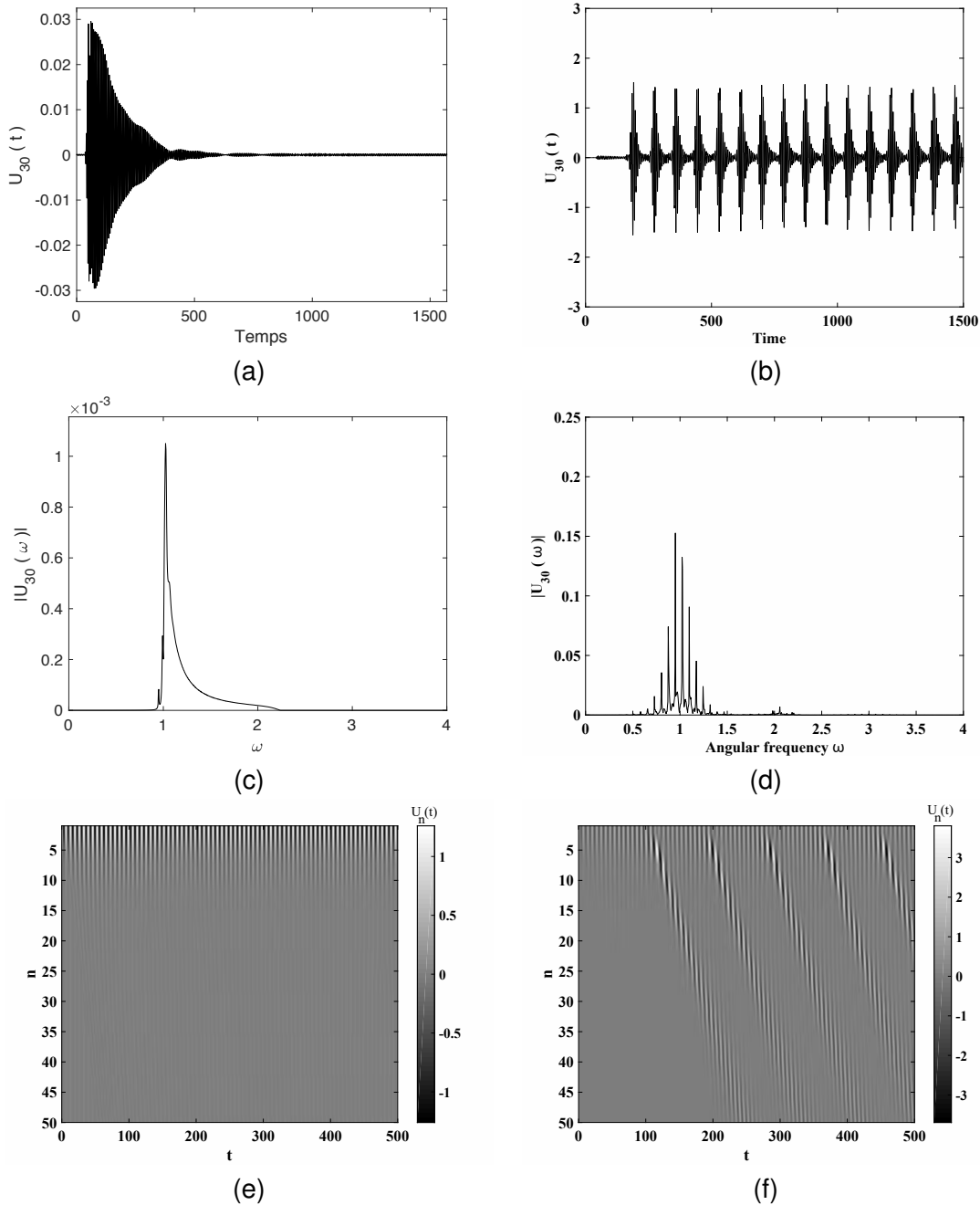


FIGURE 5.1 – Changement de comportement dans le modèle classique de sine-Gordon en raison du paramètre d’amplitude  $A$  de l’onde excitatrice. Les valeurs d’amplitude  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d’amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l’évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l’amplitude seuil  $A_{th,(1,0)} = 1.27$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 1$  et  $\omega_{NL}^2 = 0$ .

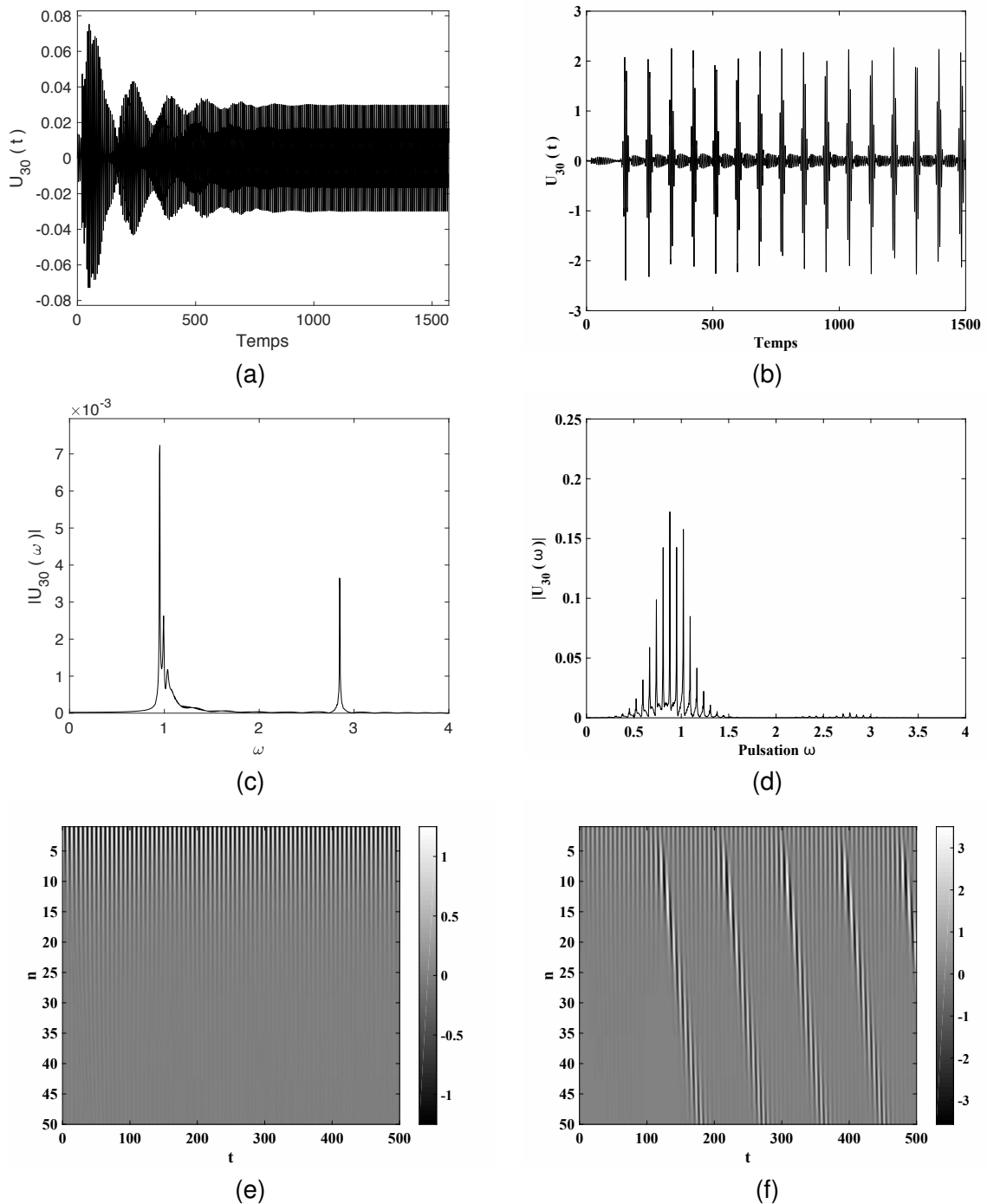


FIGURE 5.2 – Changement de comportement dans le modèle classique de sine-Gordon en raison du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1, 25$  et  $A = 1, 27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,0)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1, 26$  et  $A = 1, 28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 4$  et  $\omega_{NL}^2 = 0$ .

de laquelle on observe la supratransmission dans le modèle classique de sine-Gordon [16]. Ils ont montré que cette amplitude critique dépend de la pulsation  $\omega$  à travers la loi (4.12). Les résultats de leurs simulations numériques de l'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$ , en fonction de la pulsation  $\omega$ , sont représentés par des croix à la figure 5.3 et comparés avec la loi théorique (4.12) représentée en trait plein. Deux valeurs de couplage linéaire ont été considérées,  $\omega_L^2 = 1$  pour la figure 5.3(a) et  $\omega_L^2 = 4$  pour la figure 5.3(b), pour établir le diagramme de bifurcation dans le plan de paramètres amplitude-pulsation. En-dessous de la courbe critique de la figure 5.3, l'onde excitatrice s'atténue alors qu'au-dessus d'elle on observe la transmission d'énergie par formation de modes non linéaires via la supratransmission.

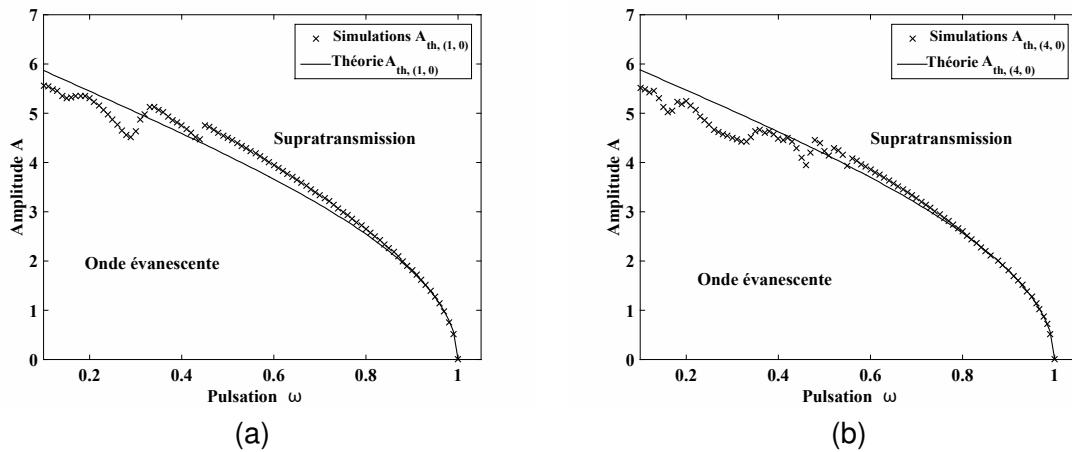


FIGURE 5.3 – Diagramme de bifurcation du système de sine-Gordon classique dans le plan de paramètre amplitude-fréquence  $[A, \omega]$ . Le couplage linéaire vaut  $\omega_L^2 = 1$  5.3(a) et  $\omega_L^2 = 4$  5.3(b). La courbe en trait plein correspond à l'amplitude du seuil théorique  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$  prédite par l'équation (4.12), tandis que les croix sont obtenues par l'intermédiaire des simulations numériques du modèle classique de sine-Gordon (1.1). Paramètres :  $N = 300$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ .

### 5.3/ MODÈLE DE SINE-GORDON MODIFIÉ

Dans cette section, nous considérons la contribution du couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  dans le système de sine-Gordon classique précédemment présenté, et son impact sur le comportement du système est analysé en mettant l'accent sur la valeur d'amplitude seuil  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  qui permet le déclenchement du phénomène de supratransmission. Cette analyse a été réalisée en choisissant les deux valeurs de couplage linéaire précé-

demment considérées :  $\omega_L^2 = 1$  et  $\omega_L^2 = 4$ .

Les comportements du système dans les cas précis de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2 = 1$  et  $\omega_{NL}^2 = 4$  sont présentés aux figures 5.4 et 5.5 respectivement avec  $\omega_L^2 = 1$ , pour la pulsation angulaire  $\omega = 0,95$  permettant l'observation des breathers dans le système de sine-Gordon classique (où  $\omega_{NL}^2 = 0$ ). Les figures 5.4(a), 5.4(c), 5.4(e), 5.5(a), 5.5(c) et 5.5(e), obtenues de la réponse du système excité à son entrée par un signal d'amplitude  $A$ , choisi un peu en-dessous du seuil  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  correspondant, montrent que le milieu soutient une onde évanescente. En revanche, lorsque l'amplitude  $A$  est choisie légèrement au-delà du seuil  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$ , les figures 5.4(b), 5.4(d), 5.5(b) et 5.5(d) indiquent respectivement la signature temporelle et spectrale de modes breathers générés dans le milieu. Ce comportement du milieu est confirmé par les représentations spatio temporelles données aux figures 5.4(f) et 5.5(f).

Les mêmes comportements sont observés aux figures 5.6 (pour  $\omega_{NL}^2 = 1$ ) et 5.7 (pour  $\omega_{NL}^2 = 4$ ) où cette fois le coefficient de couplage linéaire vaut  $\omega_L^2 = 4$ .

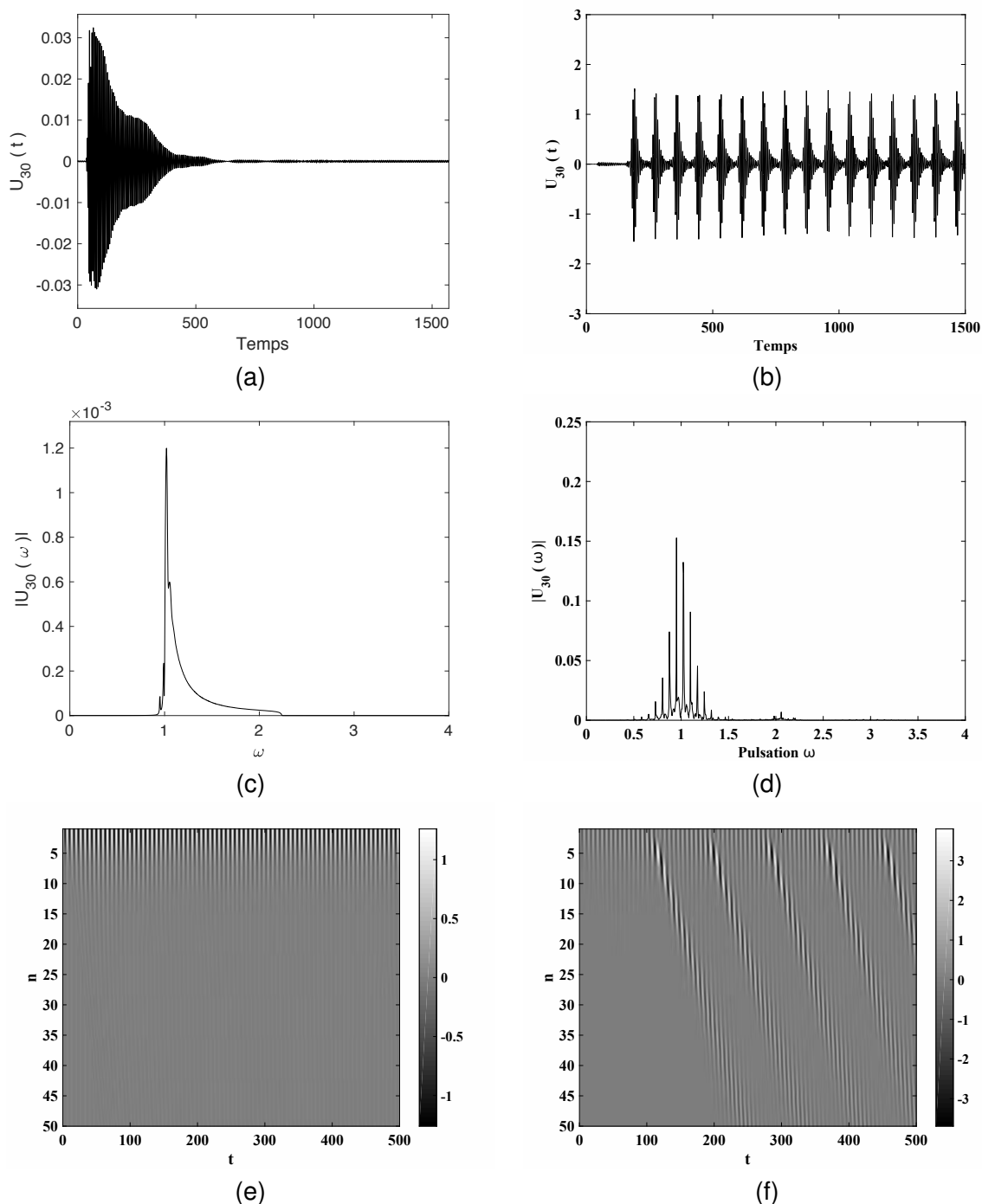


FIGURE 5.4 – Changement de comportement dans le modèle de sine-Gordon modifié en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(1,1)} = 1.27$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 1$  et  $\omega_{NL}^2 = 1$ .

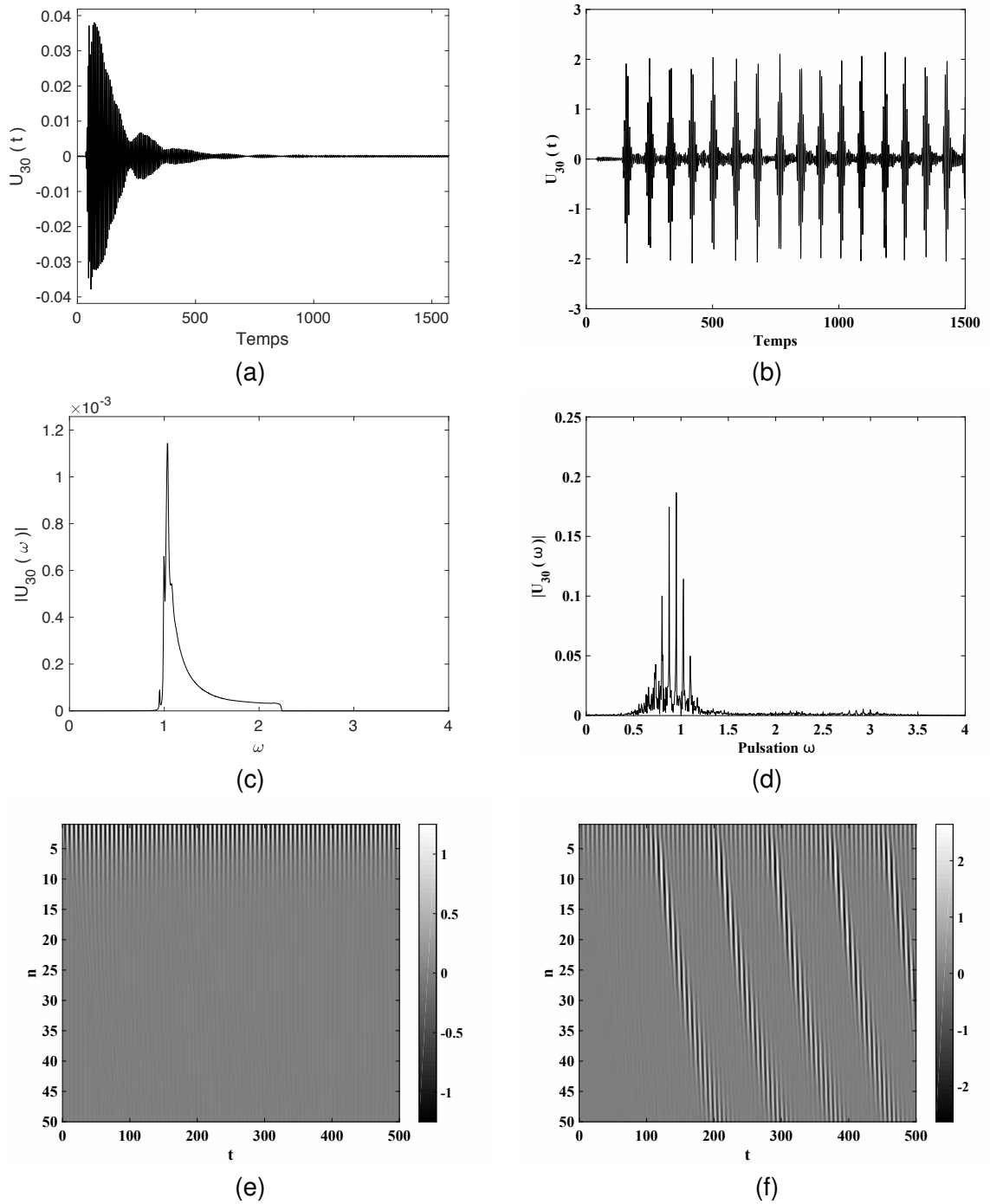


FIGURE 5.5 – Changement de comportement dans le modèle de sine-Gordon modifié en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(1,4)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 1$  et  $\omega_{NL}^2 = 4$ .

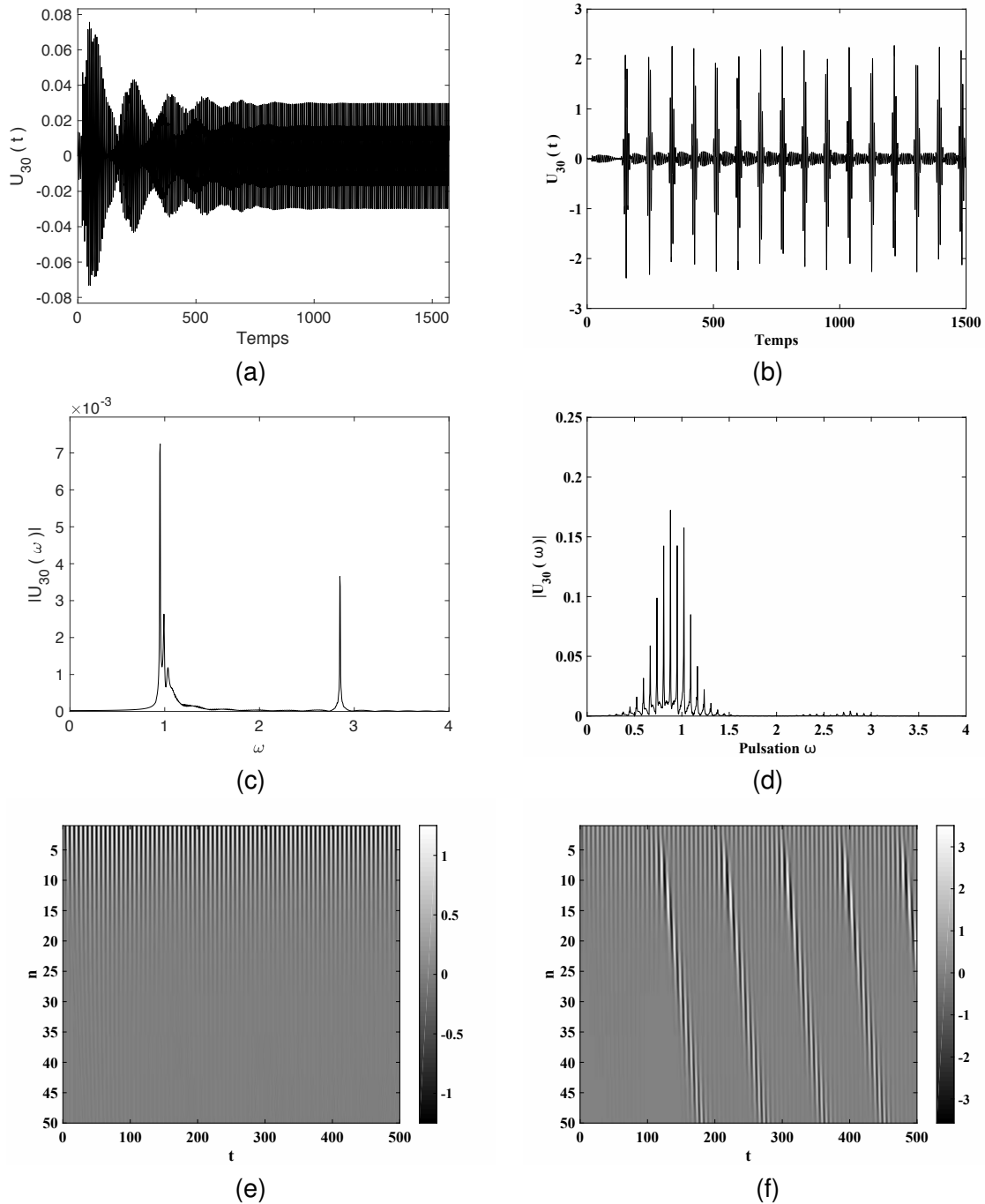


FIGURE 5.6 – Changement de comportement dans le modèle de sine-Gordon modifié en fonction du paramètre d’amplitude  $A$  de l’onde excitatrice. Les valeurs d’amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d’amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l’évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l’amplitude seuil  $A_{th,(4,1)} = 1,26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0,95$ ,  $\omega_L^2 = 4$  et  $\omega_{NL}^2 = 1$ .



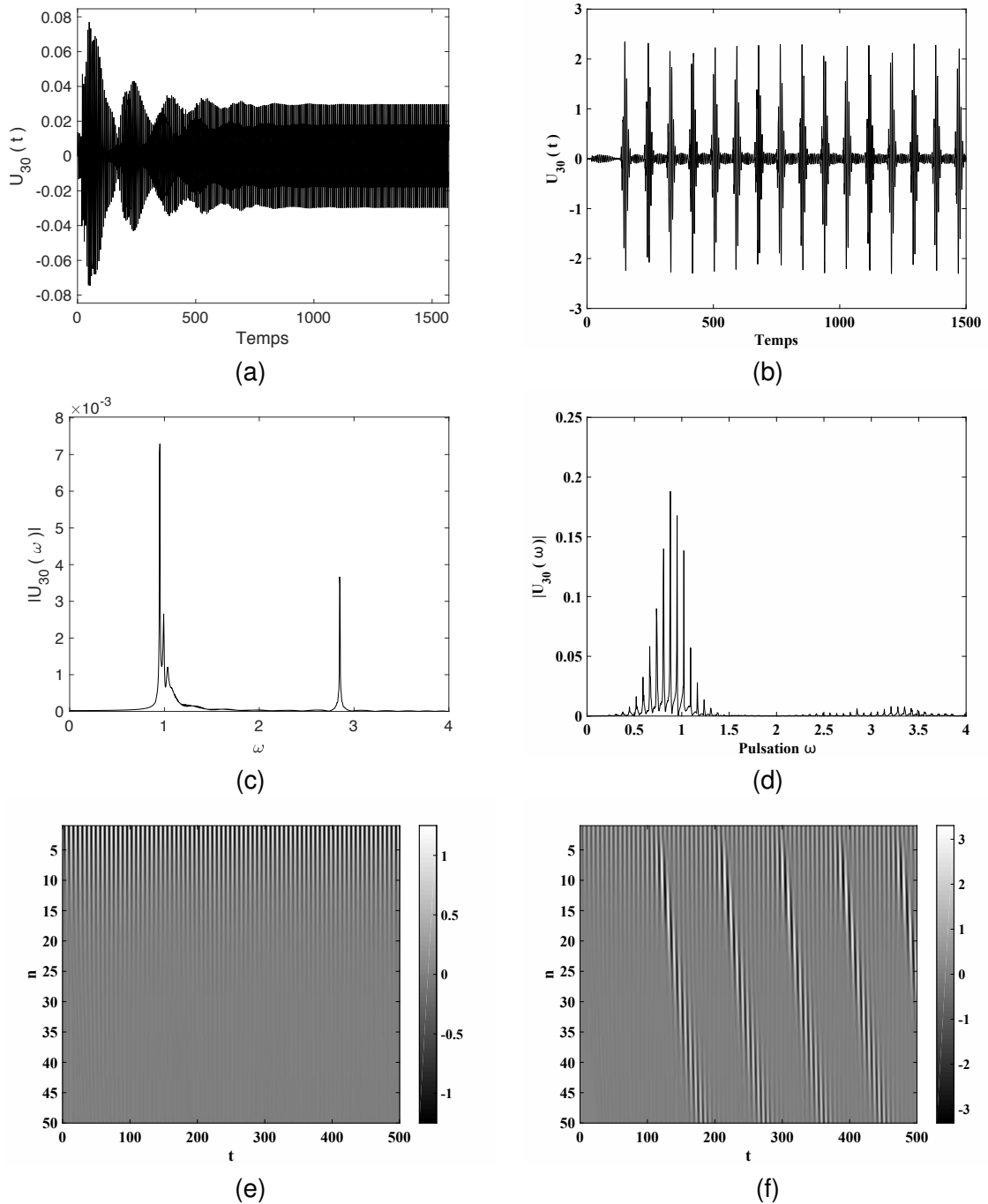


FIGURE 5.7 – Changement de comportement dans le modèle de sine-Gordon modifié en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1, 25$  et  $A = 1, 27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,4)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 4$  et  $\omega_{NL}^2 = 4$ .

Pour caractériser le phénomène de supratransmission dans un système, il faut déterminer, pour chaque pulsation  $\omega$  prise dans le gap, la valeur d'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  permettant au système de transmettre de l'énergie sous forme de modes non linéaires. L'évolution de l'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$ , qui déclenche le phénomène de supratransmission, par rapport à la pulsation angulaire  $\omega$  est présentée aux figures 5.8(a) (où  $\omega_L^2 = 1$ ) et 5.8(b) (où  $\omega_L^2 = 4$ ) pour cinq valeurs de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  sélectionnées.

La figure 5.8 montre que dans l'intervalle de pulsations  $[0.9, 1]$ , les écarts entre la courbe d'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  du modèle classique de sine-Gordon (cas où  $\omega_{NL}^2 = 0$ ), permettant la génération des breathers dans le système, et les courbes d'amplitude critique du modèle de sine-Gordon modifié sont très faibles. Les écarts entre ces courbes d'amplitude critique permettant le déclenchement de modes non linéaires, tant dans le système classique de sine-Gordon que dans le système de sine-Gordon modifié, sont conséquents dans l'intervalle de pulsations  $\omega < 0.8$ . En effet, on observe que lorsque la valeur de couplage non linéaire augmente, la valeur critique qui déclenche la supratransmission diminue comme représenté sur les figures 5.8(a) et 5.8(b). De plus, la figure 5.8(a), obtenue pour la valeur de couplage linéaire  $\omega_L^2 = 1$ , montre que les plus grands écarts entre les courbes de valeurs d'amplitude critiques sont observées pour la plus faible valeur de couplage linéaire.

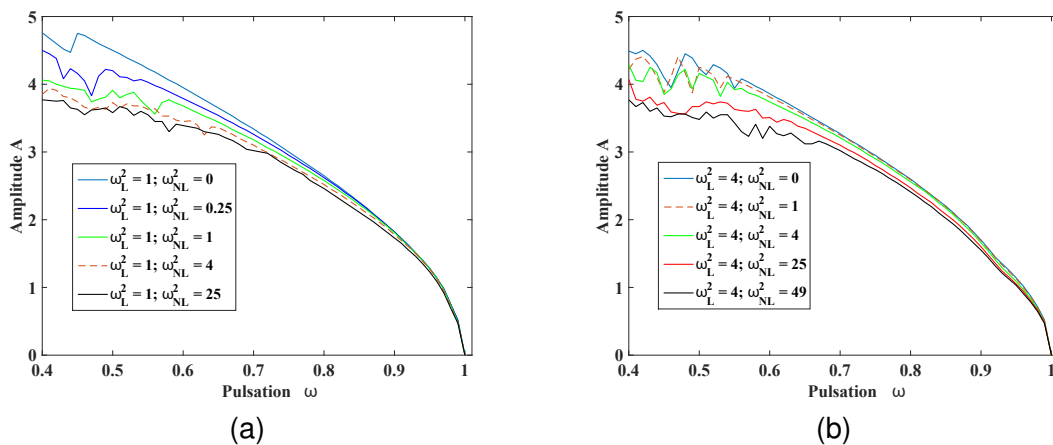


FIGURE 5.8 – Amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  déclenchant la supratransmission en fonction de la pulsation d'excitation  $\omega$  pour différentes valeurs du couplage non linéaire. Les paramètres du réseau sont :  $N = 300$  cellules,  $\gamma = 0.01$ ,  $\omega_0^2 = 1$ . Pour la figure 5.8(a), le couplage linéaire est  $\omega_L^2 = 1$  tandis que pour la figure 5.8(b) le couplage linéaire est  $\omega_L^2 = 4$ .

La figure 5.8 résume le comportement du seuil d'amplitude déclenchant la supratransmission en fonction de la pulsation  $\omega$  pour différentes valeurs de couplage non linéaire et les deux valeurs spécifiques de couplage linéaire  $\omega_L^2 = 1$  et  $\omega_L^2 = 4$ . Pour construire la figure 5.8(a), nous avons défini la valeur du coefficient de couplage linéaire à  $\omega_L^2 = 1$  et avons fait varier celle du coefficient de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$ . De même, pour construire la figure 5.8(b), nous avons défini la valeur du coefficient de couplage linéaire à  $\omega_L^2 = 4$  et aussi fait varier celle du coefficient de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$ .

Des simulations numériques, en considérant les paramètres  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 0)$  pour la figure 5.9(a) et  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  pour la figure 5.9(b), en parcourant le plan  $(A_{th}(\omega_L^2, \omega_{NL}^2), \omega)$  nous permettent de segmenter la droite des pulsations en trois parties en fonction du type de solutions observées lorsqu'il y a transmission d'énergie dans le milieu via le phénomène de supratransmission, comme le montre la figure résumée 5.9 :

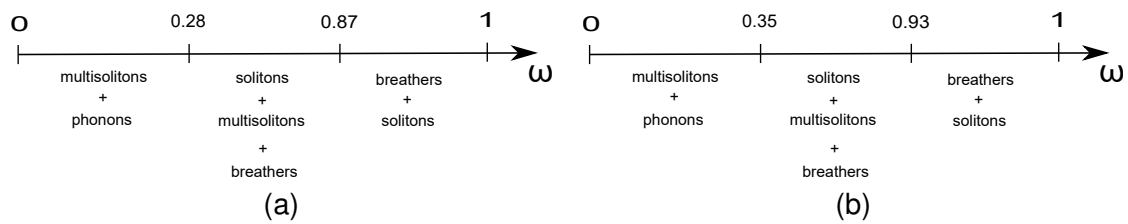


FIGURE 5.9 – Différents types de solutions dans le gap du modèle de sine-Gordon modifié. Paramètres : pour 5.9(a)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 0)$  et pour 5.9(b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ .

Pour les paramètres  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 0)$ , lorsque la pulsation  $\omega$  est inférieure à  $0.28\omega_0$ , on observe des solutions multisolitons [87] et phonons (quants d'énergie [88]) comme on le voit à la figure 5.10(a). Lorsque la pulsation  $\omega$  appartient à l'intervalle  $[0.28\omega_0; 0.87\omega_0]$ , nous avons des solutions solitons, multisolitons et breathers comme à la figure 5.10(c) et finalement lorsque la pulsation  $\omega$  appartient à l'intervalle  $[0.87\omega_0; \omega_0]$ , la figure 5.10(e) nous montre qu'on observe des solutions solitons et breathers dans le milieu.

Pour les paramètres  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ , lorsque la pulsation  $\omega$  est inférieure à  $0.35\omega_0$ , on observe des solutions multisolitons et phonons comme on le voit à la figure 5.10(b). Lorsque la pulsation  $\omega$  appartient à l'intervalle  $[0.35\omega_0; 0.93\omega_0]$ , nous avons des solutions solitons, multisolitons et breathers comme à la figure 5.10(d) et finalement lorsque la pulsation  $\omega$  appartient à l'intervalle  $[0.93\omega_0; \omega_0]$ , la figure 5.10(f) nous montre qu'on observe des solutions solitons et breathers dans le milieu [7].

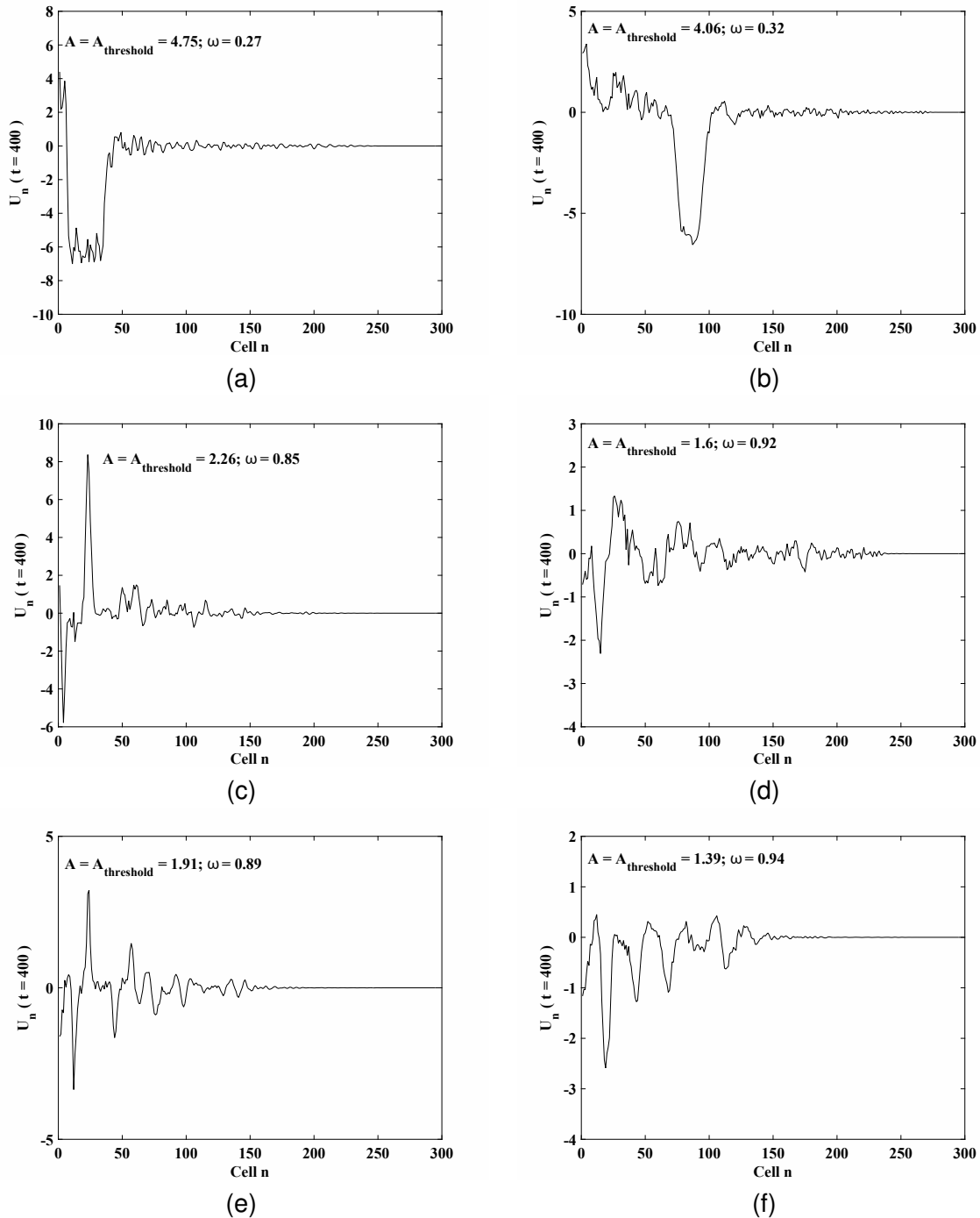


FIGURE 5.10 – Profil des solutions observées dans le Gap d’un milieu de sine-Gordon classique et sine-Gordon modifié. L’état du milieu est observé à  $t = 400$  pour les paramètres fixés suivants :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 0)$  pour 5.10(a), 5.10(c) et 5.10(e) tandis que  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  pour 5.10(b), 5.10(d) et 5.10(f).

## 5.4/ CONCLUSION

Nous avons réalisé l'étude de la supratransmission dans une chaîne de sine-Gordon modifiée. Pour des pulsations prises dans le gap du système, les résultats obtenus par différentes simulations confirment ceux proposés par Geniet et Léon dont les résultats de travaux ont été rappelés dans ce chapitre pour servir de références. Suite à cette étude, nous pouvons tirer quelques conclusions : tout naturellement, le phénomène de supratransmission dépend de l'amplitude du signal de forçage. Les modes générés dans le milieu lorsqu'il y a supratransmission sont liés à la région de pulsation où apparaît le phénomène [7]. L'intérêt de notre étude montre surtout que pour une valeur du coefficient de couplage linéaire pur  $\omega_L^2$  donnée, l'amplitude seuil permettant le déclenchement du phénomène de supratransmission dans le milieu diminue lorsque la valeur du coefficient de couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$  augmente.



## CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons abordé l'étude déterministe des excitations localisées dans des milieux de transmission non linéaires, notamment ceux modélisés par les équations de Klein-Gordon d'ordre 3 et de Klein-Gordon d'ordre 5, systèmes pris avec un couplage mixte où le couplage linéaire pur est associé au couplage non linéaire. Nous avons également étudié le phénomène de supratransmission, en régime déterministe (c'est à dire sans bruit), dans des milieux de transmission non linéaires modélisés par les équations de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte et de sine-Gordon modifiée, qui sont des systèmes passe-bande.

Considérant un réseau de transmission non linéaire modélisée par l'équation de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte, nous avons, dans un premier temps, établi analytiquement la dynamique interne du modèle de ligne en déterminant des solutions de l'équation de Klein-Gordon d'ordre 3 par application de la méthode à échelles multiples et de l'approximation quasi discrète. Nous avons pu comparer nos résultats analytiques avec ceux issus de nos simulations numériques. Le bon accord entre ces derniers nous a permis de montrer que les résultats analytiques obtenus représentent la dynamique interne de la ligne de transmission non linéaire modélisée par l'équation de Klein-Gordon d'ordre 3 à couplage mixte. Ensuite, nous avons numériquement établi l'existence du phénomène d'instabilité modulationnelle dans le gap du système. Nous avons ainsi montré que l'une des conséquences de l'existence de l'instabilité modulationnelle dans le gap du système est la formation de modes non linéaires localisés de type breathers. Une étude similaire a été réalisée pour une ligne de transmission non linéaire modélisée par l'équation de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte.

Nous avons aussi numériquement étudié le phénomène de supratransmission,

en régime déterministe, dans un milieu de transmission non linéaire modélisé par l'équation de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte, précédemment considéré. Nous avons montré que lorsque celui-ci est excité sinusoïdalement à une de ses extrémités avec une fréquence prise dans la bande interdite, alors il se forme, selon la valeur de l'amplitude de forçage, des modes non linéaires. Il a pu être établi, selon la symétrie et l'asymétrie des coefficients de couplage linéaire et non linéaire, les courbes d'évolution de l'amplitude seuil permettant le déclenchement du phénomène de supratransmission dans le système en fonction de la pulsation de forçage. Nous avons ainsi pu montrer que lorsque la valeur du coefficient de couplage linéaire est fixée et prise constante, la valeur de l'amplitude seuil, nécessaire pour déclencher le phénomène de supratransmission, diminue lorsque la valeur du coefficient de couplage non linéaire augmente. Une étude similaire a également été réalisée pour un milieu de transmission non linéaire modélisé par l'équation de sine-Gordon modifiée. L'équation de sine-Gordon modifiée dont il est question ici est celle obtenue en rajoutant un couplage non linéaire à l'équation de sine-Gordon classique connue dans la littérature. En plus de l'étude du phénomène de supratransmission réalisée dans ce dernier modèle, nous avons aussi déterminé les différentes formes de solutions observées en fonction de la pulsation de gap.

À la suite des travaux réalisés dans cette thèse en régime déterministe, il serait très intéressant de les revoir en régime stochastique en considérant en entrée des milieux de transmission non linéaires à la fois un bruit externe et l'excitation sinusoïdale. L'objectif serait alors de relever les effets bénéfiques de l'apport du bruit dans ces systèmes de transmission modélisés par les équations de Klein-Gordon d'ordre 3, d'ordre 5 et de sine-Gordon modifiée. Il serait également très intéressant d'investiguer sur le phénomène d'abaissement de l'amplitude seuil lorsque le couplage non linéaire augmente. L'objectif étant de déterminer les règles d'abaissement de l'amplitude seuil lorsque le couplage non linéaire augmente, et aussi de savoir si l'amplitude seuil continue de diminuer ou bien si elle sature lorsque le couplage non linéaire continue d'augmenter.



# BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. S. Russell. Report on waves. In *14th meeting of the British Association for the Advancement of Science*, volume 311, page 390, 1844.
- [2] B. J. West. *An essay on the importance of being nonlinear*, volume 62. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] A. C. Scott. *Nonlinear science*, volume 4. Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [4] L. Brillouin. *Wave propagation in periodic structures : electric filters and crystal lattices*. Courier Corporation, 2003.
- [5] W. Chen and D. L. Mills. Gap solitons and the nonlinear optical response of superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, 58(2) :160, 1987.
- [6] S. B. Yamgoué, S. Morfu, and P. Marquié. Noise effects on gap wave propagation in a nonlinear discrete 1 c transmission line. *Phys. Rev. E*, 75(3) :036211, 2007.
- [7] B. Bodo. *Ph.D Thesis. University of Yaounde I (Cameroon) and Université de Bourgogne (France)*. 2009.
- [8] B. Bodo, S. Morfu, P. Marquié, and M. Rosse. Klein-gordon electronic network exhibiting supratransmission effect. *Electron. Lett.*, 46(2) :123–124, 2010.
- [9] Fabien Kenmogne, Guy Bertrand Ndombou, David Yemélé, and Anaclet Fomethe. Nonlinear supratransmission in a discrete nonlinear electrical transmission line : Modulated gap peak solitons. *Chaos, Solitons & Fractals*, 75 :263–271, 2015.
- [10] Behrooz Yousefzadeh and A Srikantha Phani. Supratransmission in a disordered nonlinear periodic structure. *Journal of Sound and Vibration*, 380 :242–266, 2016.
- [11] JD Tchingang Tchameu, C Tchawoua, and AB Togueu Motcheyo. Nonlinear supratransmission of multibreathers in discrete nonlinear schrödinger equation with saturable nonlinearities. *Wave Motion*, 65 :112–118, 2016.

- [12] J. E. Macías-Díaz. Numerical study of the process of nonlinear supratransmission in riesz space-fractional sine-gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 46 :89–102, 2017.
- [13] A. B. Togueu Motcheyo, J. D. Tchingang Tchameu, M. Siewe Siewe, and C. Tchawoua. Homoclinic nonlinear band gap transmission threshold in discrete optical waveguide arrays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 50 :29–34, 2017.
- [14] J. E. Macías-Díaz. Numerical simulation of the nonlinear dynamics of harmonically driven riesz-fractional extensions of the fermi–pasta–ulam chains. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 55 :248–264, 2018.
- [15] F. Geniet and J. Leon. Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain. *Phys. Rev. Lett.*, 89(13) :134102, 2002.
- [16] F. Geniet and J. Leon. Nonlinear supratransmission. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 15(17) :2933, 2003.
- [17] J. Leon. Nonlinear supratransmission as a fundamental instability. *Phys. Lett. A*, 319(1) :130–136, 2003.
- [18] G.-X. Huang. Gap solitons and resonant kinks in one-dimensional heisenberg ferromagnets. *COMMUNICATIONS IN THEORETICAL PHYSICS*, 25 :415–420, 1996.
- [19] B. Z. Essimbi and I. V. Barashenkov. Spatially localized voltage oscillations in an electrical lattice. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 35(12) :1438, 2002.
- [20] M. Remoissenet. Low-amplitude breather and envelope solitons in quasi-one-dimensional physical models. *Phys. Rev. B*, 33(4) :2386, 1986.
- [21] M. Peyrard and T. Dauxois. *Physique des solitons*. EDP Sciences, 2012.
- [22] D. K. Campbell and M. Peyrard. Chaos and order in non-integrable model field theories. Technical report, Los Alamos National Lab., NM (USA), 1989.
- [23] S. Flach and A. V. Gorbach. Discrete breathers—advances in theory and applications. *Phys. Rep.*, 467(1) :1–116, 2008.

- [24] A. J. Sievers and S. Takeno. Intrinsic localized modes in anharmonic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 61(8) :970–973, 1988.
- [25] A. Amo, S. Pigeon, D. Sanvitto, V. G. Sala, R. Hivet, I. Carusotto, F. Pisanello, G. Leménager, R. Houdré, E. Giacobino, et al. Polariton superfluids reveal quantum hydrodynamic solitons. *Science*, 332(6034) :1167–1170, 2011.
- [26] S. Pigeon, I. Carusotto, and C. Ciuti. Hydrodynamic nucleation of vortices and solitons in a resonantly excited polariton superfluid. *Phys. Rev. B*, 83(14) :144513, 2011.
- [27] L. Gordillo and N. Mujica. Solitons hydrodynamiques non-propagatifs. *Résumés des exposés de la 16e Rencontre du Non-Linéaire Paris 2013*, page 59.
- [28] A. Hasegawa and F. Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. i. anomalous dispersion. *Applied Phys. Lett.*, 23(3) :142–144, 1973.
- [29] B. Crosignani and P. Di Porto. Soliton propagation in multimode optical fibers. *Optics letters*, 6(7) :329–330, 1981.
- [30] N. J. Doran and K. J. Blow. Solitons in optical communications. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 19(12) :1883–1888, 1983.
- [31] P. Vandamme, J.-B. Thomine, and P. Gallion. Soliton transmission on optical fibres. In *Annales Des Télécommunications*, volume 50, pages 79–97. Springer, 1995.
- [32] D. Mihalache, D. Mazilu, F. Lederer, B. A. Malomed, Y. V. Kartashov, L.-C. Crasovan, and L. Torner. Stable spatiotemporal solitons in bessel optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 95(2) :023902, 2005.
- [33] Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner. Solitons in nonlinear lattices. *Reviews of Modern Physics*, 83(1) :247, 2011.
- [34] B. Z. Essimbi, A. M. Dikandé, T. C. Kofané, and A. A. Zibi. Asymmetric gap solitons in a non-linear lc transmission line. *Physica Scripta*, 52(1) :17, 1995.
- [35] S. A. Kiselev and A. J. Sievers. Generation of intrinsic vibrational gap modes in three-dimensional ionic crystals. *Phys. Rev. B*, 55(9) :5755–5758, 1997.

- [36] G. Huang and B. Hu. Asymmetric gap soliton modes in diatomic lattices with cubic and quartic nonlinearity. *Phys. Rev. B*, 57(10) :5746, 1998.
- [37] A. De Rossi, C. Conti, and S. Trillo. Stability, multistability, and wobbling of optical gap solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :85–88, 1998.
- [38] T. Iizuka and Y. S. Kivshar. Optical gap solitons in nonresonant quadratic media. *Phys. Rev. E*, 59(6) :7148–7151, 1999.
- [39] M. Scalora, J. P. Dowling, C. M. Bowden, and M. J. Bloemer. Optical limiting and switching of ultrashort pulses in nonlinear photonic band gap materials. *Phys. Rev. Lett.*, 73(10) :1368, 1994.
- [40] J. Leon and A. Spire. Gap soliton formation by nonlinear supratransmission in Bragg media. *Phys. Lett. A*, 327(5) :474–480, 2004.
- [41] J. E. Macías-Díaz and A. Puri. An application of nonlinear supratransmission to the propagation of binary signals in weakly damped, mechanical systems of coupled oscillators. *Phys. Lett. A*, 366(4) :447–450, 2007.
- [42] H.-Y. D. Yang, N. G. Alexopoulos, and E. Yablonovitch. Photonic band-gap materials for high-gain printed circuit antennas. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 45(1) :185–187, 1997.
- [43] F.-R. Yang, K.-P. Ma, Y. Qian, and T. Itoh. A uniplanar compact photonic-bandgap (uc-pbg) structure and its applications for microwave circuit. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 47(8) :1509–1514, 1999.
- [44] P. Marquié, J.-M. Bilbault, and M. Remoissenet. Observation of nonlinear localized modes in an electrical lattice. *Phys. Rev. E*, 51(6) :6127, 1995.
- [45] B. Z. Essimbi, L. Ambassa, and T. C. Kofane. Gap solitons on a coupled nonlinear transmission line. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 106(1) :207–217, 1997.
- [46] O. Bang and M. Peyrard. Generation of high-energy localized vibrational modes in nonlinear Klein-Gordon lattices. *Phys. Rev. E*, 53(4) :4143, 1996.
- [47] T. Taniuti and N. Yajima. Perturbation method for a nonlinear wave modulation. i. *Journal of Mathematical Physics*, 10(8) :1369–1372, 1969.

- [48] A. Tsurui. Wave modulations in anharmonic lattices. *Progress of Theoretical Physics*, 48(4) :1196–1203, 1972.
- [49] B. Z. Essimbi. Gap soliton excitations in a model of an electric circuit. *Physica Scripta*, 67(2) :164, 2003.
- [50] T. Dauxois, M. Peyrard, and C. R. Willis. Localized breather-like solution in a discrete klein-gordon model and application to dna. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 57(3) :267–282, 1992.
- [51] P. T. Dinda and M. Remoissenet. Breather compactons in nonlinear klein-gordon systems. *Phys. Rev. E*, 60(5) :6218, 1999.
- [52] J. C. Comte. Exact discrete breather compactons in nonlinear klein-gordon lattices. *Phys. Rev. E*, 65(6) :067601, 2002.
- [53] Y.-G. Liang and Z.-Q. Ma. Levinson’s theorem for the klein-gordon equation. *Phys. Rev. D*, 34(2) :565, 1986.
- [54] G. L. Alfimov, E. V. Medvedeva, and D. E. Pelinovsky. Wave systems with an infinite number of localized traveling waves. *Phys. Rev. Lett.*, 112(5) :054103, 2014.
- [55] P. Rosenau and A. Pikovsky. Breathers in strongly anharmonic lattices. *Phys. Rev. E*, 89(2) :022924, 2014.
- [56] T. Dauxois, M. Peyrard, and C. R. Willis. Discreteness effects on the formation and propagation of breathers in nonlinear klein-gordon equations. *Phys. Rev. E*, 48(6) :4768, 1993.
- [57] M. J. Ablowitz and H. Segur. *Solitons and the inverse scattering transform*, volume 4. SIAM, 1981.
- [58] M. Remoissenet. *Waves called solitons : concepts and experiments*. Springer, 1999.
- [59] M. Peyrard. The pathway to energy localization in nonlinear lattices. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 119(1) :184–199, 1998.
- [60] IM Ryshik and IS Gradstein. *Tables of integrals, series, and products*, 1965.
- [61] S. Dusuel, P. Michaux, and M. Remoissenet. From kinks to compactonlike kinks. *Phys. Rev. E*, 57(2) :2320, 1998.

- [62] G. Zhou, Y. Duan, and J. Yan. Comparative study of nonlinear localized modes of diatomic chains with two types of quartic nonlinearity. *Phys. Rev. B*, 53(21) :13977, 1996.
- [63] J.-G. Caputo, J. Leon, and A. Spire. Nonlinear energy transmission in the gap. *Phys. Lett. A*, 283(1) :129–135, 2001.
- [64] R. Khomeriki and J. Leon. Bistability in the sine-gordon equation : The ideal switch. *Phys. Rev. E*, 71(5) :056620, 2005.
- [65] B. Bodo, S. Morfu, P. Marquié, and B. Z. Essimbi. Noise induced breather generation in a sine–gordon chain. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2009(01) :P01026, 2009.
- [66] J. E. Macías-Díaz and A. Puri. On the propagation of binary signals in damped mechanical systems of oscillators. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 228(2) :112–121, 2007.
- [67] J. Ruiz-Ramírez and J. E. Macías-Díaz. On the propagation of binary signals in a two-dimensional nonlinear lattice with nearest-neighbor interactions. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 17(02) :127–136, 2010.
- [68] J. E. Macías-Díaz. On the controlled propagation of wave signals in a sinusoidally forced two-dimensional continuous frenkel–kontorova model. *Wave Motion*, 48(1) :13–23, 2011.
- [69] A. B. Togueu Motcheyo, C. Tchawoua, and J. D. Tchingang Tchameu. Supratransmission induced by waves collisions in a discrete electrical lattice. *Phys. Rev. E*, 88(4) :040901, 2013.
- [70] A. B. Togueu Motcheyo, C. Tchawoua, M. Siewe Siewe, and J. D. Tchingang Tchameu. Supratransmission phenomenon in a discrete electrical lattice with nonlinear dispersion. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(4) :946–952, 2013.
- [71] K. T. V. Koon, P. Marquié, and P. Tchofo Dinda. Experimental observation of the generation of cutoff solitons in a discrete l c nonlinear electrical line. *Phys. Rev. E*, 90(5) :052901, 2014.

- [72] J. Lydon, G. Theocharis, and C. Daraio. Nonlinear resonances and energy transfer in finite granular chains. *Phys. Rev. E*, 91(2) :023208, 2015.
- [73] R. Khomeriki. Nonlinear band gap transmission in optical waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 92(6) :063905, 2004.
- [74] H. Susanto. Boundary driven waveguide arrays : Supratransmission and saddle-node bifurcation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 69(1) :111–125, 2008.
- [75] H. Susanto and N. Karjanto. Calculated threshold of supratransmission phenomena in waveguide arrays with saturable nonlinearity. *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*, 17(02) :159–165, 2008.
- [76] R. Khomeriki and J. Leon. Light detectors bistable nonlinear waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 94(24) :243902, 2005.
- [77] R. Khomeriki and J. Leon. Tristability in the pendula chain. *Phys. Rev. E*, 78(5) :057202, 2008.
- [78] R. Khomeriki and J. Leon. Gap soliton dynamics in an optical lattice as a parametrically driven pendulum. *Phys. Rev. A*, 80(3) :033822, 2009.
- [79] P Anghel-Vasilescu, Jerome Dorignac, Frédéric Geniet, J. Leon, and A. Taki. Generation and dynamics of quadratic birefringent spatial gap solitons. *Phys. Rev. A*, 83(4) :043836, 2011.
- [80] D. Chevriaux, R. Khomeriki, and J. Leon. Theory of a josephson junction parallel array detector sensitive to very weak signals. *Phys. Rev. B*, 73(21) :214516, 2006.
- [81] R. Khomeriki, J. Leon, and D. Chevriaux. Quantum hall bilayer digital amplifier. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 49(2) :213–218, 2006.
- [82] J. E. Macías-Díaz and A. Puri. On the transmission of binary bits in discrete josephson-junction arrays. *Phys. Lett. A*, 372(30) :5004–5010, 2008.
- [83] R. Khomeriki and J. Leon. Fluxon dynamics in boundary driven josephson transmission line. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 150, page 022035. IOP Publishing, 2009.

- [84] J. E. Macías-Díaz and S. Jerez-Galiano. Two finite-difference schemes that preserve the dissipation of energy in a system of modified wave equations. *arXiv preprint arXiv :1112.0594*, 2011.
- [85] C. Guarcello, K. Fedorov, D. Valenti, B. Spagnolo, and A. Ustinov. Sine-gordon breathers generation in driven long josephson junctions. *arXiv preprint arXiv :1501.04037*, 2015.
- [86] M. Malishava and R. Khomeriki. All-phononic digital transistor on the basis of gap-soliton dynamics in an anharmonic oscillator ladder. *Phys. Rev. Lett.*, 115(10) :104301, 2015.
- [87] N. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, and J. M. Soto-Crespo. Multisoliton solutions of the complex ginzburg-landau equation. *Physical review letters*, 79(21) :4047, 1997.
- [88] J. Valentin. Modélisation du transport de phonons dans les semi-conducteurs nano-structurés. 2015.



# TABLE DES FIGURES

2.1	Représentation de la courbe de dispersion linéaire théorique du système de Klein-Gordon d'ordre 3. La pulsation $\omega$ , donnée à la relation (2.3), est tracée en fonction du nombre d'onde $k$ pour les paramètres $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ , $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . .	12
2.2	Représentation du produit entre le paramètre de dispersion $P$ et de non linéarité $Q$ de l'équation de NLS en fonction du nombre d'onde $k$ . Le produit $PQ$ est calculé à partir des relations (2.21) et (2.20) en utilisant les expressions (2.3) et (2.15). Paramètres : $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ , $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . .	16
2.3	Représentation de $(v')^2$ en fonction du nombre d'onde $\delta$ de la perturbation. Paramètres : $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ , $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ , $a_0 = 1$ et $k = 0.25 \text{ Cell}^{-1}$ . . . . .	21
2.4	Représentation de $(v')^2$ en fonction du nombre d'onde $\delta$ de perturbation. Paramètres : $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ , $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ , $a_0 = 1$ et $k = 0.914 \text{ Cell}^{-1}$ . . . . .	21
2.5	Évolution temporelle du signal exciteur de la ligne. Paramètres : $a_0 = 1$ . . . . .	22
2.6	Évolution temporelle de la cellule $n = 30$ pour deux nombres d'onde $k$ différents, (a) : $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$ et (b) : $k = 0.88 \text{ Cell}^{-1}$ . Paramètres : $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ , $a_0 = 1$ , $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ et $N = 1000 \text{ Cellules}$ . . . . .	22
2.7	Représentation spatiale de l'état de la ligne à quatre instants différents. Les instants choisis sont de gauche à droite et de haut en bas. $t = 0$ , $t = 122.15$ , $t = 244.31$ et $t = 366.47$ . Le profil de solution théorique, donné par l'expression (2.33), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulation numérique de l'équation (2.1) avec l'expression (2.33) comme conditions initiales. Paramètres : $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ , $\omega_0^2 = \text{ rad.s}^{-1}$ , taille du réseau $N = 1000 \text{ Cellules}$ , $n_0 = 200$ , $\lambda_0 = 0.001$ , $k = 0.85 \text{ Cell}^{-1}$ et le pas d'intégration de l'équation différentielle est $\Delta t = 0.01$ . . . . .	23

- 2.8 Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  donné à l'équation (2.45) et le paramètre de non linéarité  $Q$  donné à l'équation (2.46), en fonction du nombre d'onde  $k$  de l'enveloppe pour deux valeurs de couplages  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)$ . (a) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et (b) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ . . . . . 26
- 2.9 Représentation de  $(v')^2$  en fonction du nombre de la perturbation pour trois valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$  et pour chacun des deux couplages étudiés. À la colonne de gauche  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et à droite  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ . Le nombre d'onde  $k$  vaut de haut en bas (a)  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$ , (b)  $k = 1 \text{ Cell}^{-1}$ , (c)  $k = 2.5 \text{ Cell}^{-1}$ , (d)  $k = 0.2 \text{ Cell}^{-1}$ , (e)  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$ , et (f)  $k = 0.7 \text{ Cell}^{-1}$ . Les paramètres sont :  $\omega_0^2 = 1$  et  $a_0 = 1$ . . . . . 28
- 2.10 Évolution temporelle de la cellule  $n = 30$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $a_0 = 1$ , pour 2.10(a)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$ ,  $k = 0.25$  et pour 2.10(b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ ,  $k = 0.16 \text{ Cell}^{-1}$ . . . . . 30
- 2.11 Représentation spatiale de l'état de la ligne à quatre instants différents. Les instants choisis sont de gauche à droite et de haut en bas.  $t = 0$ ,  $t = 102.25$ ,  $t = 204.51$  et  $t = 306.77$ . Le profil de solution théorique, donné à l'expression (2.41), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (2.40) avec l'expression (2.41) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.001$ ,  $n_0 = 200$ ,  $N = 600$  cellules,  $k = 0.2 \text{ Cell}^{-1}$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ , et le pas d'intégration de l'équation différentielle est  $\Delta t = 0.01$ . . . . . 30
- 2.12 Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  donné à l'équation (2.45) et le paramètre de non linéarité  $Q$  donné à l'équation (2.46), en fonction du nombre d'onde  $k$  pour deux jeux de couplage. (a) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et (b) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ . . . . . 31
- 2.13 Représentation de  $(v')^2$  en fonction du nombre d'onde  $\delta$  des perturbations pour deux valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$  et pour les deux jeux de couplage étudiés. À la colonne gauche  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et à droite  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ . (a) :  $k = 0.4 \text{ Cell}^{-1}$ , (b) :  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$ , (c) :  $k = 0.2 \text{ Cell}^{-1}$ , et (d) :  $k = 0.4 \text{ Cell}^{-1}$ . Les paramètres sont :  $\omega_0^2 = 1$  et  $a_0 = 1$ . . . . . 32

2.14 Évolution temporelle de la cellule  $n = 30$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $a_0 = 1$ , pour  
 2.14(a)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ ,  $k = 0.1$  et pour 2.14(b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ ,  $k = 0.05$ . 34

2.15 Représentation spatiale de l'état de la ligne à quatre instants différents. Les instants choisis sont de gauche à droite et de haut en bas.  $t = 0$ ,  $t = 259.2$ ,  $t = 518.41$  et  $t = 777.62$ . Le profil de solution théorique, donné à l'expression (2.41), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (2.40) avec l'expression (2.41) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.001$ ,  $n_0 = 200$ ,  $N = 600$  cellules,  $k = 0.25 \text{ Cell}^{-1}$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ , et le pas d'intégration de l'équation différentielle est  $\Delta t = 0.01$ . . . . . 35

3.1 Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  donné à l'équation (3.7) et le paramètre de dispersion  $Q$  donné à l'équation (3.8) en fonction du nombre d'onde  $k$ . Paramètres :  $\omega_L^2 = 4$  et  $\omega_0^2 = 1$ . . . . . 41

3.2 Représentation de  $(v')^2$  en fonction des perturbations pour deux valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$  de l'enveloppe. (a)  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$ , (b)  $k = 0.7 \text{ Cell}^{-1}$ . Les paramètres sont :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega_L^2 = 4$  et l'amplitude de la perturbation est  $a_0 = 1$ . . . . . 42

3.3 État de la ligne à quatre instants différents.  $t = 0$ ,  $t = 55$ ,  $t = 111$  et  $t = 167$ . Le profil de solution théorique, donné par l'expression (3.9), est représenté en trait plein et les croix représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (3.1) avec l'expression (3.9) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_L^2 = 4$ ,  $\omega_0^2 = 1$ , taille du réseau  $N = 500$  Cellules,  $n_0 = 100$ ,  $\lambda_0 = 0.003$ ,  $k = 0.5$  et  $\Delta t = 0.01$ . . . . . 43

3.4 État du réseau en quelques instants différents. Les croix sont obtenues par simulations numériques de l'intégration de l'équation de Klein-Gordon d'ordre 5 (3.1) en utilisant l'expression théorique (3.11) comme conditions initiales, représentée quant à elle en trait plein. Paramètres :  $\omega_L^2 = 4$ ,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $N = 500$  Cellules,  $n_0 = 250$ ,  $\lambda_0 = 0.003$  et  $k = 0$ . . . . . 44

- 3.5 Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  donné par l'équation (3.7) et le paramètre de dispersion  $Q$  donné par l'équation (3.17) en fonction du nombre d'onde  $k$ , pour deux valeurs de couplage différentes. (a) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et (b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ . . . . . 46
- 3.6 Représentation de  $(v')^2$  en fonction des perturbations pour trois valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$  pour chacun des deux valeurs de couplages spécifiques étudiées. À la colonne de gauche,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et celle de droite  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ . Les trois valeurs du nombre d'onde  $k$ , pour le couplage spécifique  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  représenté à la colonne de gauche, sont de haut en bas (a)  $k = 0.6 \text{ Cell}^{-1}$ , (b)  $k = 0.7 \text{ Cell}^{-1}$ , (c)  $k = 1.8 \text{ Cell}^{-1}$ , et pour le couplage spécifique  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$  représenté à la colonne de droite (d)  $k = 0.25 \text{ Cell}^{-1}$ , (e)  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$  et (f)  $k = 1.8 \text{ Cell}^{-1}$ . Les paramètres du réseau sont :  $\omega_0^2 = 1$  et  $a_0 = 1$ . . . . . 48
- 3.7 Évolution temporelle de la cellule  $n = 30$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $a_0 = 1$ , pour 3.7(a)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$ ,  $k = 0.5$  et pour 3.7(b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$ ,  $k = 0.05$ . . . 49
- 3.8 État de la ligne à quatre instants différents :  $t = 0$ ,  $t = 211$ ,  $t = 422$  et  $t = 634$ . Le profil de la solution théorique, donnée à l'expression (3.13), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (1.1) avec l'expression (3.13) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.003$ ,  $n_0 = 100$ ,  $N = 500$  cellules,  $k = 0.5$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 1)$  et  $\Delta t = 0.01$ . . . . . 49
- 3.9 État de la ligne à quatre instants différents :  $t = 0$ ,  $t = 55$ ,  $t = 111$  et  $t = 167$ . Le profil de la solution théorique, donnée à l'expression (3.13), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (1.1) avec l'expression (3.13) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.003$ ,  $n_0 = 100$ ,  $N = 500$  cellules,  $k = 0.5$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 4)$  et  $\Delta t = 0.01$ . . . . . 50
- 3.10 Représentation du produit entre le paramètre de dispersion  $P$  donné à l'équation (3.7) et le paramètre de dispersion  $Q$  donné à l'équation (3.17) en fonction du nombre d'onde  $k$  pour deux jeux de couplages différents. (a) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et (b) :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ . . . . . 51

3.11 Représentation de  $(v')^2$  en fonction des perturbations pour deux valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$ . (a)  $k = 0.4 \text{ Cell}^{-1}$  et (b)  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$ . Les paramètres sont :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et l'amplitude de la perturbation est  $a_0 = 1$ . . . . . 52

3.12 Représentation de  $(v')^2$  en fonction des perturbations pour deux valeurs caractéristiques du nombre d'onde  $k$ . (a)  $k = 0.2 \text{ Cell}^{-1}$  et (b)  $k = 0.5 \text{ Cell}^{-1}$ . Les paramètres sont :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$  et l'amplitude de la perturbation est  $a_0 = 1$ . . . . . 52

3.13 Évolution temporelle de la cellule  $n = 30$ . Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $a_0 = 1$ , pour 3.13(a)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ ,  $k = 0.13$  et pour 3.13(b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (4, 16)$ ,  $k = 0.16$ . 53

3.14 État de la ligne à quatre instants différents :  $t = 0$ ,  $t = 219$ ,  $t = 438$  et  $t = 657$ . Le profil de la solution théorique, donnée à l'expression (3.13), est représenté en trait plein et les étoiles représentent les résultats de simulations numériques de l'équation (1.1) avec l'expression (3.13) comme conditions initiales. Paramètres :  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.003$ ,  $n_0 = 100$ ,  $N = 500$  cellules,  $k = 0.4$ ,  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  et  $dt = 0.01$ . . . . . 54

4.1 Représentation de la courbe de dispersion théorique du réseau de type Klein-Gordon d'ordre 5 décrit par l'équation (4.6) en fonction du nombre d'onde  $k$ . Paramètres :  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . . 62

4.2 Profil de l'amortissement en fonction de la pulsation angulaire  $\omega$ . Le trait plein représente l'expression théorique (4.7), tandis que les étoiles sont déduites des simulations numériques du modèle défini par l'équation (4.1). Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . . 63

4.3 Profil d'onde évanescence obtenue dans la bande interdite d'un milieu de Klein-Gordon d'ordre 5 pour une valeur du couplage linéaire pur  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ . L'état du milieu est représenté à l'instant  $t = 30$  pour les paramètres fixés suivants :  $A = 0.2$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.9 \text{ rad.s}^{-1}$ . Le trait plein représente le profil théorique (4.9) tandis que les symboles "x" représentent les simulations numériques de l'équation (4.1). . 64

- 4.4 Évolution temporelle des cellules  $n = 5$ ,  $n = 8$  et  $n = 15$ . Paramètres :  
 $A = 0.2$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $T = 180$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$   
 et  $\omega = 0.9 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . . 65
- 4.5 Changement de comportement dans le modèle classique de Klein-Gordon  
 d'ordre 5 en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les  
 valeurs d'amplitude  $A = 1,27$  et  $A = 1,29$  ont servi à obtenir le chro-  
 nogramme de la 30<sup>me</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les  
 spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et  
 (d), l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifur-  
 cation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  
 $A_{th,(1,0)} = 1.28$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,27$  et  
 $A = 1,29$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  
 $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . . 67
- 4.6 Changement de comportement dans le modèle classique de Klein-Gordon  
 en raison du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs  
 d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la  
 30<sup>ème</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude  
 correspondants sont représentés aux figures (c) et (d), l'évolution spatio-  
 temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supra-  
 transmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,0)} = 1.26$  située entre les  
 deux amplitudes proposées  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$ . Paramètres :  $N = 1800$   
 cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . 68
- 4.7 Diagramme de bifurcation du modèle classique de Klein-Gordon d'ordre 5  
 dans le plan de paramètres amplitude-pulsation, pour le couplage linéaire  
 suivant : (a)  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et (b)  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ . La courbe en trait plein  
 correspond à l'amplitude du seuil théorique  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$  prédite par l'équation  
 (4.12) tandis que les croix sont obtenues via des simulations numériques  
 du modèle classique de Klein-Gordon (4.1). Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  
 $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . . 70

4.8 Profil d'ondes évanescentes obtenues dans le Gap d'un milieu de Klein-Gordon d'ordre 5 à couplage mixte pour différentes valeurs du couplage non linéaire  $\omega_{NL}^2$ . L'état du milieu est représenté à l'instant  $t = 30$  pour les paramètres fixés suivants :  $A = 0.2$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.9 \text{ rad.s}^{-1}$ , le couplage non linéaire vaut  $\omega_{NL}^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  (a),  $\omega_{NL}^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  (b),  $\omega_{NL}^2 = 25 \text{ rad.s}^{-1}$  (c) et  $\omega_{NL}^2 = 49 \text{ rad.s}^{-1}$  (d). Le trait plein représente le profil théorique (4.9) tandis que les symboles "x" représentent les simulations numériques de l'équation (1.1). . . . . 72

4.9 Changement de comportement dans le modèle de Klein-Gordon à couplage mixte en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement; les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(1,1)} = 1.27$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . . 73

4.10 Changement de comportement dans le modèle de Klein-Gordon à couplage mixte en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement; les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(1,4)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . . 74

- 4.11 Changement de comportement dans le modèle de Klein-Gordon à couplage mixte en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement; les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,1)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . . 75
- 4.12 Changement de comportement dans le modèle de Klein-Gordon à couplage mixte en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement; les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,4)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.95 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_{NL}^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . . 76
- 4.13 Effet du couplage non linéaire sur l'amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  permettant le déclenchement de la supratransmission dans le modèle de Klein-Gordon mixte, de couplage linéaire  $\omega_L^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  4.13(a) et  $\omega_L^2 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  4.13(b). Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\gamma = 0.01 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . . 77



- 5.1 Changement de comportement dans le modèle classique de sine-Gordon en raison du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(1,0)} = 1.27$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 1$  et  $\omega_{NL}^2 = 0$ . . . . . 82
- 5.2 Changement de comportement dans le modèle classique de sine-Gordon en raison du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,0)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 4$  et  $\omega_{NL}^2 = 0$ . . . . . 83
- 5.3 Diagramme de bifurcation du système de sine-Gordon classique dans le plan de paramètre amplitude-fréquence  $[A, \omega]$ . Le couplage linéaire vaut  $\omega_L^2 = 1$  5.3(a) et  $\omega_L^2 = 4$  5.3(b). La courbe en trait plein correspond à l'amplitude du seuil théorique  $A_{th,(\omega_L^2,0)}$  prédite par l'équation (4.12), tandis que les croix sont obtenues par l'intermédiaire des simulations numériques du modèle classique de sine-Gordon (1.1). Paramètres :  $N = 300$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ . . . . . 84

- 5.4 Changement de comportement dans le modèle de sine-Gordon modifié en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(1,1)} = 1.27$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 1$  et  $\omega_{NL}^2 = 1$ . . . . . 86
- 5.5 Changement de comportement dans le modèle de sine-Gordon modifié en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(1,4)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 1$  et  $\omega_{NL}^2 = 4$ . . . . . 87
- 5.6 Changement de comportement dans le modèle de sine-Gordon modifié en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,1)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 4$  et  $\omega_{NL}^2 = 1$ . . . . . 88

5.7 Changement de comportement dans le modèle de sine-Gordon modifié en fonction du paramètre d'amplitude  $A$  de l'onde excitatrice. Les valeurs d'amplitude  $A = 1,25$  et  $A = 1,27$  ont servi à obtenir le chronogramme de la 30<sup>ième</sup> cellule aux figures (a) et (b) respectivement, les spectres d'amplitude correspondants sont représentés aux figures (c) et (d) et l'évolution spatio-temporelle du milieu aux figures (e) et (f). La bifurcation menant à la supratransmission se produit pour l'amplitude seuil  $A_{th,(4,4)} = 1.26$  située entre les deux amplitudes proposées  $A = 1,26$  et  $A = 1,28$ . Paramètres :  $N = 1800$  cellules,  $\omega_0^2 = 1$ ,  $\omega = 0.95$ ,  $\omega_L^2 = 4$  et  $\omega_{NL}^2 = 4$ . . . . . 89

5.8 Amplitude critique  $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$  déclenchant la supratransmission en fonction de la pulsation d'excitation  $\omega$  pour différentes valeurs du couplage non linéaire. Les paramètres du réseau sont :  $N = 300$  cellules,  $\gamma = 0.01$ ,  $\omega_0^2 = 1$ . Pour la figure 5.8(a), le couplage linéaire est  $\omega_L^2 = 1$  tandis que pour la figure 5.8(b) le couplage linéaire est  $\omega_L^2 = 4$ . . . . . 90

5.9 Différentes types de solutions dans le gap du modèle de sine-Gordon modifié. Paramètres : pour 5.9(a)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 0)$  et pour 5.9(b)  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$ . . . . . 91

5.10 Profil des solutions observées dans le Gap d'un milieu de sine-Gordon classique et sine-Gordon modifié. L'état du milieu est observé à  $t = 400$  pour les paramètres fixés suivants :  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 0)$  pour 5.10(a), 5.10(c) et 5.10(e) tandis que  $(\omega_L^2, \omega_{NL}^2) = (1, 4)$  pour 5.10(b), 5.10(d) et 5.10(f). . . . 92



# ANNEXES

ANNEXE A : RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DU MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE 3 À COUPLAGE MIXTE PAR L'APPLICATION DE L'AQD

ANNEXE B : CONDENSÉ DES RÉSULTATS DES TRAVAUX DE T. DAUXOIS ET *al.* SUR LES PROPRIÉTÉS DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE

ANNEXE C : RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DU MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE 5 À COUPLAGE MIXTE PAR L'APPLICATION DE L'AQD



# A

## RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE 3 À COUPLAGE MIXTE PAR L'APPLICATION DE L'AQD

L'équation du modèle de Klein-Gordon d'ordre 3 se présente sous la forme :

$$\frac{d^2 U_n}{dt^2} - \omega_L^2 (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) - \omega_{NL}^2 [(U_{n+1} - U_n)^3 + (U_{n-1} - U_n)^3] + \omega_0^2 f(U_n) = 0 \quad (\text{A.1})$$

avec

$$f(U_n) = U_n - \frac{U_n^3}{3!} \quad (\text{A.2})$$

L'application de la méthode à échelles multiples (Approximation Quasi-Discrète) consiste à prendre les solutions  $U_n(t)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} U_n(t) &= \epsilon U^{(1)}(\tau, \xi_n, \theta_n) + \epsilon^2 U^{(2)}(\tau, \xi_n, \theta_n) + \epsilon^3 U^{(3)}(\tau, \xi_n, \theta_n) + \dots \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j U_{n,n}^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Dans l'expression de cette solution,  $\epsilon$  est un réel très petit indiquant l'amplitude relative de l'excitation tandis que la variable rapide,  $\theta_n = kn - \omega t$ , représentant la phase de l'onde porteuse, est considérée comme étant complètement discrète. De plus,  $\xi_n$  et  $\tau$  sont des variables lentes, ou encore appelées variables à échelle multiples, définies par

$$\xi_n = \epsilon(n - \mu t) \quad \text{et} \quad \tau = \epsilon^2 t. \quad (\text{A.4})$$

Enfin, dans l'expression de  $\xi_n$ ,  $\mu$  est un paramètre qui sera déterminé par une condition de solvabilité.

la dérivée seconde droite en fonction des paramètres de  $U_n(t)$  de l'AQD est défini par :

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t \partial \xi_n} + \mu^2 \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} - 2\mu\epsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_n \partial \tau} + \epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad (\text{A.5})$$

en l'appliquant à l'expression (A.3) et en regroupant selon les puissances d' $\epsilon$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_n(t)}{dt^2} = & \epsilon \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t^2} + \epsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t \partial \xi_n} \right] \\ & + \epsilon^3 \left[ \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(3)}}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial t \partial \xi_n} + \mu^2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial \xi_n^2} + 2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t \partial \tau} \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Pour exprimer  $U_{n+1}$  et  $U_{n-1}$  intervenant dans l'équation (A.1), nous avons utilisé le développement de Taylor

$$\begin{aligned} U_{n\pm 1}(t) &= \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p U^p(\tau, \xi_n \pm \epsilon, \theta_{n+1}) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left( \pm \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^r U_{n,n\pm 1}^{(p)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

On remplace également l'expression (A.3) dans l'équation (A.1) et on regroupe selon les puissances d' $\epsilon$  en tenant également compte de l'expression (A.7). L'identification des termes du résultat obtenu selon les puissance d' $\epsilon$  avec les termes de l'équation (A.6) nous conduit à :

- Pour l'ordre 1 en  $\epsilon$ ,

$$\frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 (U_{n,n+1}^{(1)} - 2U_{n,n}^{(1)} + U_{n,n-1}^{(1)}) + \omega_0^2 U_{n,n}^{(1)} = 0 \quad (\text{A.8})$$

- Pour l'ordre 2 en  $\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 (U_{n,n+1}^{(2)} - 2U_{n,n}^{(2)} + U_{n,n-1}^{(2)}) + \omega_0^2 U_{n,n}^{(2)} \\ = 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t \partial \xi_n} + \omega_L^2 \frac{\partial}{\partial \xi_n} (U_{n,n+1}^{(1)} - U_{n,n-1}^{(1)}) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$



- Pour l'ordre 3 en  $\epsilon$ ,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(3)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 (U_{n,n+1}^{(3)} - 2U_{n,n}^{(3)} + U_{n,n-1}^{(3)}) + \omega_0^2 U_{n,n}^{(3)} \\
&= 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial t \partial \xi_n} + \mu^2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial \xi_n^2} - 2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t \partial \tau} + \frac{\omega_L^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} (U_{n,n+1}^{(1)} + U_{n,n-1}^{(1)}) \\
&+ \omega_L^2 \frac{\partial}{\partial \xi_n} (U_{n,n+1}^{(2)} - U_{n,n-1}^{(2)}) + \omega_{NL}^2 \left[ (U_{n,n+1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)})^3 + (U_{n,n-1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)})^3 \right] \\
&+ \omega_0^2 (U_{n,n}^{(1)})^3 \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

Le système d'équations linéaires aux dérivées partielles (A.8) peut admettre des solutions sous la forme :

$$U_{n,n}^{(1)} = A_1(\tau, \xi_n) e^{i\theta_n} + \bar{A}_1(\tau, \xi_n) e^{-i\theta_n}. \quad (\text{A.11})$$

où l'amplitude  $A_1(\tau, \xi_n)$  est une fonction complexe à déterminer.

En reportant l'expression (A.11) dans le système d'équations linéaires aux dérivées partielles (A.9), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 (U_{n,n+1}^{(2)} - 2U_{n,n}^{(2)} + U_{n,n-1}^{(2)}) + \omega_0^2 U_{n,n}^{(2)} \\
&= -2i\omega \left( \mu - \frac{\omega_L^2 \sin(k)}{\omega} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \xi_n} e^{i\theta_n} + c.c., \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

où  $c.c$  représente le complexe conjugué.

En éliminant les termes séculaires, on trouve :

$$\mu = \frac{\omega_L^2 \sin(k)}{\omega}. \quad (\text{A.13})$$

L'équation (A.12) admet donc comme solutions :

soit

$$U_{n,n}^{(2)} = 0, \quad (\text{A.14})$$

soit

$$U_{n,n}^{(2)} = A_2(\tau, \xi_n) e^{2i\theta_n} + \bar{A}_2(\tau, \xi_n) e^{-2i\theta_n}. \quad (\text{A.15})$$

où l'amplitude  $A_2(\tau, \xi_n)$  est une fonction complexe.

Pour toute la suite, nous avons choisi la solution (A.14).

En reportant les expressions (A.14) et (A.11) cette fois dans le système d'équations linéaires aux dérivées partielles (A.10), et après annulation des termes séculaires, on obtient

$$i \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\omega_L^2 \cos(k) - \mu^2}{2\omega} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_n^2} + \frac{\omega_{NL}^2 (24 \cos(k) - 6 \cos(2k) - 18) + \frac{\omega_0^2}{2}}{2\omega} A_1 |A_1|^2 = 0. \quad (\text{A.16})$$

Le système d'équations linéaires aux dérivées partielles (A.10) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(3)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 (U_{n,n+1}^{(3)} - 2U_{n,n}^{(3)} + U_{n,n-1}^{(3)}) + \omega_0^2 U_{n,n}^{(3)} \\ = \left[ \omega_{NL}^2 (2 \cos(3k) - 6 \cos(2k) + 2 \cos(k) - 2) + \frac{1}{6} \omega_0^2 \right] A_1^3 e^{3i\theta_n}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

qui peut avoir pour solutions :

$$U_{n,n}^{(3)} = A_3(\tau, \xi_n) e^{3i\theta_n} + \bar{A}_3(\tau, \xi_n) e^{-3i\theta_n}. \quad (\text{A.18})$$

où l'amplitude  $A_3(\tau, \xi_n)$  est une fonction complexe. En remplaçant l'expression (A.18) dans l'équation (A.17), on obtient :

$$A_3 = \frac{\omega_{NL}^2 (2 \cos(3k) - 6 \cos(2k) + 2 \cos(k) - 2) + \frac{1}{6} \omega_0^2}{-9\omega^2 - 2\omega_L^2 (\cos(3k) - 1) + \omega_0^2} A_1^3 \quad (\text{A.19})$$

L'équation (A.16) peut se mettre sous la forme :

$$i \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_n^2} + Q A_1 |A_1|^2 = 0, \quad (\text{A.20})$$

qui représente l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) pour la fonction complexe  $A_1$  avec pour coefficients de dispersion  $P$  et de nonlinéarité  $Q$  définis par :

$$P = \frac{\omega_L^2 \cos(k) - \mu^2}{2\omega}, \quad (\text{A.21})$$

et

$$Q = \frac{\omega_{NL}^2 (24 \cos(k) - 6 \cos(2k) - 18) + \frac{\omega_0^2}{2}}{2\omega}. \quad (\text{A.22})$$

L'équation (A.20) est une équation intégrable. En effet, En posant les changements de variables suivants  $A_1(\tau, \xi_n) = \frac{1}{\epsilon} u(t, x_n)$ ,  $\xi_n = \epsilon(n - \mu t) = \epsilon x_n$  et  $\tau = \epsilon^2 t$ , l'équation

(A.20) devient :

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + P\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + Qu|u|^2 = 0 \quad (\text{A.23})$$

L'équation (A.23) admet des solutions solitons si et seulement si le produit  $PQ$  est positif. Dans ce cas,  $u$  est pris sous la forme :

$$u = a(x_n)e^{i\lambda_0 Pt} \quad (\text{A.24})$$

avec  $\lambda_0$  un réel strictement positif. En introduisant cette solution dans l'équation (A.23), on obtient

$$Pa'' - \lambda_0 Pa + Qa^3 = 0 \quad (\text{A.25})$$

En multipliant cette dernière équation par  $a'$  et en intégrant une fois par rapport à  $x_n$ , on abouti à

$$(a')^2 = \lambda_0 a^2 - \frac{Q}{2P} a^4. \quad (\text{A.26})$$

La séparation des variables  $a$  et  $x_n$ , nous donne

$$\frac{da}{\sqrt{\lambda_0 a^2 - \frac{Q}{2P} a^4}} = dx_n.$$

L'intégration nous conduit à

$$\int \frac{da}{a\sqrt{\lambda_0 - \frac{Q}{2P} a^2}} = x_n \quad (\text{A.27})$$

D'après la page 97 du livre de I. S. Gradstein et I. M. Ryzhik [60], nous avons l'égalité suivante

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{p+qx^2}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2p}{x\sqrt{-\Delta}}\right), \quad p > 0, \quad \Delta < 0 \quad \text{avec} \quad \Delta = 4pq.$$

Par adaptation de cette égalité, l'intégrale de l'équation (A.27) devient

$$\int \frac{da}{a\sqrt{\lambda_0 - \frac{Q}{2P} a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2\lambda_0}{a\sqrt{\frac{2\lambda_0 Q}{P}}}\right).$$

D'après l'équation (A.27), la solution de l'équation de NLS est alors

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \operatorname{arccosh} \left( \frac{2\lambda_0}{a \sqrt{\frac{2\lambda_0 Q}{P}}} \right).$$

Sachant que  $\operatorname{sech}(X) = \frac{1}{\cosh(X)}$ , la réciproque de cette dernière égalité nous permet d'exprimer la variable amplitude  $a$  en fonction de  $x_n$  sous la forme :

$$a(x_n) = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}} \operatorname{sech}(\sqrt{\lambda_0} x_n).$$

La solution de l'équation (A.23) est par conséquent

$$u(x_n, t) = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}} \operatorname{sech}[\sqrt{\lambda_0} x_n] e^{iP\lambda_0 t}, \quad (\text{A.28})$$

d'où

$$A_1 = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}} \operatorname{sech}[\sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t)] e^{iP\lambda_0 t}. \quad (\text{A.29})$$

La solution théorique de l'équation (A.1) est alors

$$U_n(t) = A_1 e^{i(kn - \omega t)} + A_3 e^{3i(kn - \omega t)}, \quad (\text{A.30})$$

avec  $A_1$  donné à l'expression (A.29) et  $A_3$  donné à l'expression (A.19). Soit

$$U_n(t) = K_1 \operatorname{sech}[\sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t)] \cos(kn - (\omega - P\lambda_0)t) \\ + K_3 \operatorname{sech}^3[\sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t)] \cos(3(kn - (\omega - P\lambda_0)t)) \quad (\text{A.31})$$

où

$$K_1 = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}} \quad (\text{A.32})$$

et

$$K_3 = \frac{\omega_{NL}^2 (2 \cos(3k) - 6 \cos(2k) + 2 \cos(k) - 2) + \frac{\omega_0^2}{6} \left( \frac{2\lambda_0 P}{Q} \right)^{\frac{3}{2}}}{-9\omega^2 - 2\omega_L^2 (\cos(3k) - 1) + \omega_0^2} \quad (\text{A.33})$$

La vitesse correspondante est  $V_n(t) = \frac{dU_n}{dt}$ , soit :

$$\begin{aligned}
 V_n(t) = & K_1 \sqrt{\lambda_0} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \tanh \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos(kn - (\omega - P\lambda_0)t) \\
 & + K_1 (\omega - P\lambda_0) \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \sin(kn - (\omega - P\lambda_0)t) \\
 & + 3K_3 \sqrt{\lambda_0} \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \tanh \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \cos(3(kn - (\omega - P\lambda_0)t)) \\
 & + 3K_3 (\omega - P\lambda_0) \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \tanh \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu t) \right] \sin(3(kn - (\omega - P\lambda_0)t))
 \end{aligned}
 \tag{A.34}$$



# B

## CONDENSÉ DES RÉSULTATS DES TRAVAUX DE T. DAUXOIS ET *al.* SUR LES PROPRIÉTÉS DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE

T. Dauxois et *al.* ont étudié les propriétés de l'équation de NLS au chapitre 3 de la référence [21]. Il a été établi qu'elle a des solutions solitons. Leur calcul est repris ici pour déterminer les valeurs des paramètres, notamment du vecteur d'onde de modulation, pour lesquelles il y a instabilité modulationnelle dans notre modèle. L'équation de NLS possède une solution de type soliton dans le cas où le produit entre son coefficient de dispersion  $P$  et de non linéarité  $Q$  est positif (soit  $PQ > 0$ ). En fait cette condition correspond à une situation dans laquelle l'énergie tend à se localiser spontanément dans le système grâce au phénomène d'instabilité modulationnelle. En effet, outre la solution soliton, l'équation NLS admet aussi une solution onde plane, mais celle-ci n'est pas toujours stable. Ainsi, en reportant la solution onde plane suivante

$$u(x, t) = a_0 e^{i(kx - \Omega t)} \quad (\text{B.1})$$

dans l'équation NLS

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + P \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + Qu|u|^2 = 0, \quad (\text{B.2})$$

on constate que c'est une solution exacte si la pulsation  $\Omega$  vérifie la relation de dispersion suivante :

$$\Omega = Pk^2 - Qa_0^2. \quad (\text{B.3})$$

Cette relation constitue la relation de dispersion non linéaire de l'onde plane qui met en évidence que sa pulsation dépend non seulement du nombre d'onde  $k$ , mais aussi de son amplitude  $a_0$ . Comme nous allons le voir, cette solution onde plane, qui existe quel

que soit le signe du produit  $PQ$ , n'est stable que si  $PQ < 0$ . Pour le vérifier, étudions sa stabilité linéaire en cherchant l'évolution temporelle d'une petite perturbation de sa phase et de son amplitude. On reporte donc dans l'équation (B.2) l'expression suivante [21] :

$$u(x, t) = (a_0 + b(x, t)) e^{i\sigma(x, t)}, \quad (\text{B.4})$$

avec  $\sigma(x, t) = kx - \Omega t + \theta(x, t)$ , où  $b(x, t)$  et  $\theta(x, t)$  sont deux fonctions réelles. Il vient

$$ib_t - (\Omega - \theta_t)(a_0 + b) + P \left[ b_{xx} + i\theta_{xx}(a_0 + b) + 2ib_x(k + \theta_x) - (k + \theta_x)^2(a_0 + b) \right] + Q(a_0 + b)^3 = 0. \quad (\text{B.5})$$

En ne conservant que les termes linéaires en  $b$  et  $\theta$ , déjà supposés petits, et en tenant compte de la relation de dispersion non linéaire  $\Omega = Pk^2 - Qa_0^2$ , on parvient au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -a_0\theta_t + Pb_{xx} - 2Pka_0\theta_x + 2Qa_0^2b = 0 \\ b_t + Pa_0\theta_{xx} + 2Pkb_x = 0, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

dont les solutions s'expriment sous la forme :

$$b(x, t) = b_0 e^{i(\delta x - \nu t)} + cc, \quad (\text{B.7})$$

$$\theta(x, t) = \theta_0 e^{i(\delta x - \nu t)} + cc, \quad (\text{B.8})$$

où  $cc$  est le conjugué complexe.

En substituant les solutions définies par (B.7) et (B.8) dans le système (B.6), on obtient

$$\begin{cases} (2Qa_0^2 - P\delta^2) b_0 + ia_0(\nu - 2Pk\delta) \theta_0 = 0 \\ -i(\nu - 2Pk\delta) b_0 - Pa_0\delta^2 \theta_0 = 0. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Pour que le système (B.9) aie des solutions  $b_0$  et  $\theta_0$  non nulles, il faut que son déterminant soit nul. Cela nous conduit à la relation de dispersion de la perturbation suivante :

$$(\nu - 2Pk\delta)^2 = P^2\delta^2 \left( \delta^2 - \frac{2Q}{P} a_0^2 \right). \quad (\text{B.10})$$

L'équation (B.10) montre que le signe de la pulsation  $\nu$  dépend de celui de  $\frac{Q}{P}$ . Ainsi, deux cas se présentent :

→ Si  $\frac{Q}{P} < 0$ , soit  $PQ < 0$ , quel que soit le nombre d'onde donné  $\delta$ , on a [page 82



de [21]]

$$\nu = 2Pk\delta \pm |P\delta| \sqrt{\delta^2 - \frac{2Q}{P} a_0^2}. \quad (\text{B.11})$$

$\nu$  étant réel, nous déduisons que les perturbations  $b_0$  et  $\theta_0$  ont un comportement oscillatoire.

→ Si  $\frac{Q}{P} > 0$ , soit  $PQ > 0$ , dans un domaine du nombre d'onde  $\delta$  de la perturbation, on peut avoir  $(\nu')^2 = (\nu - 2Pk\delta)^2 < 0$ . Ainsi, quel que soit  $\delta$ , on a [page 82 de [21]]

$$\nu = 2Pk\delta \pm i|P\delta| \sqrt{\frac{2Q}{P} a_0^2 - \delta^2}. \quad (\text{B.12})$$

Dans ces conditions,  $\nu$  se décompose en une partie réelle correspondant à la propagation et une partie imaginaire correspondant à l'instabilité. L'onde plane est alors *instable*. Elle a tendance à se moduler avec le nombre d'onde correspondant au taux de croissance maximal, soit  $\delta = a_0 \sqrt{\frac{Q}{P}}$ . Il ressort qu'il y a deux paramètres responsables du phénomène d'instabilité modulationnelle : l'amplitude  $a_0$  de l'onde plane et le nombre d'onde  $k$  de l'enveloppe.



# C

## RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU MODÈLE DE KLEIN-GORDON D'ORDRE 5 À COUPLAGE MIXTE PAR L'APPLICATION DE L'AQD

Dans cette annexe, nous utilisons la méthode de l'AQD pour traiter le modèle de Klein-Gordon d'ordre à couplage mixte défini par

$$\frac{d^2 U_n}{dt^2} = \omega_L^2 [U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}] + \omega_{NL}^2 [(U_{n+1} - U_n)^3 + (U_{n-1} - U_n)^3] - \omega_0^2 \left( U_n - \frac{U_n^3}{3!} + \frac{U_n^5}{5!} \right) \quad (\text{C.1})$$

Nous utilisons la méthode à échelles multiples et l'AQD qui consiste à considérer que  $U_n(t)$  est de la forme :

$$U_n(t) = \epsilon U^{(1)}(\tau, \xi_n, \theta_n) + \epsilon^2 U^{(2)}(\tau, \xi_n, \theta_n) + \epsilon^3 U^{(3)}(\tau, \xi_n, \theta_n) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j U_{n,n}^{(j)} \quad (\text{C.2})$$

avec  $U_{n,n}^{(j)} \equiv U^{(j)}(\tau, \xi_n, \theta_n)$ ,  $\xi_n = \epsilon(n - \mu t)$ ,  $\tau = \epsilon^2 t$ ,  $\theta_n = kn - \omega t$ .

On remplace l'expression (C.2) dans l'équation (C.1) on trouve :

$$\frac{\partial^2 U_{n,n}^{(j)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(j)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(j)} + U_{n,n-1}^{(j)} \right] = M_{n,n}^{(j)} \quad (\text{C.3})$$

Avec

$$M_{n,n}^{(1)} = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$M_{n,n}^{(2)} = 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t \partial \xi_n} + \omega_L^2 \frac{\partial}{\partial \xi_n} (U_{n,n+1}^{(1)} - U_{n,n-1}^{(1)}) \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} M_{n,n}^{(3)} = & 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial t \partial \xi_n} - \mu^2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial \xi_n^2} - 2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t \partial \tau} \\ & + \omega_L^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} (U_{n,n+1}^{(1)} + U_{n,n-1}^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial \xi_n} (U_{n,n+1}^{(2)} - U_{n,n-1}^{(2)}) \right] \\ & + \omega_{NL}^2 \left[ (U_{n,n+1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)})^3 + (U_{n,n-1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)})^3 \right] + \frac{\omega_0^2}{3!} (U_{n,n}^{(1)})^3 \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{n,n}^{(4)} = & 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(3)}}{\partial t \partial \xi_n} - \mu^2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial \xi_n^2} - 2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial t \partial \tau} + 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial \xi_n \partial \tau} \\ & + \omega_L^2 \left[ \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial \xi_n^3} (U_{n,n+1}^{(1)} - U_{n,n-1}^{(1)}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} (U_{n,n+1}^{(2)} + U_{n,n-1}^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial \xi_n} (U_{n,n+1}^{(3)} - U_{n,n-1}^{(3)}) \right] \\ & + \omega_{NL}^2 \left[ 3 (U_{n,n-1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)})^2 \left( -\frac{\partial U_{n,n-1}^{(1)}}{\partial \xi_n} + U_{n,n-1}^{(2)} - U_{n,n}^{(2)} \right) \right] \\ & + \omega_{NL}^2 \left[ 3 (U_{n,n+1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)})^2 \left( \frac{\partial U_{n,n+1}^{(1)}}{\partial \xi_n} + U_{n,n+1}^{(2)} - U_{n,n}^{(2)} \right) \right] + \frac{\omega_0^2}{2} (U_{n,n}^{(1)})^2 U_{n,n}^{(2)} \quad (\text{C.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{n,n}^{(5)} = & 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(4)}}{\partial t \partial \xi_n} - \mu^2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(3)}}{\partial \xi_n^2} - 2 \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(3)}}{\partial t \partial \tau} + 2\mu \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial \xi_n \partial \tau} - \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial \tau^2} \\
& + \omega_L^2 \left[ \frac{1}{24} \frac{\partial^4}{\partial \xi_n^4} (U_{n,n+1}^{(1)} + U_{n,n-1}^{(1)}) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial \xi_n^3} (U_{n,n+1}^{(2)} - U_{n,n-1}^{(2)}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} (U_{n,n+1}^{(3)} + U_{n,n-1}^{(3)}) \right] \\
& + \omega_{NL}^2 (U_{n,n-1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)}) \left( U_{n,n-1}^{(2)} - U_{n,n}^{(2)} - \frac{\partial}{\partial \xi_n} U_{n,n-1}^{(1)} \right)^2 \\
& + \omega_{NL}^2 (U_{n,n+1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)}) \left( U_{n,n+1}^{(2)} - U_{n,n}^{(2)} + \frac{\partial}{\partial \xi_n} U_{n,n+1}^{(1)} \right)^2 \\
& + 2\omega_{NL}^2 (U_{n,n-1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)}) \left( U_{n,n-1}^{(2)} - U_{n,n}^{(2)} - \frac{\partial}{\partial \xi_n} U_{n,n-1}^{(1)} \right)^2 \\
& + 3\omega_{NL}^2 (U_{n,n+1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)}) \left( U_{n,n+1}^{(2)} - U_{n,n}^{(2)} + \frac{\partial}{\partial \xi_n} U_{n,n+1}^{(1)} \right)^2 \\
& + 2\omega_{NL}^2 (U_{n,n-1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)})^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{n,n-1}^{(1)}}{\partial \xi_n^2} - \frac{\partial U_{n,n-1}^{(2)}}{\partial \xi_n} + U_{n,n-1}^{(3)} - U_{n,n}^{(3)} \right] \\
& + 3\omega_{NL}^2 (U_{n,n+1}^{(1)} - U_{n,n}^{(1)})^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{n,n+1}^{(1)}}{\partial \xi_n^2} + \frac{\partial U_{n,n+1}^{(2)}}{\partial \xi_n} + U_{n,n+1}^{(3)} - U_{n,n}^{(3)} \right] \\
& + \omega_L^2 \frac{\partial}{\partial \xi_n} (U_{n,n+1}^{(4)} - U_{n,n-1}^{(4)}) - \omega_0^2 \left( -\frac{1}{6} U_{n,n}^{(1)} (2U_{n,n}^{(1)} U_{n,n}^{(3)} + (U_{n,n}^{(2)})^2) - \frac{1}{3} (U_{n,n}^{(2)})^2 U_{n,n}^{(1)} \right) \\
& - \omega_0^2 \left( -\frac{1}{6} U_{n,n}^{(3)} (U_{n,n}^{(1)})^2 + \frac{1}{5!} (U_{n,n}^{(1)})^5 \right) \quad (\text{C.8})
\end{aligned}$$

Les expressions de  $M_{n,n}^{(j)}$  ( $j = 6, 7, \dots$ ) ne sont pas explicitement écrites ici.

Pour aboutir aux équations ci-dessus, nous avons utilisé l'expansion de Taylor :

$$\begin{aligned}
U_{n\pm 1}(t) &= \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p U^p(\tau, \xi_n \pm \epsilon, \theta_{n+1}) \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left( \pm \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^r U_{n,n\pm 1}^{(p)} \right] \quad (\text{C.9})
\end{aligned}$$

Pour l'ordre le plus bas d' $\epsilon$  soit  $j = 1$ , l'équation (C.3) conduit au système d'équations linéaires aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial^2 U_{n,n}^{(1)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(1)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(1)} + U_{n,n-1}^{(1)} \right] = M_{n,n}^{(1)}, \quad (\text{C.10})$$

qui peut avoir des solutions sous la forme :

$$U_{n,n}^{(1)} = A_1(\tau, \xi_n) e^{i\theta_n} + \bar{A}_1(\tau, \xi_n) e^{-i\theta_n}, \quad (\text{C.11})$$

où l'amplitude  $A_1(\tau, \xi_n)$  est une fonction complexe à déterminer.

Pour l'ordre 2 en  $\epsilon$  soit  $j = 2$ , on a

$$\frac{\partial^2 U_{n,n}^{(2)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(2)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(2)} + U_{n,n-1}^{(2)} \right] = -2i\omega \left( \mu_1 - \frac{\omega_L^2 \sin(k)}{\omega} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \xi_n} e^{i\theta_n} + c.c, \quad (C.12)$$

où  $c.c$  représente le conjugué complexe.

En éliminant les termes séculaires, on trouve :

$$\mu_1 = \frac{\omega_L^2 \sin(k)}{\omega}. \quad (C.13)$$

L'équation (C.12) admet donc comme solutions :

soit

$$U_{n,n}^{(2)} = 0, \quad (C.14)$$

soit

$$U_{n,n}^{(2)} = A_2(\tau, \xi_n) e^{2i\theta_n} + \bar{A}_2(\tau, \xi_n) e^{-2i\theta_n}. \quad (C.15)$$

où l'amplitude  $A_2(\tau, \xi_n)$  est une fonction complexe.

Pour la suite, nous avons choisi la solution (C.14).

Pour l'ordre 3 en  $\epsilon$ , soit  $j = 3$ , l'équation (C.3) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(3)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(3)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(3)} + U_{n,n-1}^{(3)} \right] \\ = \left[ \frac{\omega_0^2}{3!} + 2\omega_{NL}^2 (\cos(3k) - 3\cos(2k) + \cos(k) - 1) \right] A_1^3 e^{3i\theta_n} \\ + \left[ 3 \frac{\omega_0^2}{3!} + 2\omega_{NL}^2 (12\cos(k) - 3\cos(2k) - 9) \right] A_1 |A_1|^2 e^{i\theta_n} \\ + 2 \left[ \left( 2i\omega \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + (\omega_L^2 \cos(k) - (\mu_1)^2) \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_n^2} \right) \right] e^{i\theta_n} \quad (C.16) \end{aligned}$$

En éliminant les termes séculaires, on trouve :

$$i \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\omega_L^2 \cos(k) - (\mu_1)^2}{2\omega} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_n^2} + \left[ \frac{\omega_0^2}{4\omega} + \frac{\omega_{NL}^2}{\omega} (12\cos(2k) - 3\cos(k) - 9) \right] A_1 |A_1|^2 = 0 \quad (C.17)$$

C'est l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) pour la fonction enveloppe  $A_1$ . Cette équation peut encore se mettre sous la forme

$$i \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_n^2} + Q A_1 |A_1|^2 = 0 \quad (C.18)$$

où les paramètres de dispersion  $P$  et de la non linéarité  $Q$  sont respectivement donnés par :

$$P = \frac{\omega_L^2 \cos(k) - (\mu_1)^2}{2\omega}, \quad (\text{C.19})$$

$$Q = \frac{\omega_0^2}{4\omega} + \frac{\omega_{NL}^2}{\omega} (12\cos(2k) - 3\cos(k) - 9). \quad (\text{C.20})$$

En posant les changements de variables suivants  $A_1(\tau, \xi_n) = \frac{1}{\epsilon} u(t, x_n)$ ,  $\xi_n = \epsilon(n - \mu t) = \epsilon x_n$  et  $\tau = \epsilon^2 t$ , l'équation (C.18) devient :

$$i \frac{\partial u}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + Qu|u|^2 = 0 \quad (\text{C.21})$$

L'équation NLS admet des solutions solitons si et seulement si le produit  $PQ$  est positif. Dans ce cas,  $u$  est pris sous la forme :

$$u = a(x_n) e^{i\lambda_0 P t} \quad (\text{C.22})$$

avec  $\lambda_0$  un réel strictement positif. En introduisant cette solution dans l'équation (C.21), on obtient

$$Pa'' - \lambda_0 Pa + Qa^3 = 0 \quad (\text{C.23})$$

En multipliant cette dernière équation par  $a'$  et en intégrant une fois par rapport à  $x_n$ , on abouti à

$$(a')^2 = \lambda_0 a^2 - \frac{Q}{2P} a^4, \quad (\text{C.24})$$

qui nous conduit à

$$a(x_n) = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}} \operatorname{sech}(\sqrt{\lambda_0} x_n) \quad (\text{C.25})$$

ainsi la solution soliton de l'équation (C.21) est

$$u(x_n, t) = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}} \operatorname{sech}[\sqrt{\lambda_0} x_n] e^{iP\lambda_0 t}, \quad (\text{C.26})$$

par conséquent

$$A_1 = K_1 \operatorname{sech}[\sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu_1 t)] e^{iP\lambda_0 t}. \quad (\text{C.27})$$

avec

$$K_1 = \sqrt{\frac{2\lambda_0 P}{Q}}. \quad (\text{C.28})$$

L'équation (C.16) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(3)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(3)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(3)} + U_{n,n-1}^{(3)} \right] \\ = \left[ \frac{\omega_0^2}{3!} + 2\omega_{NL}^2 (\cos(3k) - 3\cos(2k) + \cos(k) - 1) \right] A_1^3 e^{3i\theta_n} \end{aligned} \quad (C.29)$$

où

$$U_{n,n}^{(3)} = A_3(\tau, \xi_n) e^{3i\theta_n} + \bar{A}_3(\tau, \xi_n) e^{-3i\theta_n}. \quad (C.30)$$

En remplaçant l'expression (C.30) dans l'équation (C.29), on trouve

$$A_3 = - \frac{\frac{\omega_0^2}{3!} + 2\omega_{NL}^2 (\cos(3k) - 3\cos(2k) + \cos(k) - 1)}{2 \left[ 4\omega_0^2 + \omega_L^2 (8 - 9\cos(k) + \cos(3k)) \right]} A_1^3 \quad (C.31)$$

avec  $A_1$  donné à l'expression (C.27).

$$A_3 = -K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu_1 t) \right] e^{3iP\lambda_0 t} \quad (C.32)$$

où

$$K_3 = \frac{\frac{\omega_0^2}{3!} + 2\omega_{NL}^2 (\cos(3k) - 3\cos(2k) + \cos(k) - 1)}{2 \left[ 4\omega_0^2 + \omega_L^2 (8 - 9\cos(k) + \cos(3k)) \right]} K_1^3 \quad (C.33)$$

Pour l'ordre 4 en  $\epsilon$ , soit  $j = 4$ , l'équation (C.3) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(4)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(4)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(4)} + U_{n,n-1}^{(4)} \right] \\ = \left[ 4\omega_L^2 \cos(k) (1 + 2e^{-ik} + e^{-2ik}) + 2i(-3\omega\mu_3 + \omega_{NL}^2 \sin(3k)) \frac{\partial A_3}{\partial \xi_n} \right] e^{3i\theta_n} \\ + \left[ 2\mu_3 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_n \partial \tau} + i \frac{\omega_L^2 \sin(k)}{3} \frac{\partial^3 A_1}{\partial \xi_n^3} + 16\omega_{NL}^2 |A_1|^2 \cos(k) (1 + \cos(k)) \right] e^{i\theta_n} \end{aligned} \quad (C.34)$$

En éliminant les termes séculaires, l'équation (C.34) devient

$$\frac{\partial^2 U_{n,n}^{(4)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(4)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(4)} + U_{n,n-1}^{(4)} \right] = 0, \quad (C.35)$$

qui admet pour comme solutions valides :

soit

$$U_{n,n}^{(4)} = 0, \quad (C.36)$$



soit

$$U_{n,n}^{(4)} = A_4(\tau, \xi_n) e^{4i\theta_n} + \bar{A}_4(\tau, \xi_n) e^{-4i\theta_n}, \quad (\text{C.37})$$

où l'amplitude  $A_4(\tau, \xi_n)$  est une fonction complexe.

Pour la suite, nous avons choisi la solution (C.36).

Pour l'ordre 5 en  $\epsilon$ , soit  $j = 5$ , après annulation des termes séculaires, l'équation (C.3) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_{n,n}^{(5)}}{\partial t^2} - \omega_L^2 \left[ U_{n,n+1}^{(5)} - \left( 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) U_{n,n}^{(5)} + U_{n,n-1}^{(5)} \right] \\ & = \left[ -\frac{1}{5!} \omega_0^2 A_1^5 + 10 \omega_L^2 A_3 A_1^2 (\cos(5k) - 2\cos(4k) + \cos(3k) - \cos(2k) + 2\cos(k) - 1) \right] e^{5i\theta_n}, \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

avec

$$U_{n,n}^{(5)} = A_5(\tau, \xi_n) e^{5i\theta_n} + \bar{A}_5(\tau, \xi_n) e^{-5i\theta_n}. \quad (\text{C.39})$$

où l'amplitude  $A_5(\tau, \xi_n)$  est une fonction complexe.

En remplaçant l'expression (C.39) dans l'équation (C.38), on trouve

$$A_5 = -\frac{-\frac{1}{5!} \omega_0^2 A_1^5 + 10 \omega_{NL}^2 A_3 A_1^2 (\cos(5k) - 2\cos(4k) + \cos(3k) - \cos(2k) + 2\cos(k) - 1)}{24\omega_0^2 + 2\omega_L^2 [24 - 25\cos(k) + \cos(5k)]} \quad (\text{C.40})$$

$$A_5 = K_5 \operatorname{sech}^5 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu_1 t) \right] e^{5iP\lambda_0 t} \quad (\text{C.41})$$

$$K_5 = \frac{\left( \frac{2\lambda_0 P}{Q} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{\omega_0^2}{5!} - 10 \omega_{NL}^2 K_1^2 K_3 [(\cos(5k) - 2\cos(4k) + \cos(3k) - \cos(2k) + 2\cos(k) - 1)]}{24\omega_0^2 + 2\omega_L^2 [24 - 25\cos(k) + \cos(5k)]} \quad (\text{C.42})$$

$$\begin{aligned} U_n(t) = & K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu_1 t) \right] e^{i(kn - (\omega - P\lambda_0)t)} \\ & - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu_1 t) \right] e^{3i(kn - (\omega - P\lambda_0)t)} \\ & + K_5 \operatorname{sech}^5 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu_1 t) \right] e^{5i(kn - (\omega - P\lambda_0)t)} \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

$$\begin{aligned}
U_n(t) = & K_1 \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu_1 t) \right] \cos (kn - (\omega - P\lambda_0) t) \\
& - K_3 \operatorname{sech}^3 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu_1 t) \right] \cos [3 (kn - (\omega - P\lambda_0) t)] \\
& + K_5 \operatorname{sech}^5 \left[ \sqrt{\lambda_0} (n - n_0 - \mu_1 t) \right] \cos [5 (kn - (\omega - P\lambda_0) t)]. \quad (\text{C.44})
\end{aligned}$$

## LISTE DES TRAVAUX

Cette thèse a donné lieu aux travaux suivants :

### 1. Conférence internationale :

- Roland Alima, Saverio Morfu, Patrick Marquié, Bertrand Bodo, Bernard Essimbi. Energy transmission in the gap of nonlinear media triggered by deterministic and stochastic driving. International Conference on Statistical Physics, 18-22 July 2016, Lyon, France. 2016.

### 2. Conférences nationales avec actes :

- Bertrand Bodo, Saverio Morfu, Patrick Marquié, Bernard Essimbi, Roland Alima. Effet du bruit dans le système de sine-Gordon. Comptes Rendus de la 18eme Rencontre du Non-Linéaire 17-19 Mars 2015, pp.25-30/ISBN 978-2-9538596-4-5, édité par E. Falcon, M. Lefranc, F. Petrelis, C.-T. Pham. Non-Linéaire Publications, Avenue de l'université, BP 12 76801 Saint Etienne du Rouvray Cedex.
- Roland Alima, Saverio Morfu, Bertrand Bodo, Patrick Marquié, Bernard Essimbi. Effet du couplage non linéaire dans un système de sine-Gordon modifié. Compte Rendus de la 19e rencontre du non linéaire 15-17 Mars 2016 Paris, pp.1-6/ISBN 978-2-9538596-5-2, 2016, édité par E. Falcon, M. Lefranc, F. Petrelis, C.-T. Pham Non-Linéaire Publications, Avenue de l'université, BP 12 76801 Saint Etienne du Rouvray Cedex.

### 3. Publication dans une revue internationale :

- Roland Alima, Saverio Morfu, Patrick Marquié, Bertrand Bodo, Bernard Essimbi. Influence of a nonlinear coupling on the supratransmission effect in modified sine-Gordon and Klein–Gordon lattices. Chaos, Solitons and Fractals, 100, pp.91-99., 2017.





## Résumé :

Dans cette thèse, nous faisons l'analyse des conditions d'existence du phénomène de supratransmission non linéaire dans deux modèles différents: un système de Klein-Gordon de cinquième ordre modifié et un système de sine-Gordon modifié. Les modèles modifiés considérés ici sont ceux avec couplage mixte, le couplage linéaire pur étant associé à un couplage non linéaire. En particulier, nous quantifions numériquement l'influence du coefficient de couplage non linéaire sur l'amplitude de seuil qui déclenche le phénomène de supratransmission non-linéaire. Notre résultat principal montre que, dans les deux modèles, lorsque le coefficient de couplage non linéaire augmente, l'amplitude de seuil déclenchant le phénomène de supratransmission non linéaire diminue.

**Mots-clés :** Dynamique non linéaire, Supratransmission, Klein-Gordon, sine-Gordon

## Abstract:

In this thesis, we analyze the conditions of existence of the phenomenon of nonlinear supratransmission in two different models: a modified fifth-order Klein-Gordon system and a modified sine-Gordon system. The modified models considered here are those with mixed coupling, the pure linear coupling being associated with a nonlinear coupling. In particular, we quantify numerically the influence of the non-linear coupling coefficient on the threshold amplitude which triggers the phenomenon of non-linear supratransmission. Our main result shows that in both models, when the nonlinear coupling coefficient increases, the threshold amplitude triggering the phenomenon of nonlinear supratransmission decreases.

**Keywords:** Nonlinear dynamics, Supratransmission, Klein-Gordon, sine-Gordon

The logo for the SPIM (École doctorale SPIM) features a stylized orange horizontal bar on the left, followed by the letters 'S', 'P', 'I', and 'M' in a white, sans-serif font.