

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE  
UFR Sciences et Techniques  
Institut de Mathématiques de Bourgogne

THÈSE

Pour obtenir le grade de  
Docteur de l'Université de Bourgogne  
Discipline : Mathématiques

par

Jessie Diana Pontigo Herrera

Problème de centre tangentiel et problème de  
monodromie pour certains Hamiltoniens  
non-génériques

Directeurs de thèse  
Pavao Mardesic  
Laura Ortiz Bobadilla

Jury de thèse

Xavier Gómez-Mont	Centro de Investigación en Matemáticas	Président du jury
Dmitry Novikov	Institut Weizmann	Rapporteur
Xavier Gómez-Mont	Centro de Investigación en Matemáticas	Rapporteur
Pavao Mardesic	Université de Bourgogne	Directeur de thèse
Laura Ortiz	U. Nacional Autónoma de México	Directrice de thèse



Le savoir n'est jamais séparé de l'émotion.  
*Jean-Pierre Luminet*



# Agradecimientos

Agradezco a la Universidad de Borgoña y la Universidad Nacional Autónoma de México por apoyar la realización de esta tesis de doctorado mediante un convenio de cotutela entre ambas instituciones. Así mismo, quiero agradecer con mucho afecto a mis directores de tesis la Dra. Laura Ortiz y el Dr. Pavao Mardesic por todo su apoyo incesante para lograr este proyecto. Les agradezco mucho la paciencia y comprensión con la que me han guiado estos años, y por compartir conmigo conocimiento y experiencias tanto en la ciencia como en la vida en general. También agradezco mucho a los doctores José Seade, Dmitry Novikov, Xavier Gómez-Mont, Santiago López de Medrano y Jean-Philippe Rolin por apoyar mi trabajo. Su respaldo y sus comentarios me dan la firmeza para seguir avanzando en este camino. Estoy también agradecida con el Dr. Ernesto Rosales por sus consejos y por compartir conmigo su modo de ver las matemáticas desde mis estudios de licenciatura. Agradezco a su vez a mis compañeros en Dijon por su reconfortante amistad y por toda la ayuda que me brindaron; Bruno, Charlie, Martin, Adriana, Maja, Aymen, Jeremy, Ben, Simone, Olivier, Delphine, Michaël y varios más. Agradezco también al equipo administrativo en Dijon por toda su eficiencia y gentileza. Igualmente agradezco al equipo administrativo del posgrado en matemáticas de la UNAM; Ma. Inés, Tere y Luci, por su empeño para que los proyectos puedan llevarse a cabo. También agradezco a mis amigos en México; Adriana, Angelito, Miguel, Jessica, y a todos los que forman parte del equipo de singularidades y sistemas dinámicos, por su compañía y amistad en estos años.

Para finalizar, quiero agradecer con mucho amor a mis padres, hermanos y familiares, con quienes he crecido en la casa de mi infancia, por cada día de la vida que hemos compartido, que en la sencillez de lo cotidiano llevan la belleza de lo simple.

Este trabajo se ha realizado gracias al financiamiento de UNAM-DGAPA-PAPIIT IN102413, CONACyT C.B. 219722, ECOS M14M01, LAISLA (Laboratoire international associé), Contrat doctoral (Université de Bourgogne) No. 2012-30 y beca Nacional CONACyT semestre 2016-1.



# Índice general

<b>1. Resumen</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>11</b>
2.1. Contexto histórico . . . . .	11
2.2. Resultados de la tesis . . . . .	18
<b>3. Nociones fundamentales</b>	<b>21</b>
3.1. Perturbaciones de órbitas periódicas . . . . .	21
3.2. Fibración de Milnor y monodromía . . . . .	28
3.2.1. Fibración de Milnor local . . . . .	29
3.2.2. Ciclos evanescentes . . . . .	31
3.2.3. Fibración de Milnor global . . . . .	37
3.2.4. Continuación analítica de integrales abelianas . . . . .	47
3.3. Exactitud relativa . . . . .	49
3.3.1. Espacio de integrales abelianas . . . . .	51
3.4. Condición al infinito . . . . .	53
3.5. Particiones en curvas de $\mathbb{RP}^2$ . . . . .	57
3.5.1. Diagrama de Dynkin y monodromía . . . . .	59
3.5.2. Buenas particiones definidas por polinomios . . . . .	62
3.5.3. Familias especiales de ciclos para una partición . . . . .	63
3.5.4. Particiones con una simetría . . . . .	77
3.6. Ciclos residuales . . . . .	79
3.6.1. Número de ramas en puntos al infinito . . . . .	80
3.6.2. Generadores en cohomología de de Rham de los ciclos residuales . . . . .	89
<b>4. Problema de monodromía para particiones</b>	<b>99</b>
4.1. Base especial para la 1-homología . . . . .	99
4.2. Caso con una simetría . . . . .	103
<b>5. Problema tangencial del centro</b>	<b>109</b>
5.1. Perturbación de buenas particiones de $\mathbb{RP}^2$ . . . . .	110
5.2. Caso con una simetría . . . . .	116

<b>6. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>127</b>
<b>A. Orientación de A'Campo</b>	<b>129</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>133</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>136</b>

# Capítulo 1

## Résumé

L'objectif de ce travail est de donner des solutions pour deux problèmes dans la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires: *le problème tangentiel du centre* et *le problème de la monodromie* dans deux cas non-génériques. On va commencer par expliquer les problèmes. Ces deux problèmes dérivent d'un problème classique connu comme *le problème du centre* qui a été posé par H. Poincaré en 1882 [33]. Il demande de donner les conditions pour qu'une équation différentielle polynomiale dans le plan réel puisse avoir un point critique de type centre. Il est très difficile de trouver une solution complète pour le problème de Poincaré. Alors V. Arnold a proposé d'étudier une version facile du problème. L'approche qu'Arnold propose est de comprendre ce qui se passe pour les petites déformations des équations différentielles hamiltoniennes.

Pour préciser la version tangentielle du problème du centre, considérons  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  un polynôme à coefficients réels et l'équation hamiltonienne donnée par  $\dot{x} = F_y$  et  $\dot{y} = -F_x$ . On s'intéresse ici seulement à la topologie des solutions. On va écrire alors cette équation hamiltonienne dans sa forme d'équation de Pfaff, c'est à dire  $dF = 0$ . Cette équation définit une foliation singulière dans le plan réel dont les feuilles sont données par les courbes de niveaux du polynôme  $F$ . On va supposer que cette foliation admet un point singulier de type centre. Les courbes de niveaux  $\{F = c\}$ , avec  $c \in (\mathbb{R}, c_0)$ , définissent une famille continue d'ovales dans un voisinage du point critique du type centre. Par abus de langage, on va appeler les points critiques de Morse de  $F$ , qui correspondent à des points critiques de type centre pour la foliation  $dF = 0$ , *des points critiques de type centre de  $F$* .

Soit  $\eta$  une 1-forme polynomiale et  $\varepsilon$  un paramètre réel assez petit. On perturbe la foliation  $dF = 0$  de la manière suivante:

$$dF + \varepsilon\eta = 0. \tag{1.1}$$

Maintenant, considérons une famille continue d'ovales  $\delta(z)$ , contenues dans les courbes de niveaux  $\{F = z\}$ , où tous les valeurs  $z$  sont des valeurs régulières.

La fonction déplacement pour le flot de (1.1) et par rapport à la famille continue des orbites  $\delta(z)$ , avec  $z \in (\mathbb{R}, z')$  (où  $z'$  est une valeur régulière), est

une fonction analytique qui depend des valeurs de  $z$  et du paramètre  $\varepsilon$ . On peut l'exprimer par la série de puissances suivante:

$$D(z, \varepsilon) = I_1(z)\varepsilon + I_2(z)\varepsilon^2 + \dots,$$

où les fonctions  $I_k$  sont des fonctions analytiques définies sur un voisinage  $(\mathbb{R}, z')$ . Ces fonctions sont aussi appelées *fonctions de Poincaré-Pontryagin* ou *fonctions de Melnikov*.

Il y a une étroite relation entre les cycles limites qui peuvent surgir à partir des orbites périodiques  $\delta(z)$  après la perturbation (1.1) et les fonctions de Poincaré-Pontryagin. En considérant la famille de cycles  $\delta(z)$  loin des polycycles<sup>1</sup>, on a que les zéros isolés de la première fonction  $I_k$ , qui n'est pas identiquement zéro<sup>2</sup>, donnent une côte supérieure pour le nombre de cycles limites surgissant de la famille continue  $\delta(z)$ , avec  $z \in (\mathbb{R}, z')$ , dans la perturbation (1.1) [26].

Pour connaître la première fonction de Poincaré-Pontryagin qui ne s'annule pas identiquement il faut connaître les conditions pour que ces fonctions soient identiquement zéro. Le théorème de Poincaré-Pontryagin [26], nous donne la forme précise de la fonction  $I_1$ , il nous dit que  $I_1$  est une intégrale abélienne par rapport à  $\eta$  et les ovals  $\delta(z)$ ;

$$I_1(z) = \int_{\delta(z)} \eta. \quad (1.2)$$

Le problème tangentiel du centre demande justement de donner les conditions pour que l'intégrale (1.2) s'annule identiquement.

**Problème 1.0.1.** (*tangentiel du centre*) Quelles sont les conditions sur  $F$ ,  $\eta$  et  $\delta(z) \subset \{F = z\}$  pour que  $\int_{\delta(z)} \eta$  soit identiquement zéro?

En 1969 Yu. S. Ilyashenko a résolu le problème dans le cas générique où  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  est un polynôme à coefficients réels, de degré  $d$ , tel que tous ces points critiques sont des points critiques de Morse à valeurs critiques distinctes entre elles, et la partie homogène de  $F$  de plus grand degré est un produit de  $d$  facteurs linéaires distincts. On appelle cette dernière condition la *transversalité à l'infini*. Il a donné le résultat suivant:

**Théorème 1.0.1.** (*Ilyashenko [24]*) Supposons que  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  satisfait les hypothèses de généricité ci-dessus. Soit  $\delta(z) \subset \{F = z\}$  une famille continue des ovals dans le plan réel. Soit  $\eta$  une 1-forme polynomiale, alors  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , si et seulement si, il existe des polynômes  $g, R$  tels que  $\eta = g dF + dR$ .

Dans les cas non-génériques l'expression pour  $\eta$  peut être bien différente de celle du cas générique, comme on peut le constater dans les récents travaux de M. Uribe [39] où il étudie le cas où le polynôme  $F$  est un produit de droites en position générale. M. Uribe et M. Pelletier [32] ont ensuite étendu

<sup>1</sup>Si on travaille près des polycycles on peut avoir le phénomène des cycles de type aliens [5].

<sup>2</sup>Aussi appelée comme la fonction principale de Poincaré-Pontryagin.

ce résultat pour des déformations isomonodromiques. Aussi dans [8] C. Christopher et P. Mardesic ont étudié les cas non-génériques concernant la famille des polynômes hyper-elliptiques. Il reste encore plusieurs cas non-génériques à comprendre. Le but de cette thèse est d'étudier une famille d'équations différentielles hamiltoniennes, qui nous permettrons de distinguer les effets qui dérivent du manquement des hypothèses de généricité. Cette famille est constituée par des équations hamiltoniennes dont le hamiltonien  $F$  est un produit de polynômes de degré supérieur ou égal à 1, et qui ne sont pas nécessairement transverses à l'infini. Plus précisément, on considérera ici une famille de polynômes à coefficients réels, qu'on va noter  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , définit de la manière suivante:

Nous dirons que  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  appartient à  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , si et seulement si,  $F$  est de la forme

$$F = \prod_{j=1}^r f_j, \quad (1.3)$$

où  $f_j = f_{1j}^{n_j} + g_j$  sont des facteurs irréductibles de  $F$  dans  $\mathbb{R}[x, y]$ ,  $n_j \in \mathbb{Z}^+$ ,  $f_{1j}$  est un polynôme linéaire,  $f_{1j} \neq f_{1i}$  pour  $j \neq i$ ,  $f_{1j}(0) = 0$  et  $g_j$  est un polynôme dont  $\deg g_j < n_j$ , et  $F$  définit un bon partage de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  à  $r$  branches (Définition 3.5.5) et a une bonne multiplicité à l'infini (Définition 3.6.2).

Notons que la famille  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  ne satisfait pas les conditions de généricité d'Ilyashenko puisque tous les points critiques obtenus par les intersections de courbes algébriques  $\{f_j = 0\}$  sont à valeur critique zéro. Aussi, la partie homogène de plus grand degré pour  $F$ , qui est donnée par  $\prod_{j=1}^d f_{1j}^{n_j}$ , n'est pas nécessairement un produit de facteurs linéaires distincts.

On va donner une solution pour le problème tangentiel du centre pour deux sous-ensembles de la famille  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ . Pour un de ces sous-ensembles on va démontrer le résultat suivant:

**Théorème 1.0.2.** (Voir Chapitre 5)

Soit  $\delta$  un cycle évanescents<sup>3</sup> de  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  par rapport à un point critique de type centre. Supposons que tous les points critiques  $F$  de type centre sont à valeurs critiques distinctes. Alors  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , si et seulement si, il existe  $b, q_j \in \mathbb{C}[F]$ , dont l'ensemble des zéros de  $b$  est contenu dans l'ensemble des valeurs critiques de  $F$ , et  $g, R \in \mathbb{C}[x, y]$  tels que,

$$b(F)\eta = \sum_{j=1}^{r-1} q_j(F)\eta_j + g dF + dR,$$

où  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$ , pour  $j = 1, \dots, r-1$ .

L'autre sous-ensemble qu'on va considérer est celui constitué des polynômes  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  qui sont invariants sous la réflexion  $S(x, y) = (-x, y)$ . Pour ce sous-ensemble on va démontrer le résultat suivant:

**Théorème 1.0.3.** (Voir Chapitre 5)

Soit  $\delta$  un cycle évanescents<sup>4</sup> de  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  par rapport à un point critique de type

<sup>3</sup>Voir sous-section 3.2.2

<sup>4</sup>Voir sous-section 3.2.2

centre contenu dans l'axe des  $y$ . Supposons que  $F$  est invariant sous la réflexion  $S(x, y) = (-x, y)$ , tel qu'uniquement les point critiques de type centre qui sont symétriques sous  $S$  peuvent être au même niveau critique. Alors,  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , si et seulement si, il existe  $b, b_j, q_j \in \mathbb{C}[F]$ , dont l'ensemble des zéros de  $b$  peut contenir des valeurs critiques de  $F$ , et  $g, R \in \mathbb{C}[x, y]$ , tels que,

$$b(F)\eta = \sum_{i=1}^{2s} b_i(F)\tilde{\eta}_i + \sum_{j=1}^{r-1} q_j(F)\eta_j + g dF + dR,$$

où les 1-formes  $\tilde{\eta}_i$  sont invariantes sous  $S$ ,  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$ , pour  $j = 1, \dots, r-1$ , et  $s$  est le nombre de points critiques de type centre dans le demi-plan réel  $\{x > 0\}$ .

Pour comprendre le phénomène qui se trouve derrière l'annulation des intégrales (1.2), notons que dans chaque courbe de niveau  $\{F = z\}$ , on peut avoir plusieurs ovales. De cette manière les intégrales abéliennes  $\int_{\delta(z)} \eta$  peuvent être des fonctions multivaluées. Chaque famille continue d'ovales  $\delta(z)$ , avec  $z$  dans un voisinage des valeurs régulières, définit un germe de fonction analytique  $\int_{\delta(z)} \eta$ . Pour comprendre le rapport entre ces germes de fonctions, on doit considérer la complexification du polynôme  $F$ , c'est-à-dire qu'on considère  $F$  comme une fonction sur  $\mathbb{C}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Par simplicité on la notera aussi  $F$ , et on notera  $F^{-1}(z)$  la surface de Riemann définie par la complexification de  $F$ . Le théorème de la fibration de Milnor globale [23] nous dit qu'il existe un ensemble  $\Sigma_F$  fini de valeurs dans  $\mathbb{C}$ , qu'on appelle *des valeurs atypiques*, tel que la restriction  $F : \mathbb{C}^2 - F^{-1}(\Sigma_F) \rightarrow \mathbb{C} - \Sigma_F$  est une fibration localement triviale et  $\Sigma_F$  est l'ensemble le plus petit qui satisfait cela.

En utilisant les trivialisations locales de la fibration de Milnor pour  $F$ , on obtient une action du premier groupe d'homotopie de  $\mathbb{C} - \Sigma_F$  sur  $H_1(F^{-1}(z))$ :

$$\pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z) \times H_1(F^{-1}(z)) \rightarrow H_1(F^{-1}(z)),$$

tel que à chaque générateur  $l_i$  de  $\pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z)$  et pour chaque élément  $\delta(z)$  dans  $H_1(F^{-1}(z))$  on associe le cycle obtenu par le transport de  $\delta(z)$  autour de  $l_i$ . On note cet opérateur en  $H_1(F^{-1}(z))$  défini par  $l_i$  comme  $Mon_{l_i}$ , et on l'appelle *opérateur de monodromie* autour de  $l_i$ . On va noter  $\mathcal{Orb}(\delta(z))$  l'orbite par monodromie du cycle  $\delta(z)$ .

Le prolongement, en  $\mathbb{C} - \Sigma_F$ , des intégrales abéliennes  $\int_{\delta(z)} \eta$  dépend de l'orbite par monodromie du cycle  $\delta(z)$ . Puisque  $\eta$  n'est pas multivaluée, on a que le prolongement analytique de  $\int_{\delta(z)} \eta$  le long du lacet  $l_i$  est donné par  $\int_{Mon_{l_i}(\delta(z))} \eta$ . Cela implique que, si  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$  alors  $\int_{\gamma(z)} \eta \equiv 0$  pour tous les cycles  $\gamma(z) \in \mathcal{Orb}(\delta(z))$ .

De cette façon le problème tangentiel du centre est relié au problème de connaître l'espace engendré par la monodromie des cycles en  $H_1(\delta(z))$ . En particulier par une sorte de cycles qu'on appelle cycles évanescents et qui servent pour former une base pour  $H_1(F^{-1}(z))$  en ajoutant (s'il le faut) d'autres cycles, qu'on appelle aussi *évanescents à l'infini*. C'est le problème de monodromie.

**Problème 1.0.2.** (*problème de monodromie*) Soit  $\delta(z)$  un cycle évanescant d'un polynôme  $F \in \mathbb{C}[x, y]$ . Quel est l'espace engendré dans  $H_1(F^{-1}(z))$  par la monodromie de  $\delta(z)$ ?

Dans cette direction on va démontrer le résultat suivant. Pour cela on notera  $V_\infty$  le sous-espace de  $H_1(F^{-1}(z))$  engendré par des cycles qui entourent les trous qu'on obtient quand on enlève les points d'intersection entre la compactification projective de  $F^{-1}(z)$  et la droite à l'infini. On notera  $V_S$  le sous-espace de  $H_1(F^{-1}(z))$  engendré par certains cycles qui sont invariants sous la réflexion  $S(x, y) = (-x, y)$ .

**Théorème 1.0.4.** (*Voir Chapitre 4*)

Soit  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  tel que tous ses points critiques de type centre sont à niveaux critiques distincts. Soit  $\delta \in H_1(F^{-1}(z))$  un cycle évanescant en un point critique de type centre. Alors,

$$H_1(F^{-1}(z)) = \text{Orb}(\delta(z)) \oplus V_\infty.$$

**Théorème 1.0.5.** (*Voir Chapitre 4*)

Soit  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ . Supposons que  $F$  est invariant sous la réflexion  $S(x, y) = (-x, y)$  et qu'uniquement les points critiques de type centre qui sont symétriques sous  $S$  peuvent être au même niveau critique. Soit  $\delta$  un cycle évanescant de  $F$  en un point critique de type centre contenu dans l'axe des  $y$ . Alors,

$$H_1(F^{-1}(z)) = \text{Orb}(\delta(z)) \oplus V_\infty \oplus V_S.$$

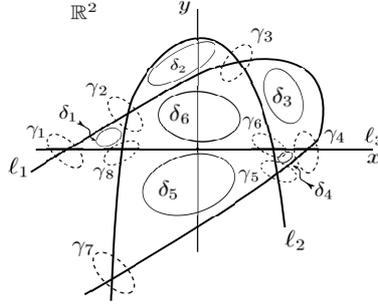
Maintenant, nous allons donner les idées pour les démonstrations des théorèmes précédents.

Pour donner les idées on va travailler sur un exemple précis. Soit

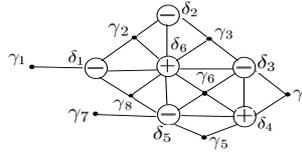
$$F = ((x - y)^2 + 2(x + y) - 16)(x^2 + y - 4)y. \quad (1.4)$$

On va noter ses facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[x, y]$  comme  $f_1 = (x - y)^2 + 2(x + y) - 16$ ,  $f_2 = x^2 + y - 4$  et  $f_3 = y$ .

Tout d'abord on va étudier la topologie de la fibre régulière de  $F$ . Pour cela notons que ce polynôme  $F$  satisfait que tous ces points critiques sont des points critiques de Morse, tous sont en  $\mathbb{R}^2$  et tous sont à valeurs critiques distinctes. En  $\mathbb{R}^2$  la foliation définie par  $dF = 0$  a 6 points critiques de type centre et 8 points critiques de type selle. Autour de chaque point critique de type centre nous avons une famille continue d'orbites périodiques, qu'on va noter  $\delta_i(z)$ . Ce sont les cycles évanescents par rapport aux points de type centre. En revanche, pour les points selles nous n'avons pas d'orbites périodiques dans le plan réel, mais à cause de la topologie locale autour d'un point de Morse on sait que pour chaque point selle il y a un cycle en  $\mathbb{C}^2$  qui l'entoure. On va noter ces cycles  $\gamma_j$ . Cela est représenté dans le dessin suivant:



Pour cette configuration nous disons que la courbe définie par  $F^{-1}(0)$  définit un *partage à 3 branches de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$*  (voir [1] et définition 3.5.1). Notons que le nombre de branches correspond au nombre de facteurs irréductibles de  $F$  dans  $\mathbb{R}[x, y]$ . En [1] A'Campo a montré que dans les partages on peut choisir une bonne orientation pour les cycles  $\delta_i$  et  $\gamma_j$  de telle façon que le nombre d'intersection entre ces cycles est égal à 0 ou 1 selon les règles de la table (3.32) dans la sous-section 3.5.1. Avec ces règles d'intersections entre les cycles évanescents on peut former un diagramme de Dynkin:



D'un autre côté, d'après les travaux de Broughton [4] et [3], on a que le premier groupe d'homologie de la surface de Riemann  $F^{-1}(z)$ , pour des valeurs génériques  $z$ , est de la forme  $H_1(F^{-1}(z)) = \mathbb{Z}^{\mu(F)} \oplus A$ , où  $\mu(F)$  est la somme de tous les nombres de Milnor de  $F$  en tous ses points critiques isolés, et  $A$  est un groupe abélien. En plus, par le Théorème 3.2.3 de Broughton, on sait que la partie correspondant à  $\mathbb{Z}^{\mu(F)}$  est engendrée par les cycles évanescents de  $F$  et qu'ils sont à la fois linéairement indépendants. Par ailleurs, le groupe  $A$  correspond aux cycles qu'on peut avoir dans un voisinage de l'infini, appelés cycles évanescents à l'infini. Dans [15] Gravrilov a montré une méthode très pratique pour obtenir la dimension de  $A$ . Pour cela, en utilisant des coordonnées tels que la projection de  $F^{-1}(z)$  sur le plan des  $x$  soit surjective, on doit prendre le discriminant de  $F$  par rapport à  $y$ , qui est un polynôme  $\Delta(x, z)$  en  $x$  et  $z$ . On note  $d(z)$  le degré de  $\Delta(x, z)$  par rapport à  $x$  pour des valeurs génériques de  $z$ , et on note  $d$  le degré de  $\Delta(x, z)$  par rapport à  $x$  pour des valeurs génériques de  $z$ . On définit  $\rho^z(F) = d - d(z)$  et  $\rho(F) = \sum_{z \in \mathbb{C}} \rho^z(F)$ . Dans [15] Gravrilov montre que  $\rho(F)$  est un invariant topologique et que  $H_1(F^{-1}(z)) = \mathbb{Z}^{\mu(F)} \oplus \mathbb{Z}^{\rho(F)}$ , pour la fibre générique de  $F$ . De cette façon, d'après les théorèmes de Broughton 3.2.3 on obtient que  $\dim A = \rho(F)$ .

Pour le polynôme  $F = ((x - y)^2 + 2(x + y) - 16)(x^2 + y - 4)y$ , après le

changement de coordonnées  $\tilde{x} = x - y$  et  $\tilde{y} = y$  on a que  $\Delta(\tilde{x}, z) = 16\tilde{x}^{17} + P(\tilde{x}, z)$ , où  $P$  est un polynôme de degré plus grand que 17 par rapport à  $x$ . Ainsi nous avons que  $\dim H_1(F^{-1}(z)) = \mu(F)$ , et que l'ensemble de cycles évanescents  $\{\delta_i\}_{i=1}^6 \cup \{\gamma_j\}_{j=1}^8$  est une base de  $H_1(F^{-1}(z))$ .

**Definition 1.0.1.** *Nous disons qu'un polynôme  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  à coefficients réels définit un bon partage à  $r$  branches en  $\mathbb{RP}^2$  si*

1.  $F^{-1}(0)$  définit un partage à  $r$  branches en  $\mathbb{RP}^2$  (voir définition 3.5.1), et chaque région de ce partage peut contenir uniquement un point critique de  $F$ .
2. Tous les points critiques de  $F$  sont de Morse et contenus en  $\mathbb{R}^2$ .
3. Le diagramme de Dynkin de  $F$  est connexe.
4.  $\rho(F) = 0$ .

En particulier, nous avons que notre polynôme  $F = ((x - y)^2 + 2(x + y) - 16)(x^2 + y - 4)y$  définit un bon partage de  $\mathbb{RP}^2$ . Rappelons-nous qu'être un bon partage est une des conditions des Théorèmes 1.0.2 et 1.0.3.

Maintenant, on va définir les cycles suivants:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1 &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_8, \\ \tilde{\gamma}_2 &= \gamma_2 + \gamma_3, \\ \tilde{\gamma}_3 &= \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_6, \\ \tilde{\gamma}_4 &= \gamma_4 + \gamma_6 + \gamma_5, \\ \tilde{\gamma}_5 &= \gamma_6 + \gamma_5 + \gamma_7 + \gamma_8, \\ \tilde{\gamma}_6 &= \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_6 + \gamma_8.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_{\ell_1} &= \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 + \gamma_5 - \gamma_7, \\ \sigma_{\ell_2} &= \gamma_7 - \gamma_8 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_6 - \gamma_5, \\ \sigma_{\ell_3} &= \gamma_1 - \gamma_8 + \gamma_6 - \gamma_4.\end{aligned}$$

Notons que par la formule de Picard-Lefschetz (voir (3.28)) on a que les cycles vérifient  $Var_0(\delta_i(z)) = \tilde{\gamma}_i(z)$ . De manière analogue, on peut définir ce type de cycles pour n'importe quel polynôme qui définit un partage en  $\mathbb{RP}^2$ . On peut montrer que ces cycles  $\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^6 \cup \{\sigma_j(z)\}_{j=1}^2$  sont linéairement indépendants entre eux. Comme ils sont contenus dans l'ensemble de cycles  $\{\gamma_j(z)\}_{j=1}^8$  de même cardinal, on peut remplacer l'ensemble  $\{\gamma_j(z)\}_{j=1}^8$  par l'ensemble  $\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^6 \cup \{\sigma_j(z)\}_{j=1}^2$ . En général, pour des polynômes qui définissent des bons partages en  $\mathbb{RP}^2$  on peut démontrer que l'ensemble engendré par les cycles  $\{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k$  est l'ensemble engendré par les cycles  $\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^n \cup \{\sigma_j(z)\}_{j=1}^{r-1}$ , où  $n$  est le nombre de points critiques de type centre,  $k$  est le nombre de points critiques de type selle et  $r$  est le nombre de branches du partage défini par  $F$  (voir Proposition 4.1.1). Ainsi, en particulier pour notre Exemple (1.4) nous avons que

$$\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^6 \cup \{\sigma_j(z)\}_{j=1}^2 \cup \{\delta_i(z)\}_{i=1}^6$$

est une base de  $H_1(F^{-1}(z))$ , pour des valeurs régulières  $z$  de  $F$ .

En utilisant la connexité du diagramme de Dynkin et la formule de Picard-Lefschetz on peut montrer pour notre exemple que l'orbite par monodromie d'un cycle évanescant  $\delta_i(z)$  est engendré par les cycles  $\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^6 \cup \{\delta_i(z)\}_{i=1}^6$ . En général, pour des bons partages en  $\mathbb{RP}^2$ , on a un résultat analogue (voir lemme 4.1.2).

Par ailleurs, une propriété des cycles  $\sigma_i(z)$  est d'être invariants sous la monodromie. D'un autre côté on a aussi que les cycles qui entourent les trous, qu'on obtient quand on enlève les points d'intersection de la compactification projective de  $F^{-1}(z)$  avec la droite à l'infini (on les appelle des *points d'indétermination*), sont invariants par la monodromie (voir Lemme 3.6.1). On note cet espace  $V_\infty$ . La condition *d'avoir une bonne multiplicité à l'infini* (voir Définition 3.6.2) nous dit que le nombre de trous obtenus en enlevant les points d'indétermination est le même que le nombre de facteurs irréductibles de  $F$  dans  $\mathbb{R}[x, y]$ . Cela implique que  $V_\infty$  est engendré par les cycles  $\{\sigma_j(z)\}_{j=1}^{r-1}$  (voir Lemme 3.6.3).

De cette façon, pour notre Exemple (1.4), comme  $\mathcal{O}rb(\delta(z)) = \{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^6 \cup \{\delta_i(z)\}_{i=1}^6$ , et l'ensemble de cycles  $\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^6 \cup \{\sigma_j(z)\}_{j=1}^2 \cup \{\delta_i(z)\}_{i=1}^6$  est une base de  $H_1(F^{-1}(z))$ , on obtient que

$$H_1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z)) \oplus V_\infty \quad (1.5)$$

(qui correspond au Théorème 1.0.4). Pour tous les détails dans le cas général en ce sous-ensemble de polynômes, voir Chapitre 4.

Pour ce qui concerne le Théorème 1.0.2 nous allons prendre l'espace dual en cohomologie de de Rham de l'expression (1.5):

$$H_{dR}^1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z))^* \oplus V_\infty^* . \quad (1.6)$$

D'autre part, la condition de *bonne multiplicité à l'infini* sur  $F$  nous dit que les cycles de  $V_\infty$  sont associés aux cycles qui font le tour des courbes algébriques  $f_j^{-1}(0)$ , pour tout  $j = 1, \dots, r$ . On peut montrer que l'ensemble des 1-formes polynomiales  $\{\eta_j := F \frac{df_j}{f_j}\}_{j=1}^{r-1}$  définit une base de l'espace dual à  $V_\infty$  (Lemme 3.6.2). D'après le *théorème de de Rham algébrique* [17] nous prenons une base  $\beta := \{\omega_i\}_{i=1}^{\mu(F)}$  de  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$  constituée de 1-formes polynomiales. Sans perte de généralité supposons que  $\{\omega_i\}_{i=1}^{r-1}$  est une base de  $V_\infty$  et  $\{\omega_i\}_{i=r}^{\mu(F)}$  est une base de  $\mathcal{O}rb(\delta(z))^*$ . On remplace  $\{\omega_i\}_{i=1}^{r-1}$  par la base de  $V_\infty^*$  donnée par les 1-formes  $\{\eta_j\}_{j=1}^{r-1}$ .

Soit  $\eta$  une 1-forme polynomiale en  $\mathbb{C}^2$ . Nous exprimons la restriction de  $\eta$  à la surface régulière  $F^{-1}(z)$  en la base  $\{\eta_j\}_{j=1}^{r-1} \cup \{\omega_i\}_{i=r}^{\mu(F)}$ ;

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \eta_j + \sum_{i=r}^{\mu(F)} a_i(z) \omega_i, \quad (1.7)$$

où  $p_j$  et  $a_i$  sont des fonctions complexes en les valeurs régulières  $z$  de  $F$ . Sous la condition  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , par prolongement analytique on obtient que  $\int_{\gamma(z)} \eta \equiv 0$

pour tous les cycles  $\gamma(z) \in \mathcal{O}rb(\delta(z))$ . Cela nous permet de montrer que tout les coefficients  $a_i$  en (1.7) sont zéro (Lemme 5.1.2), de façon que la restriction de  $\eta$  à  $F^{-1}(z)$  est engendrée juste par les 1-formes  $\eta_j$ , avec  $j = 1, \dots, r-1$ ,

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j \eta_j. \quad (1.8)$$

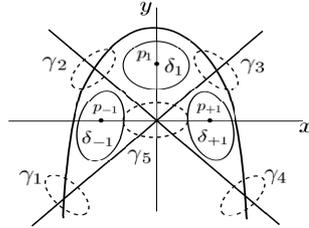
Cette condition permet de définir par intégration de  $\eta - \sum_{j=1}^{r-1} p_j \eta_j$  sur les fibres  $F^{-1}(z)$ , pour des valeurs régulières  $z$ , une fonction polynomiale  $R$  satisfaisant que  $(\eta - \sum_{j=1}^{r-1} p_j(F) \eta_j) - dR$  s'annule sur tous les vecteurs tangents aux courbes de niveaux de  $F$ . Autrement dit, il existe une fonction  $g$  telle que

$$\eta - \sum_{j=1}^{r-1} p_j \eta_j - dR = g dF.$$

En utilisant le théorème d'extension de *Hartogs* on a que  $g$  est aussi polynomiale, ce qui nous permet de conclure Théorème 1.0.2.

On considère aussi, dans Théorème 1.0.3, un autre sous-ensemble de la famille  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  constitué par des polynômes invariants sous la réflexion  $S(x, y) = (-x, y)$ . Pour expliquer ce cas-là on va considérer l'exemple suivant:

Soit  $F = (x^2 + y - 1)(x - y)(x + y)$  un polynôme à coefficients réels invariant sous  $S(x, y) = (-x, y)$ . On peut vérifier qu'il satisfait la condition d'être un bon partage de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  et d'avoir bonne multiplicité à l'infini. On représente ses cycles sur le dessin suivant:



En utilisant la formule de Picard-Lefschetz (3.28), on a que  $Mon_0(\delta_1(z)) = \delta_1(z) + \tilde{\gamma}_1(z) = \delta_1(z) + \gamma_2(z) + \gamma_3(z) + \gamma_5(z)$ . D'un autre côté, à cause de la symétrie de la réflexion, on a que  $F(p_{-1}) = F(p_{+1}) = z_{\pm 1}$ , ce qui implique que  $Mon_{z_{\pm 1}}(\delta_1(z)) = \delta_1(z) + \delta_{-1}(z) + \delta_{+1}(z)$ . Après on a aussi  $Mon_0(\delta_{-1}(z) + \delta_{+1}(z)) = \delta_{-1}(z) + \delta_{+1}(z) + \tilde{\gamma}_{-1}(z) + \tilde{\gamma}_{+1}(z)$ . Comme cela, on obtient l'orbite par monodromie de  $\delta(z)$ :

$$\mathcal{O}rb(\delta_1(z)) = \langle \{\delta_1(z), \tilde{\gamma}_1(z), \delta_{-1}(z) + \delta_{+1}(z), \tilde{\gamma}_{-1}(z) + \tilde{\gamma}_{+1}(z)\} \rangle .$$

On définit les sous espaces de  $H_1(F^{-1}(z))$  donnés par  $V_S = \langle \{\delta_{+1}(z) - \delta_{-1}(z), \tilde{\gamma}_{+1}(z) - \tilde{\gamma}_{-1}(z)\} \rangle$ , et  $V_\infty = \langle \{\sigma_1(z), \sigma_2(z)\} \rangle$ , où  $\sigma_1(z) = \gamma_1(z) -$

$\gamma_2(z) + \gamma_3(z) - \gamma_4(z)$ , et  $\sigma_2(z) = \gamma_1(z) - \gamma_5(z) + \gamma_3(z)$ . On montre que les cycles  $\delta_{+i}(z) - \delta_{-i}(z)$ ,  $\delta_{+i}(z) + \delta_{-i}(z)$ ,  $\tilde{\gamma}_j(z) - \tilde{\gamma}_j(z)$ ,  $\tilde{\gamma}_j(z) + \tilde{\gamma}_j(z)$  et les cycles  $\sigma_\ell(z)$  forment une base de  $H_1(F^{-1}(z))$  pour la fibre régulière de  $F$ . Cela nous permet d'exprimer l'homologie comme:

$$H_1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z)) \oplus V_\infty \oplus V_S.$$

En utilisant cette expression on peut montrer le Théorème 1.0.3 de manière analogue à la démonstration du Théorème 1.0.2 (pour plus de détails voir Section 5.2).

## Capítulo 2

# Introducción

El trabajo de esta tesis se enfoca en el estudio de las perturbaciones polinomiales de foliaciones Hamiltonianas.

Como es bien conocido, las foliaciones Hamiltonianas pueden presentar puntos singulares de tipo centro que se caracterizan por presentar un continuo de órbitas periódicas en toda vecindad suficientemente pequeña. Estas foliaciones son integrables y al ser perturbadas adecuadamente pueden dar lugar a nuevas órbitas periódicas (ciclos límite) aisladas de otras órbitas periódicas. El nacimiento y localización de estos ciclos es un problema que se investiga desde inicios del siglo XX y en el que han confluído distintas áreas de las matemáticas.

Dependiendo de las características de la integral primera que define a la foliación, es posible dar criterios para establecer cuándo una perturbación de ésta podría dar lugar al nacimiento de ciclos límite. Este trabajo se centra justamente en establecer uno de estos criterios. A saber, dada una función polinomial  $F$  que define lo que llamaremos una *buena partición de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$* , daremos condiciones sobre esta función bajo las cuales es posible caracterizar completamente a todas las 1-formas  $\eta$  que satisfacen la primera condición necesaria para la preservación de un centro en la perturbación de la foliación integrable definida por  $F$ .

Para poder establecer con más precisión el resultado obtenido daremos brevemente en las siguientes líneas el contexto histórico en el cual está planteado el problema.

### 2.1. Contexto histórico

Estudiar las soluciones de ecuaciones diferenciales sin conocer explícitamente a las funciones que las definen ha sido uno de los principales desafíos de las matemáticas del siglo XX. Este enfoque fue propuesto por H. Poincaré para dar una alternativa a las limitaciones del estudio cuantitativo de las ecuaciones diferenciales, al saberse que no todas las soluciones de éstas podían expresarse en términos de funciones elementales: “Il est nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elle-mêmes et sans

chercher à les ramener à des fonctions plus simples, ainsi qu'on a fait pour les fonctions algébriques, qu'on avait cherché à ramener à des radicaux et qu'on étudie maintenant directement” [33]. En estas palabras de Poincaré está el corazón de lo que ahora conocemos como la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, dentro de la cual se encuentra el objeto de estudio de esta tesis.

A lo largo de este trabajo hablaremos de ecuaciones diferenciales en el plano real (o complejo) inducidas por campos vectoriales polinomiales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Indistintamente nos referiremos a la ecuación diferencial (2.1) o al campo vectorial  $P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$  que la define.

A su vez, cuando sólo nos interese el comportamiento orbital de las soluciones, sin importar su parametrización con el tiempo, usaremos la notación de formas diferenciales:

$$\omega = Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0.$$

El espacio nulo de estas 1-formas define una foliación por curvas con singularidades.

En el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales en el plano real, Poincaré da los primeros pasos estudiando el comportamiento topológico de campos vectoriales lineales con puntos singulares no degenerados. De este estudio surge la actualmente muy conocida, clasificación topológica de puntos singulares para campos lineales

<i>Tipo</i>	<i>Valores propios</i>	<i>Forma normal</i>	(2.2)
<i>Silla</i>	$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	$x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$	
<i>Nodo</i>	$\lambda_1 \lambda_2 > 0$	$\pm(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})$	
<i>Centro</i>	$\lambda_{1,2} = \pm iw; w > 0$	$y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$	
<i>Paralelo</i>	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$	$y\frac{\partial}{\partial y}$	
<i>Nilpotente</i>	$\lambda_1 = 0 = \lambda_2$	$y\frac{\partial}{\partial x}$	

Según esta clasificación, bajo conjugación topológica (que preserva la orientación del plano y de las trayectorias) toda ecuación diferencial lineal definida por una matriz  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las raíces de su polinomio característico  $p(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$ , puede ser transformada en una de las ecuaciones de la tabla 2.2. Cada ecuación en esta tabla representa a una clase de equivalencia bajo conjugación topológica y se le denomina forma normal (topológica).

En el caso no lineal se cuenta con el teorema de Grobman-Hartman el cual establece que, si el campo vectorial tiene parte lineal no degenerada en un punto singular y la parte real de las raíces del polinomio característico  $p(\lambda)$

de la matriz asociada a la parte lineal es distinta de cero, entonces el campo vectorial es topológicamente equivalente a su parte lineal en una vecindad del punto singular.

Sin embargo el teorema de Grobman-Hartman no da una conclusión para los campos vectoriales con singularidades con parte lineal de tipo centro. En ese caso, el punto singular del campo vectorial podría ser un centro o un foco, i.e., una singularidad con curvas en forma de espirales alrededor del punto singular. Actualmente no se conoce, salvo en casos muy específicos, un criterio para decidir cuándo una singularidad con parte lineal de tipo centro, corresponde también a un centro del campo vectorial no lineal. Por ejemplo en el campo vectorial  $(-y + x^3)\frac{\partial}{\partial x} + (x + y^3)\frac{\partial}{\partial y}$ , el origen corresponde a un centro en la parte lineal, pero es un foco para el campo vectorial no lineal.

El problema de determinar las condiciones para tener un centro fue planteado por Poincaré en 1882 [33], y es conocido como el *problema del centro*. Más precisamente, este problema se plantea dentro de los campos polinomiales en el plano real como sigue:

**Problema 2.1.1.** (*Problema del centro*)

Consideremos una ecuación diferencial polinomial en  $\mathbb{R}^2$ ;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{2.3}$$

con  $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$  y  $\deg P, \deg Q \leq n$ . Si la ecuación diferencial (2.3) tiene un punto singular cuya parte lineal corresponde a una singularidad de tipo centro, ¿bajo qué condiciones en  $P$  y  $Q$  este punto singular es también un centro de la ecuación diferencial no lineal?

Un concepto importante en el estudio de este problema, es el concepto de integrabilidad. Esto es, que las hojas de la foliación estén contenidas en las curvas de nivel de una función. A nivel local esto se traduce a estudiar la integrabilidad de gérmenes de foliaciones en puntos singulares.

**Definición 2.1.1.** (*Integrabilidad*) ([26], p.180) Dado un germen  $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$  de foliación analítica en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , con  $\omega$  1-forma analítica en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , decimos que éste es integrable si existe una función (analítica)  $F$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , tal que  $\omega \wedge dF = 0$ . A esta función  $F$  se le conoce como *integral primera (analítica)*.

Notemos que la condición  $\omega \wedge dF = 0$  es equivalente a que  $\omega$  y  $dF$  sean colineales; i.e., que existe una función  $M$  tal que  $MdF = \omega$ .

La noción de integrabilidad puede extenderse a funciones no analíticas. Por ejemplo, cuando la función  $F$  de la definición anterior, es una serie formal, se dice que la foliación es formalmente integrable. Aumentando la generalidad de la integral primera, se obtienen nociones de integrabilidad más amplias.

A las foliaciones integrables con integral primera analítica también se les

conoce como foliaciones *hamiltonianas*, y a su integral primera se le llama *hamiltoniano*.

Respecto a las condiciones de centro, actualmente sólo se conocen los criterios para ecuaciones diferenciales cuadráticas con centros no degenerados (i.e, con parte lineal de tipo centro). En 1908 H. Dulac[9] ([26], p.224) probó que si  $\deg P, \deg Q \leq 2$  y la ecuación diferencial (2.3) tiene una singularidad con parte lineal de tipo centro, entonces la foliación definida por la ecuación diferencial (2.3), tiene un centro si y sólo si tiene integral primera analítica. Dulac también mostró que dentro del espacio de ecuaciones diferenciales cuadráticas, aquellas que tienen un centro no degenerado forman una variedad algebraica reducible con 4 componentes denominadas como: Hamiltoniana ( $Q_3^H$ ), Lotka Volterra ( $Q_3^{LV}$ ), Reversibles ( $Q_3^R$ ) y sistemas de codimensión 4 ( $Q_4$ ), de acuerdo a las propiedades que cumplen.

Para grados superiores, se sabe, de los teoremas de Poincaré-Lyapunov (para foliaciones en  $(\mathbb{R}^2, 0)$ ) y de Mattei-Moussu (para foliaciones en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ ) ([26], p.182, p.191), que para campos vectoriales analíticos planos no degenerados, la condición topológica de tener una singularidad de tipo centro implica la existencia de una integral primera analítica local. Sin embargo, también existen campos vectoriales planos integrables con singularidades de tipo centro, pero sin integral primera analítica.

Para entender los casos en que se pierde la analiticidad de la integral primera, es necesario extender la noción de integrabilidad. La noción de integrabilidad más general, después de la integrabilidad analítica, es la conocida *integrabilidad de Darboux*<sup>1</sup>.

**Definición 2.1.2.** (*Integrabilidad de Darboux*) Una foliación singular holomorfa en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  se dice que es Darboux integrable, si puede ser definida por una 1-forma meromorfa cerrada  $\omega$ .

La integral primera de una foliación Darboux integrable es una función multivaluada de la forma

$$F = \prod_{i=1}^d f_i^{\lambda_i}(x, y) \cdot e^{\frac{h}{g}},$$

con  $g, h, f_i \in \mathbb{C}[x, y]$  y  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ , llamada *función de Darboux*, o *función de Darboux generalizada* cuando la parte exponencial es no constante.

Cuando la integral primera, asociada a un centro, no es analítica, es frecuente que ésta sea una función de Darboux.

Por otro lado, otro concepto importante asociado a la naturaleza de los centros es el concepto de *simetrías*.

---

<sup>1</sup>Hay nociones más generales después de la integrabilidad de Darboux, por ejemplo la integrabilidad de Ricatti y la integrabilidad de Liouville.

**Definición 2.1.3.** *Una involución no trivial  $S : (x, y) \mapsto (X(x, y), Y(x, y))$  del plano  $\mathbb{R}^2$ ;  $S \circ S = id$ , con  $X$  y  $Y$  funciones algebraicas (analíticas), es una simetría algebraica (analítica) para un sistema plano, si mantiene fijo al sistema pero invierte la orientación de sus soluciones.*

Resulta que todo centro no degenerado es invariante bajo alguna simetría analítica. Esto es debido a que, bajo un cambio analítico de coordenadas, todo centro tiene una integral primera de la forma  $X^2 + Y^2$ .

Una foliación con simetrías puede tener centros degenerados sin necesidad de tener integral primera analítica. Por ejemplo, la foliación definida por la 1-forma  $\omega = x^3 dx + y^3 dy - 1/2x^2 y^2 dy$ , presenta una simetría algebraica de reflexión  $(x, y) \mapsto (-x, y)$ , sin embargo no tiene integral primera analítica ([26], p. 190).

Así pues, la integrabilidad de Darboux y la presencia de simetrías están dentro de las principales causas para que una foliación real plana pueda tener un centro [6]. Pero no se sabe si son las únicas causas. El problema del centro sigue siendo un problema abierto, aún difícil de resolver completamente.

Paralelo al problema del centro se encuentra el problema 16 de Hilbert, enunciado por D. Hilbert, dentro de una lista de 23 problemas, en el Congreso Internacional de Matemáticas en París en 1900. Éste en su segunda parte pide lo siguiente:

**Problema 2.1.2.** *(16 de Hilbert)*

*Dada una ecuación diferencial polinomial en el plano real (2.3). ¿Cuál es el número máximo de ciclos límite para todos los posibles  $P$  y  $Q$ ? Y ¿qué se puede decir de la posición relativa de los ciclos límite?*

En 1936 H. Dulac afirmó la finitud individual de los ciclos límite, i.e, para cada ecuación diferencial polinomial (2.3) el número de ciclos límite es finito. Pero la prueba de Dulac estaba incompleta. Fue hasta principios de 1990 que, de manera independiente, Y. Ilyashenko [25] y J. Écalle [10], demostraron la afirmación de Dulac.

Sin embargo, actualmente no se sabe si existe una cota uniforme finita de los ciclos límite, que dependa sólo del grado  $n$  del campo. Suponiendo su existencia, ésta suele denotarse como  $H(n)$ , *el número de Hilbert*. Para campos lineales es evidente que  $H(1) = 0$ . Pero para  $n \geq 2$  incluso la finitud de  $H(n)$  es un problema abierto ([26], p. 442).

Para entender los problemas en situaciones más sencillas, V. I. Arnold sugirió un nuevo enfoque que propone analizar lo que ocurre en perturbaciones de foliaciones Hamiltonianas. En términos locales, se formula lo que se conoce como la versión infinitesimal del problema 16 de Hilbert:

Consideremos una foliación integrable  $MdF = 0$ , con factor de inte-

gración  $M$ , y realicemos la siguiente perturbación:

$$MdF + \varepsilon\eta = 0, \quad (2.4)$$

donde la integral primera  $F$  no necesariamente es analítica en todo el plano  $\mathbb{R}^2$ ; con  $\eta$  1-forma polinomial, y  $\varepsilon$  un parámetro real suficientemente pequeño.

**Problema 2.1.3.** (*infinitesimal 16 de Hilbert*) *Dar una cota superior, en función del grado de la familia (2.4), del número de ciclos límite que pueden aparecer en ésta.*

Es decir, dar una cota de los ciclos límite que surgen del sistema integrable  $MdF = 0$  al realizar la perturbación (2.4).

Si se considera la función de desplazamiento asociada a una órbita periódica  $\delta(z)$ , en la familia de foliaciones (2.4), el teorema de Poincaré-Pontryagin (sección 3.1, teorema 3.1.1) muestra que el término de primer orden, de su desarrollo en series de potencias respecto al parámetro  $\varepsilon$ , está dado por la *integral de Poincaré-Pontryagin*,

$$\int_{\delta(z)} \frac{\eta}{M}. \quad (2.5)$$

Cuando se trabaja en la vecindad tubular de una órbita regular  $\delta(z)$ , que no incluya policiclos, resulta que los ciclos límite que se bifurcan de la perturbación (2.4), están acotados por los ceros de la integral (2.5), siempre que esta integral no sea idénticamente cero en la familia continua de órbitas periódicas de la vecindad tubular de  $\delta(z)$ . Sin embargo, aquí es importante remarcar que esto no es cierto si se trabaja en la vecindad de un policiclo. En esos casos, puede haber ciclos límite que no correspondan a ceros de una integral del tipo (2.5). Estos ciclos son conocidos como *ciclos límite de tipo Alien* [5]. En esta tesis no consideraremos el caso de vecindades de policiclos. Sólo trabajaremos los casos de vecindades de órbitas regulares.

De esto se tiene la *versión tangencial del problema 16 de Hilbert*:

**Problema 2.1.4.** (*tangencial 16 de Hilbert*)

*Dar una cota superior del número de ceros aislados de la integral (2.5).*

Cuando la integral (2.5) se anula idénticamente, ya no proporciona una cota de los ciclos límite, y deben considerarse términos de orden superior, en el desarrollo en serie de potencias de la función de desplazamiento, para dar una cota. Sin embargo, desde el punto de vista de conservar órbitas periódicas en la perturbación (2.4), ya que la integral (2.5) es el término de primer orden del desarrollo en series de la función de desplazamiento, que la integral (2.5) se anule idénticamente puede interpretarse como una aproximación tangencial a un centro. De este modo también surge lo que se conoce como la *versión tangencial del problema del centro*;

**Problema 2.1.5.** (*Tangencial del centro*)

Dar condiciones en la perturbación (2.4), de modo que la integral (2.5) sea idénticamente cero.

El análisis de la posibilidad de encontrar condiciones bajo las cuales la integral  $\int_{\delta(z)} \frac{\eta}{M}$  se anule idénticamente está relacionado con la continuación analítica de esta integral como función de  $z$ . Esto se estudia considerando la complejificación de  $F$ , de modo que los conjuntos de nivel  $F^{-1}(z)$  son superficies de Riemann contenidas en  $\mathbb{C}^2$ . Existe un conjunto discreto de puntos en  $\mathbb{C}$ , tales que cuando  $z$  rodea a uno de esos valores, se producen cambios no triviales en las clases de los ciclos en el primer grupo de homología de la superficie  $F^{-1}(z)$ . A este fenómeno se le conoce como *monodromía*. Para conocer la continuación analítica de  $\int_{\delta(z)} \frac{\eta}{M}$  necesitamos conocer cómo cambia el ciclo  $\delta(z)$  bajo la monodromía. A esto se le conoce como el *problema de monodromía*:

**Problema 2.1.6.** (*Problema de monodromía*) ¿Cuál es el espacio generado por la órbita por monodromía de un ciclo evanescente  $\delta(z)$  en la 1-homología de la fibra regular de  $F$ ?

En el caso genérico, cuando  $F$  es un polinomio con coeficientes reales, Ilyashenko [24] probó que, si  $\delta(z)$  es una familia continua de órbitas periódicas reales, entonces la órbita por monodromía de  $\delta(z)$  genera a todos los ciclos de  $H_1(F^{-1}(z))$ . Con esto Ilyashenko resolvió también el problema tangencial del centro en el caso genérico para  $F$  polinomial; mostró que si  $\eta$  es una 1-forma polinomial entonces

$$\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0 \text{ si y sólo si } \eta = g dF + dR,$$

con  $g, R$  polinomios.

Cuando la integral primera  $F$  es una función de Darboux, para el caso genérico Christopher y Mardesic [7] probaron que si  $\delta(z)$  es un *ciclo evanescente* (ver subsección 3.2.2) entonces la monodromía de  $\delta(z)$  genera a todos los ciclos de  $H_1(F^{-1}(z))$  contenidos en la vecindad de una separatriz. Con esto también resolvieron el problema tangencial del centro para este caso. Esto es, si  $F = \prod_{j=1}^d f_j^{\lambda_j}$ , con  $f_j \in \mathbb{R}[x, y]$  y  $\lambda_j \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \notin \mathbb{Q}$ , entonces<sup>2</sup>

$$\int_{\delta(z)} \frac{\eta}{M} \equiv 0 \text{ si y sólo si } \frac{\eta}{M} = \sum_{j=1}^d a_j \frac{df_j}{f_j} + \frac{g}{M} \frac{dF}{F} + d \left( \frac{R}{M} \right),$$

donde  $g, R \in \mathbb{C}[x, y]$  y  $a_j \in \mathbb{C}$ .

Estas soluciones nos muestran que un primer paso para resolver el problema tangencial del centro, es conocer qué tanto genera la órbita por

<sup>2</sup>Más otras hipótesis de genericidad en [7].

monodromía de  $\delta(z)$  en la 1-homología de las superficies de nivel,  $F^{-1}(z)$ , de la complejificación de  $F$ . En algunos casos no genéricos, como en [39], [8] y [32], resulta que la órbita por monodromía de un ciclo evanescente no necesariamente genera toda la 1-homología de  $F^{-1}(z)$ , y esto se traduce en el problema tangencial del centro, en agregar otros términos a la expresión de la forma  $\eta$  del caso genérico.

En esta tesis estudiaremos una familia de ecuaciones hamiltonianas no genéricas. Esta familia satisface ciertas condiciones geométricas que permiten calcular la órbita por monodromía de los ciclos evanescentes, y caracterizar a los ciclos que están en el complemento de la órbita por monodromía. Esto nos permitirá solucionar el problema de monodromía, y a su vez el problema tangencial del centro para dos subconjunto de esa familia de ecuaciones hamiltonianas. A continuación describiremos esta familia con más precisión.

## 2.2. Resultados de la tesis

Sea  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  tal que su correspondiente ecuación hamiltoniana  $\dot{x} = F_y$ ,  $\dot{y} = -F_x$  tiene al menos un punto singular de tipo centro. Consideraremos también su ecuación de Pfaff asociada,  $dF = 0$ . La foliación singular de curvas de nivel reales  $\{F = c\}$ ,  $c \in (\mathbb{R}, c_0)$ , define una familia continua de ovalos (realacionados a órbitas periódicas de la ecuación hamiltoniana) en una vecindad de cada punto singular de tipo centro.

Dentro de este texto los puntos críticos de Morse de  $F$  que corresponden a puntos singulares de tipo centro de la ecuación hamiltoniana serán llamados *puntos críticos de tipo centro de  $F$* .

Ahora, definiremos una familia de polinomios reales, que serán los hamiltonianos de la familia de ecuaciones hamiltonianas no genéricas que consideraremos en esta tesis. El proposito de estudiar esta familia particular es que ésta nos proporciona un modelo de ecuación hamiltoniana que nos puede servir para entender otros casos no genéricos, esto mediante una foliación grande que conecte este tipo de hamiltonianos con otros que tengan la misma estructura (ver capítulo 6).

Sea  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  la siguiente familia de polinomios reales:  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  si es de la forma

$$F = \prod_{j=1}^r f_j, \quad (2.6)$$

donde  $f_j = f_{1j}^{n_j} + g_j$  son factores irreducibles de  $F$  en  $\mathbb{R}[x, y]$ ,  $n_j \in \mathbb{Z}^+$ ,  $f_{1j}$  es lineal,  $f_{1j}(0) = 0$  y  $g_j$  es un polinomio con  $\deg g_j < n_j$ , y  $F$  define una buena partición de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  con  $r$  ramas (ver definición 3.5.5) y tiene una buena multiplicidad al infinito (ver definición 3.6.2).

Perturbamos a la foliación hamiltoniana  $dF = 0$  de la siguiente manera:

$$dF + \varepsilon\eta = 0,$$

con  $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$  y  $\eta$  1-forma polinomial. Queremos conocer aquellas 1-formas  $\eta$  que preservan en un primer orden a las órbitas periódicas de la foliación hamiltoniana  $dF = 0$ . Esto es equivalente a caracterizar las 1-formas  $\eta$  tales que  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$  (como se verá en la sección 3.1) y que corresponde al problema tangencial del centro. Para esta familia de hamiltonianos  $F$  mostraremos lo siguiente:

**Teorema 2.2.1.** (teorema 5.1.1, capítulo 5)

Sea  $\delta$  un ciclo evanescente de  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  respecto a un punto crítico de tipo centro. Asumamos que todos los puntos críticos de  $F$  de tipo centro tienen valores críticos distintos. Entonces  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , si y sólo si, existen  $b, q_j \in \mathbb{C}[F]$ , donde los ceros de  $b$  están contenidos en el conjunto de valores críticos de  $F$ , y  $g, R \in \mathbb{C}[x, y]$  tales que,

$$b(F)\eta = \sum_{j=1}^{r-1} q_j(F)\eta_j + gdF + dR,$$

con  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$ , para  $j = 1, \dots, r-1$ .

**Teorema 2.2.2.** (teorema 5.2.1, capítulo 5)

Sea  $\delta$  un ciclo evanescente de  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  respecto a un punto crítico de tipo centro contenido en el eje  $y$ . Asumamos que  $F$  es invariante bajo la reflexión  $S(x, y) = (-x, y)$ , y que únicamente los puntos críticos de tipo centro que son simétricos bajo  $S$  pueden tener el mismo valor crítico. Entonces,  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , si y sólo si, existen  $b, b_j, q_j \in \mathbb{C}[F]$ , donde el conjunto de ceros de  $b$  puede contener valores críticos de  $F$ , y  $g, R \in \mathbb{C}[x, y]$ , tales que,

$$b(F)\eta = \sum_{i=1}^{2s} b_i(F)\tilde{\eta}_i + \sum_{j=1}^{r-1} q_j(F)\eta_j + gdF + dR,$$

donde las 1-formas  $\tilde{\eta}_i$  son invariantes bajo  $S$ ,  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$ , para  $j = 1, \dots, r-1$ , y  $s$  es el número de puntos críticos de tipo centro en el semiplano real  $\{x > 0\}$ .

Como se mencionó en la introducción, el problema tangencial del centro está estrechamente relacionado con el problema de la monodromía. Por ello, para demostrar los teoremas anteriores, necesitamos antes conocer qué tanto espacio es generado por la órbita por monodromía de un ciclo evanescente. Para esto, consideraremos la complejificación de  $F$ , que por simplicidad denotaremos también como  $F$ . Para ciclos  $\delta(z) \in H_1(F^{-1}(z))$  denotaremos por  $\mathcal{O}rb(\delta(z))$  a la órbita por monodromía de  $\delta(z)$ . También denotaremos por  $V_\infty$  a el subespacio de  $H_1(F^{-1}(z))$  generado por los ciclos que rodean a los hoyos en la superficie regular  $F^{-1}(z)$  producidos al quitar, a la compactificación proyectiva  $\overline{F^{-1}(z)}$ , los puntos de intersección entre  $\overline{F^{-1}(z)}$  y la línea al infinito  $L_\infty$  en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  (ver subsección 3.6.2). En el caso donde el polinomio  $F$  es invariante bajo la reflexión  $S(x, y) = (-x, y)$ , también consideraremos el subespacio, que denotaremos  $V_S$ , generado por un conjunto de ciclos invariantes bajo  $S$  (ver sección 4.2). Respecto al problema de monodromía mostraremos lo siguiente:

**Teorema 2.2.3.** *(teorema 4.1.1, capítulo 4)*

Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  tal que todos sus puntos críticos de tipo centro están en valores críticos distintos. Sea  $\delta \in H_1(F^{-1}(z))$  un ciclo evanescente en un punto críticos de tipo centro. Entonces,

$$H_1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z)) \oplus V_\infty.$$

**Teorema 2.2.4.** *(teorema 4.2.1, capítulo 4)*

Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ . Asumamos que  $F$  es invariante bajo la reflexión  $S(x, y) = (-x, y)$ , y que únicamente los puntos críticos de tipo centro que son simétricos bajo  $S$  pueden estar en el mismo nivel crítico. Sea  $\delta$  un ciclo evanescente de  $F$  en un punto críticos de tipo centro contenido en el eje  $y$ . Entonces,

$$H_1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z)) \oplus V_\infty \oplus V_S.$$

Estos resultados aportan soluciones al problema tangencial del centro y al problema de monodromía en la familia de polinomios  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ . Se espera que, mediante el entendimiento de estos casos, en trabajos futuros se puedan comprender otros casos no genéricos.

## Capítulo 3

# Nociones fundamentales para el problema de la monodromía y el problema tangencial del centro

El estudio de este trabajo está dirigido al análisis del comportamiento de las órbitas periódicas de foliaciones integrables bajo perturbaciones polinomiales. En la siguiente sección comenzamos haciendo un estudio local en puntos de tipo centro, y no hacemos distinción al tipo de integral primera que tenemos. Esto para remarcar que el problema a tratar puede plantearse del mismo modo en términos más generales. Conforme avancemos en la exposición de este trabajo consideraremos condiciones más específicas en la integral primera que estudiaremos. En general, en este capítulo veremos los conceptos y resultados que forman parte de la teoría general entorno al *problema de la monodromía* y el *problema tangencial del centro*, y que necesitaremos para llegar a los resultados de los últimos capítulos.

### 3.1. Perturbaciones de órbitas periódicas

En esta sección desarrollaremos el plantamiento general del problema que se abordará en esta tesis. Lo que queremos es estudiar lo que ocurre al perturbar órbitas periódicas de una foliación analítica en el plano real. Empezaremos haciendo un estudio local, por lo que primero consideraremos órbitas periódicas en la vecindad de un punto singular de tipo centro en una foliación analítica. Esto significa que en una vecindad del punto de tipo centro la foliación está descrita como

$$MdF = 0,$$

donde el factor integrante  $M$  es una función analítica en una vecindad del punto singular, y la integral primera  $F$  es continua en el punto singular y analítica fuera de él (no necesariamente es analítica en el punto singular) ([26], Remark.11.9).

Haciendo uso de la función de primer retorno de Poincaré, en vecindades de órbitas periódicas de la foliación local  $MdF = 0$ , estudiaremos las deformaciones de las órbitas periódicas después de realizar una perturbación del estilo  $MdF + \varepsilon\eta = 0$ , con  $\eta$  1-forma analítica. Veremos que la primera variación de la función de primer retorno, en su expansión como serie de potencias respecto al parámetro  $\varepsilon$ , está dada por la integral de la 1-forma  $\frac{1}{M}\eta$  en las órbitas periódicas de  $MdF = 0$ , y que los ceros aislados de esta integral genéricamente se corresponden con los ciclos límite que pueden surgir de la perturbación<sup>1</sup>. También estudiaremos el concepto de *ciclicidad*, es decir, el número máximo de ciclos límite que pueden surgir de una órbita periódica al realizar una perturbación, y veremos su relación con las variaciones de orden superior de la transformación de primer retorno.

Consideremos la foliación en  $\mathbb{R}^2$  que describimos arriba dada por

$$MdF = 0,$$

con hojas definidas por las curvas de nivel de  $F$  en la vecindad de un punto singular de tipo centro. Denotaremos con la variable  $z$  a los valores de  $F$ , y denotaremos por  $\delta(z)$  a las órbitas periódicas, en la vecindad del punto singular de tipo centro, contenidas en la curva de nivel  $z$  de  $F$ ,  $\delta(z) \subset F^{-1}(z)$ .

Realizaremos una perturbación lineal 1-paramétrica de la foliación local  $MdF = 0$ , dada por una 1-forma analítica  $\eta$  de la siguiente manera:

$$MdF + \varepsilon\eta = 0, \text{ con } \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0). \quad (3.1)$$

Esta foliación corresponde a la ecuación diferencial ordinaria, en el plano real, dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= MF_y + \varepsilon p(x, y) \\ \dot{y} &= -MF_x + \varepsilon q(x, y), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde la 1-forma  $\eta$  es igual a  $p(x, y)dx - q(x, y)dy$ , con  $p, q$  funciones analíticas.

Dividiendo (3.1) por la función  $M$ , se obtiene una foliación equivalente dada por

$$dF + \varepsilon \frac{\eta}{M} = 0, \text{ con } \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0). \quad (3.3)$$

Tomemos una vecindad tubular  $U$  definida por una unión continua de órbitas periódicas  $\delta(z)$ ,  $U = \bigcup_{z \in V} \delta(z)$ , donde  $V \subset \mathbb{R}$  es una vecindad de un valor regular de  $F$  sin valores críticos. Notemos que  $U$  no incluye policiclos pues no contiene puntos críticos.

---

<sup>1</sup>Esto no necesariamente es cierto en el caso de trabajar en la vecindad de un policiclo [5].

Para estudiar el efecto de la perturbación (3.3) sobre los ciclos de la vecindad tubular  $U$ , consideraremos la transformación de primer retorno para las órbitas en  $U$ , dependiendo del parámetro  $\varepsilon$ . Para esto tomemos  $\tau : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow U$ , una sección transversal a las órbitas en  $U$ . Como  $U$  no tiene puntos críticos podemos parametrizar la imagen de  $\tau$  con los valores de  $F$ , de modo que  $F|_{\tau} = id$ . Como  $U = \bigcup_{z \in V} \delta(z)$ , con  $V$  abierto conexo contenido en  $\mathbb{R} - \{\text{valores críticos de } F\}$ , entonces parametrizando  $\tau$  con los valores de  $F$ , tenemos que la imagen de  $\tau$  está contenida en el abierto  $V$ .

Consideremos la transformación de primer retorno de la foliación (3.3) respecto a las órbitas en  $U$  y dependiendo del parámetro  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} P : V \times (\mathbb{R}, 0) &\rightarrow V \\ (z, \varepsilon) &\mapsto P(z, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para cada valor del parámetro  $\varepsilon$ , esta transformación asocia a cada punto  $z$  en la sección transversal  $\tau$ , el siguiente punto en el que la solución que pasa por  $z$  regresa a la transversal  $\tau$ . Denotamos ese punto por  $P(z, \varepsilon)$ . Por estar definida por las soluciones de (3.2), la transformación de primer retorno es tan diferenciable como la ecuación diferencial (3.2) ([26], p. 168). En este caso como la foliación (3.3) depende analíticamente de cada variable en la vecindad tubular  $U$ , tenemos que  $P$  también es analítica en cada variable, por lo que en particular admite el siguiente desarrollo en series de potencias convergente:

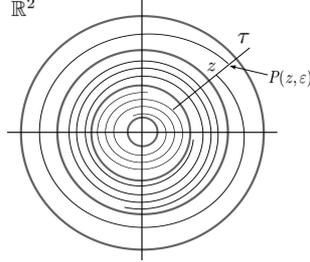
$$P(z, \varepsilon) = z + \varepsilon I_1(z) + \varepsilon^2 I_2(z) + \dots, \quad (3.5)$$

donde las funciones  $I_j(z)$  son funciones reales analíticas en la variable  $z$ , definidas en un abierto contenido en  $V$ , que sin pérdida de generalidad supondremos que es el mismo  $V$ . Notemos que  $I_0$  es idénticamente 1 pues en  $\varepsilon = 0$  la foliación (3.3) es integrable.

La función  $I_j$  representa la  $j$ -ésima variación de la expansión de  $P$  respecto a  $\varepsilon$ . Estas funciones son comúnmente llamadas *funciones de Poincaré-Pontryagin* o *funciones de Melnikov*. La primera de ellas que no es idénticamente cero, recibe además el nombre de *función principal*.

Claramente las órbitas periódicas de la foliación (3.3) corresponden a los puntos fijos de la transformación  $P$ .

Sin embargo, en ocasiones es conveniente trabajar con la diferencia entre la transformación de primer retorno y la identidad. La función dada por esta diferencia,  $D(z, \varepsilon) = P(z, \varepsilon) - z$ , es conocida como la *función de desplazamiento*. De esta manera, las órbitas periódicas de (3.3), se identifican con los ceros de la función de desplazamiento. En particular, si la función de desplazamiento no es idénticamente cero, entonces por analiticidad sus ceros son aislados y éstos representan ciclos límite en la perturbación (3.3).



**Definición 3.1.1.** ([6], p. 113)([40], p. 6) Decimos que una órbita periódica  $\delta(z) \subset \{F = z\}$ , es generadora de ciclos límite en la foliación (3.3), si existe  $\varepsilon^* > 0$  tal que para todo  $|\varepsilon| < \varepsilon^*$  existe un ciclo límite  $\Gamma_\varepsilon$  de (3.3) tal que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon = \delta(z)$  (en la distancia de Hausdorff). En este caso, decimos que los ciclos límite  $\Gamma_\varepsilon$  se bifurcan de la órbita periódica  $\delta(z)$ .

Nota: La distancia de Hausdorff entre dos conjuntos compactos  $K$  y  $L$  está definida como

$$d_H(K, L) = \sup\{d(K, x), d(y, L) : \text{con } x \in L, y \in K\},$$

donde  $d(K, x)$  y  $d(L, y)$  denotan a la distancia euclidiana entre un punto y un conjunto, i.e., la distancia más corta que hay entre el punto y todos los puntos del conjunto.

Así, en la distancia de Hausdorff, dos órbitas periódicas están a distancia cero, si y sólo si son iguales.

**Definición 3.1.2.** [36] Dada una órbita periódica  $\delta(z')$ , de la foliación  $dF = 0$ , donde  $\delta(z') \subset \{F = z'\}$ , se define la ciclicidad de  $\delta(z')$  respecto a la perturbación (3.3), como

$$\text{cycl}(dF + \varepsilon \frac{\eta}{M}, \delta(z)) = \limsup_{z \rightarrow z', \varepsilon \rightarrow 0} \{\#\text{ceros aislados de } D(z, \varepsilon)\}$$

Es decir, la ciclicidad de  $\delta(z')$  respecto a la perturbación (3.3), es el número máximo de ciclos límite que pueden bifurcarse de  $\delta(z')$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño.

Si consideramos la función de primer retorno con respecto a una órbita regular  $\delta(z)$  (no en políciclos), como en el caso que estamos considerando (3.5), resulta que este número es acotado por el número de ceros de la primera función de Poincaré-Pontryagin no idénticamente cero:

**Proposición 3.1.1.** ([26], p.506) Sea  $I_k$  la función principal de Poincaré-Pontryagin del desarrollo (3.5) de la transformación de primer retorno  $P$ , i.e.,

$$P(z, \varepsilon) = z + \varepsilon^k I_k(z) + O(\varepsilon^{k+1}), \text{ con } I_k \not\equiv 0.$$

Entonces existen  $\rho > 0$  y  $r > 0$  tales que para todo  $|z - z_0| \leq \rho$  y  $|\varepsilon| < r$  la foliación (3.3) tiene a los más  $\#\{\text{ceros de } I_k \text{ contados con multiplicidad}\}$  ciclos límite.

*Demostración.* Consecuencia del teorema de continuidad de las raíces en funciones analíticas.  $\square$

De este modo, se tiene que

$$\text{cycl}(dF + \varepsilon \frac{\eta}{M}, \delta(z_0)) \leq \#\{\text{ceros de } I_k \text{ contados con multiplicidad}\}$$

Por esta razón, a la función principal de Poincaré-Pontryagin también se le conoce en algunos textos como *la función generadora de ciclos límite*.

La primera variación  $I_1$  siempre tiene una expresión sencilla como integral de la 1-forma  $\frac{1}{M}\eta$  en órbitas, como lo expresa el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.1.** (*Poincaré-Pontryagin*) ([26], p. 507)

$$I_1(z) = - \int_{\delta(z)} \frac{\eta}{M}, \quad (3.6)$$

*Demostración.* Sea  $P(z, \varepsilon)$  la transformación de primer retorno de la familia (3.3) respecto a  $\delta(z)$ , como se describió en (3.4), definida sobre una transversal local  $\tau$  parametrizada por los valores de  $F$ ; i.e., tal que  $F|_{\tau} = Id$ .

Denotemos por  $\delta_{\varepsilon}(z)$  a la curva, que es tangente a la foliación

$$dF + \varepsilon \frac{\eta}{M} = 0,$$

y que une al punto  $z$  de la sección transversal  $\tau$  y con el punto  $P(z, \varepsilon)$ . Esto significa que,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(z) = \delta(z)$ .

Ya que  $\delta_{\varepsilon}(z)$  es tangente a la 1-forma  $dF + \varepsilon \frac{\eta}{M}$ , entonces la integral de  $dF + \varepsilon \frac{\eta}{M}$  a lo largo de  $\delta_{\varepsilon}(z)$  es cero;

$$\int_{\delta_{\varepsilon}(z)} dF + \varepsilon \frac{\eta}{M} = 0. \quad (3.7)$$

Por otro lado, por la parametrización que elegimos para  $\tau$ , y usando el teorema fundamental del cálculo, tenemos que

$$\int_{\delta_{\varepsilon}(z)} dF = F(P(z, \varepsilon)) - F(z) = P(z, \varepsilon) - z.$$

Sustituyendo la expresión anterior en la integral (3.7), se tiene que

$$(P(z, \varepsilon) - z) + \varepsilon \int_{\delta_{\varepsilon}(z)} \frac{\eta}{M} = 0.$$

Sustituyendo  $P(z, \varepsilon) - z$  por el desarrollo (3.5) de la transformación de primer retorno, y pasando a la integral de  $\eta$  al lado derecho de la igualdad anterior, tenemos que

$$\varepsilon I_1(z) + O(\varepsilon^2) = -\varepsilon \int_{\delta_{\varepsilon}(z)} \frac{\eta}{M}.$$

Finalmente, derivando la expresión anterior en  $\varepsilon = 0$ , se obtiene lo que se quería probar

$$I_1(z) = - \int_{\delta(z)} \frac{\eta}{M}.$$

□

**Definición 3.1.3.** *Las integrales del estilo*

$$\int_{\delta(z) \subset F^{-1}(z)} \frac{\eta}{M},$$

*reciben el nombre de integrales de Poincaré-Pontryagin.*

**Comentario 3.1.1.** *Estos resultados son válidos en la vecindad de cualquier órbita periódica regular, siempre que la vecindad esté lejos de los policiclos. Es decir, podemos hacer el mismo análisis en cualquier vecindad tubular, foliada por órbitas periódicas regulares, sin importar que éstas órbitas no estén en la vecindad de un punto singular de tipo centro.*

Hacemos notar que cuando la primera variación  $I_1$  no es idénticamente cero, entonces los ciclos límite que se bifurcan de la vecindad  $U = \bigcup_{z \in V} \delta(z)$  al realizar la perturbación (3.3), están acotados por los ceros de la integral de Poincaré-Pontryagin  $\int_{\delta(z)} \frac{\eta}{M}$ , con  $z$  en una vecindad sin valores críticos de  $F$ . Sin embargo, si esta integral es idénticamente cero, entonces se deben considerar variaciones de orden superior, i.e., la siguiente función  $I_k$ , con  $k > 1$ , que no sea idénticamente cero.

En esta tesis trabajaremos el caso en que  $F$  es un polinomio real, y el factor integrante  $M$  es igual a 1. De modo que partiremos de la foliación hamiltoniana definida por

$$dF = 0,$$

y consideraremos perturbaciones polinomiales dadas por

$$dF + \varepsilon\eta = 0, \tag{3.8}$$

con  $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$ , y  $\eta$  1-forma polinomial.

En este caso, la primera variación  $I_1$ , de la transformación de primer retorno, está dada por la integral

$$\int_{\delta(z)} \eta, \tag{3.9}$$

que es un tipo particular integral de Poincaré-Pontryagin.

**Definición 3.1.4.** *A las integrales del tipo*

$$\int_{\delta(z)} \eta,$$

*con  $\eta$  1-forma racional, y  $\delta(z)$  curva algebraica cerrada contenida en  $F^{-1}(z)$ , con  $F$  polinomial, se les conoce como integrales abelianas.*

El tema principal de esta tesis es estudiar cuáles son las condiciones para que la integral abeliana  $\int_{\delta(z)} \eta$  se anule idénticamente. Dependiendo del polinomio  $F$  que defina a la integral primera de la foliación hamiltoniana inicial,  $dF = 0$ , se obtendrán las características que debe satisfacer la 1-forma  $\eta$ , que define a la perturbación, para que la integral abeliana  $\int_{\delta(z)} \eta$  se anule idénticamente.

Por otro lado, que la función  $I_1$  sea idénticamente cero, es la primer condición necesaria para que se preserve la familia de órbitas periódicas en la vecindad tubular  $U = \bigcup_{z \in V} \delta(z)$ . Más adelante veremos que, dependiendo de la integral primera  $F$  y del grado de la 1-forma  $\eta$  [24], a veces es suficiente que  $\int_{\delta(z)} \eta$  sea idénticamente cero para que la función de desplazamiento también sea idénticamente cero. En este sentido hablaremos de una noción tangencial de centro, que significa lo siguiente:

**Definición 3.1.5.** *Sea  $p_0$  un punto crítico de tipo centro de  $F$ . Diremos que la foliación  $dF + \varepsilon\eta = 0$  tiene un centro tangencial en el punto  $p_0$ , si para cualquier vecindad tubular  $U = \bigcup_{z \in V} \delta(z)$ , foliada por órbitas periódicas de  $dF = 0$  en una vecindad de  $p_0$ , la integral  $I_1 = \int_{\delta(z)} \eta$  es idénticamente cero.*

Así, el *problema tangencial del centro*, que pide de determinar las condiciones para que la integral abeliana (3.9) sea idénticamente cero, puede reformularse de la siguiente manera:

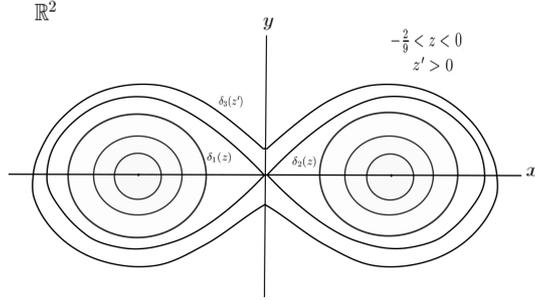
**Problema 3.1.1.** *(Tangencial del centro) Dado un polinomio  $F$ , dar las condiciones que debe satisfacer la 1-forma  $\eta$  para que la foliación*

$$dF + \varepsilon\eta = 0$$

*tenga un centro tangencial.*

Sin embargo, por el comentario (3.1.1), el *problema tangencial del centro* puede plantearse más que para vecindades de puntos críticos de tipo centro, en vecindades tubulares de órbitas periódicas regulares. Los resultados que se estudian en esta tesis, resultan de analizar vecindades (lejos de policiclos) de órbitas periódicas regulares. Como se dijo en la introducción, la contribución de este trabajo es dar solución al *problema tangencial del centro* para dos tipos no genéricos de polinomio  $F$ . Estos resultados se muestran en los últimos capítulos.

**Ejemplo 3.1.1.** *Consideremos el polinomio  $F = y^2 - x^2 + x^4$ . Éste tiene tres familias de órbitas periódicas  $\delta_1(z)$ ,  $\delta_2(z)$  y  $\delta_3(z)$  dadas de la siguiente manera:  $\delta_1(z)$  y  $\delta_2(z)$  están contenidas en las curvas de nivel  $F^{-1}(z)$  con  $-\frac{2}{9} < z < 0$ , donde las órbitas  $\delta_1(z)$  rodean al punto crítico de tipo centro dado por  $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$  y las órbitas  $\delta_2(z)$  rodean al punto crítico de tipo centro dado por  $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ . Mientras que las órbitas periódicas  $\delta_3(z)$ , están contenidas en las curvas de nivel  $F^{-1}(z)$  con  $z > 0$ , y no están en la vecindad de ningún punto de tipo centro en  $\mathbb{R}^2$ .*



El análisis anterior nos dice que, al realizar la perturbación  $dF + \varepsilon\eta = 0$ , la primera variación de la función de desplazamiento en cada familia de órbitas periódicas, está determinada por la integral abeliana  $\int_{\delta_j(z)} \eta$  con  $j = 1, 2, 3$ .

Si consideramos a  $F$  como un polinomio en el dominio complejo, de modo que sus valores  $z$  sean complejos, las integrales abelianas  $\int_{\delta_j(z)} \eta$  son gérmenes de funciones analíticas, que admiten continuación analítica (subsección 3.2.3). Ese aspecto es fundamental para entender las condiciones para que la integral  $\int_{\delta(z)} \eta$  se anule idénticamente en una familia de órbitas periódicas  $\delta(z) \subset F^{-1}(z)$ . Pues dependiendo de la continuación analítica de las integrales abelianas  $\int_{\delta_j(z)} \eta$ , para cada familia continua de órbitas periódicas  $\delta_j(z)$ , podría ocurrir que la anulación de una de estas integrales implique la anulación de la integral en otra familia continua de órbitas periódicas. Para justificar este paso del dominio real al complejo necesitamos los conceptos de *fibración de Milnor* y de *monodromía* que se verán en la siguiente sección.

### 3.2. Fibración de Milnor y monodromía

Sea  $F$  un polinomio con coeficientes reales,  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ . Consideremos la foliación hamiltoniana definida por la diferencial de  $F$ ,  $dF = 0$ . Denotamos por  $\delta_j(z)$  a las familias continuas de órbitas periódicas de la foliación  $dF = 0$  en  $\mathbb{R}^2$ . En esta sección lo que queremos es estudiar qué relación hay entre las integrales abelianas  $\int_{\delta_j(z)} \eta$ , definidas en las familias  $\delta_j(z)$ . Para esto, consideraremos la complejificación del polinomio  $F$ , es decir, veremos a  $F$  como función de  $\mathbb{C}^2$  en  $\mathbb{C}$ . Las curvas de nivel de la complejificación de  $F$  serán superficies algebraicas de dimensión real 2, contenidas en  $\mathbb{C}^2$  (superficies de Riemann). De esta manera, las órbitas periódicas reales  $\delta_j(z)$  representarán clases, en el primer grupo de homología de las superficies de nivel de la complejificación de  $F$ .

Además notemos que, dado que las superficies de nivel de la complejificación de  $F$  son superficies de Riemann, éstas tienen una orientación natural inducida por el espacio ambiente  $\mathbb{C}^2$ . Esto, a su vez, le da una orientación natural a los ciclos  $\delta(z)$  contenidos en las superficies  $F^{-1}(z)$ . Sin embargo, más adelante

(subsección 3.5.1 y apéndice A), elegiremos otra orientación más adecuada para los ciclos que formarán una base de la 1-homología de  $F^{-1}(z)$ .

La fibración de Milnor facilitará el estudio del comportamiento de las órbitas periódicas,  $\delta_j(z)$ , al variar los valores  $z$  de  $F$  dentro de un conjunto conexo de  $\mathbb{C}$ . Esto es lo que se conoce en la teoría bajo el concepto de monodromía. A su vez, nos permitirá hablar de la continuación analítica de las integrales abelianas  $\int_{\delta_j(z)} \eta$  como funciones de  $z$ , lo que nos dará la relación que hay entre las integrales abelianas definidas en distintas clases de homología de la superficie de nivel  $F^{-1}(z) \subset \mathbb{C}^2$ .

Empezaremos por exponer la versión local de la fibración de Milnor, la cual nos sirve para conocer la topología local de la superficie de nivel  $F^{-1}(z)$  contenida en  $\mathbb{C}^2$ , en vecindades de puntos críticos. Luego pasaremos a la versión global, que une la información de la topología en vecindades de puntos críticos en  $\mathbb{C}^2$ , y la información topológica que puedan añadir los puntos críticos que se encuentren en el infinito.

### 3.2.1. Fibración de Milnor local

Consideremos un polinomio con coeficientes reales  $F$ ,  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ , y su complejificación  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . Ahora las curvas de nivel  $F^{-1}(z)$  son superficies de Riemann contenidas en  $\mathbb{C}^2$ , con  $z \in \mathbb{C}$ . Los siguientes resultados describen la topología local de las superficies  $F^{-1}(z)$ , cerca de puntos críticos.

**Lema 3.2.1.** (Milnor [30]) *Sea  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  una función polinomial. Supongamos que  $p$  es un punto crítico de  $F$  aislado, con  $b = F(p)$ . Entonces, existen  $\varepsilon > 0$  y  $r > 0$ , que dependen de  $p$ , tales que  $p$  es el único punto crítico de  $F$  en la bola cerrada  $\overline{B}_\varepsilon(p) \subset \mathbb{C}^2$ , con centro en  $p$  y radio  $\varepsilon$ , y  $F^{-1}(z)$  interseca transversalmente a la 3-esfera dada por  $\partial\overline{B}_\varepsilon(p)$ , para todo  $z$  en el disco cerrado  $D_r(b) \subset \mathbb{C}$  con centro en  $b$  y radio  $r$ .*

**Teorema 3.2.1.** (Milnor [30]) *Bajo las hipótesis del lema anterior, tenemos que*

$$F : \overline{B}_\varepsilon(p) \cap F^{-1}(D_r(b) \setminus \{b\}) \rightarrow D_r(b) \setminus \{b\} \quad (3.10)$$

*es una fibración localmente trivial. Y*

$$F : \partial\overline{B}_\varepsilon(p) \cap F^{-1}(D_r(b)) \rightarrow D_r(b)$$

*es una fibración trivial.*

Llamaremos fibra regular local respecto al punto crítico  $p$ , a la intersección de  $F^{-1}(z)$  con la bola  $\overline{B}_\varepsilon(p)$ , donde  $z \in D_r(F(p)) \setminus \{F(p)\}$ , y  $\varepsilon$  y  $r$  satisfacen el lema 3.2.1.

El teorema 3.2.1 nos dice que, en la vecindad de un punto crítico, todas las fibras regulares locales son difeomorfas (en el sentido real) entre sí. En este sentido, bajo las hipótesis del teorema 3.2.1, para cualquier  $z$  en  $D_r(F(p)) \setminus \{F(p)\}$ ,

nos referiremos a  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$  como la fibra regular local de  $F$  respecto al punto crítico  $p$ .

Vía los difeomorfismos locales dados por la fibrición del teorema 3.2.1, podemos transportar una fibra regular local  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$  en cualquier otra fibra regular local  $F^{-1}(z') \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$  definida en cualquier otro valor  $z' \in D_r(F(p)) \setminus \{F(p)\}$ . En particular, podemos hacer el transporte de una fibra regular local  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$  en sí misma, llevando la fibra a lo largo de una curva que rodee al valor crítico  $F(p)$ . Evidentemente este transporte no produce ningún cambio en la topología de la fibra regular local, pero a nivel de los elementos del primer grupo de homología de la fibra local pueden ocurrir cambios no triviales. A este fenómeno se le conoce como *monodromía*. En las siguientes líneas lo describiremos con más precisión:

Tomemos dos valores  $z$  y  $z'$  en  $D_r(F(p)) - \{F(p)\}$ . Sea  $l_{zz'}$  un lazo que une a  $z$  con  $z'$ , contenido en  $D_r(F(p)) - \{F(p)\}$ . Denotemos por  $\Gamma_{l_{zz'}}$  al difeomorfismo dado por las trivializaciones locales de la fibrición de Milnor local entre las fibras regulares locales  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$  y  $F^{-1}(z') \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$ ;

$$\Gamma_{l_{zz'}} : F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p) \rightarrow F^{-1}(z') \cap \overline{B}_\varepsilon(p).$$

Remarcamos dos aspectos importantes de las transformaciones  $\Gamma_{l_{zz'}}$ ; uno es que sólo dependen de la clase de homotopía con extremos fijos del lazo  $l_{zz'}$ , debido a la trivialidad local de la fibrición, y el otro es que dejan fija la frontera de las fibras regulares  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$ , pues la fibrición de Milnor local es trivial en la frontera (segunda parte del teorema 3.2.1).

En particular, tomemos un elemento no trivial  $l \in \pi_1(D_r(F(p)) - \{F(p)\}, z)$ , en el primer grupo de homotopía de  $D_r(F(p)) - \{F(p)\}$  basado en  $z$ . Por medio de los difeomorfismos  $\Gamma_{l_{zz'}}$ , moviendo  $z'$  a lo largo de la curva  $l$  hasta llegar al valor  $z$ , se define un difeomorfismo  $\Gamma_l$  entre la fibra regular local  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$  consigo misma;

$$\Gamma_l : F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p) \rightarrow F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p). \quad (3.11)$$

**Definición 3.2.1.** Dada  $l \in \pi_1(D_r(F(p)) - \{F(p)\}, z)$ , llamaremos al difeomorfismo  $\Gamma_l$  la transformación de monodromía a lo largo de la curva  $l$ , y lo denotaremos como  $Mon_l$ .

Por construcción cada  $\Gamma_{l_{zz'}}$ , y en particular  $Mon_l$ , sólo dependen de la clase de homotopía de la curva en la que se define, y son la identidad sobre la frontera de la fibra regular local,  $F^{-1}(z) \cap \partial\overline{B}_\varepsilon(p)$ .

Por otro lado, si por cada fibra en la fibrición de Milnor se toma su primer grupo de homología relativa respecto a la frontera, esto es

$$H_1(F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p), F^{-1}(z) \cap \partial\overline{B}_\varepsilon(p)),$$

se obtiene un haz vectorial localmente trivial, cuyas funciones de transición están dadas por las derivadas de las funciones de transición entre las fibras de

la fibración (3.10).

De igual modo como se definieron las funciones  $\Gamma_{l_{zz'}}$  en la fibración topológica (3.10), se pueden definir transformaciones  $\Gamma_{l_{zz'}}^*$ , de  $H_1(F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p), F^{-1}(z) \cap \partial \overline{B}_\varepsilon(p))$  en  $H_1(F^{-1}(z') \cap \overline{B}_\varepsilon(p), F^{-1}(z') \cap \partial \overline{B}_\varepsilon(p))$ , vía el haz vectorial de la homología de las fibras ([2], p.10). Estas transformaciones son equivalentes a las que resultan de aplicar el funtor de la homología relativa a las transformaciones  $\Gamma_{l_{zz'}}$ .

De esta manera, podemos en particular obtener en homología relativa la transformación definida por la monodromía, que denotaremos como  $Mon_l^*$ , de  $H_1(F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p), F^{-1}(z) \cap \partial \overline{B}_\varepsilon(p))$  en sí mismo.

Más aún, debido a que las transformaciones  $\Gamma_{l_{zz'}}^*$ , y en particular  $Mon_l^*$ , son la identidad sobre la frontera de las fibras regulares locales,  $F^{-1}(z) \cap \partial \overline{B}_\varepsilon(p)$ , se tiene que la diferencia entre un ciclo relativo  $\gamma \in H_1(F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p), F^{-1}(z) \cap \partial \overline{B}_\varepsilon(p))$ , y su imagen bajo la transformación  $Mon_l^*$  es un ciclo absoluto, i.e., un elemento de  $H_1(F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p))$ . De este modo se puede definir también la siguiente transformación;

$$Var_l: H_1(F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p), F^{-1}(z) \cap \partial \overline{B}_\varepsilon(p)) \rightarrow H_1(F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)),$$

dada por

$$Var_l(\gamma) = Mon_l^*(\gamma) - \gamma.$$

**Definición 3.2.2.** Sea  $l \in \pi_1(D_r(F(p)) - \{F(p)\}, z)$ . Llamaremos a la transformación  $Mon_l^*$  como transformación de monodromía local relativa a lo largo de la curva  $l$ . Y a la transformación  $Var_l$  la llamaremos transformación de variación local a lo largo de la curva  $l$ .

La intersección de un ciclo absoluto  $\delta_j(z) \in H_1(F^{-1}(z))$ , de la superficie de Riemann  $F^{-1}(z)$ , con una vecindad suficientemente pequeña,  $\overline{B}_\varepsilon(p)$ , de un punto crítico  $p$  de  $F$ , define un ciclo relativo a la frontera  $\partial \overline{B}_\varepsilon(p)$ , en la fibra regular local definida por  $F$  en esa vecindad;  $\delta_j(z) \cap (F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p))$ . Las transformaciones  $Mon_l^*$  y  $Var_l$ , miden el cambio que sufre la parte de los ciclos absolutos que está dentro de la vecindad de un punto crítico  $p$ , cuando los valores  $z$  varían alrededor del valor crítico  $F(p)$ .

### 3.2.2. Ciclos evanescentes

En esta subsección, precisaremos la definición de las transformaciones  $Mon_l^*$  y  $Var_l$  en términos de una base del primer grupo de homología de la fibra regular local  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$ , en el caso en que el punto crítico  $p$  sea no degenerado.

Por lo que se vió en la subsección anterior, basta con dar una base de la homología para la fibra  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$  para un valor  $z$  en  $D_r(F(p)) - \{F(p)\}$ , ya que todas las fibras regulares locales tienen la misma topología.

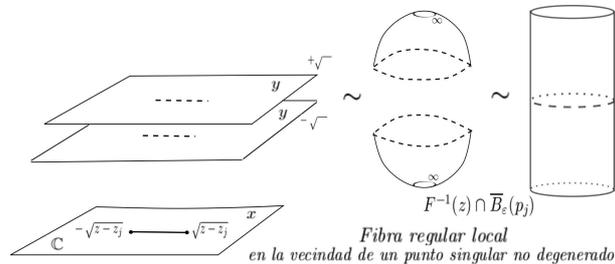
Por otro lado, en [30], Milnor también mostró que el tipo de homotopía de la fibra regular local es dado por una unión adjunta de  $\mu_p$  esferas de dimensión

real 1, i.e.,  $H_1(F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)) = \mathbb{Z}^{\mu_p}$ . Al número  $\mu_p$  se le conoce como *número de Milnor en  $p$* . Los  $\mu_p$  ciclos que generan al primer grupo de homología de la fibra regular local, tienen además una cualidad especial respecto al punto y al valor crítico que los representa, y es que cuando la fibra regular local  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p)$  se acerca al valor crítico, esto es, cuando  $z$  tiende a  $F(p)$ , estos ciclos se colapsan en el punto crítico  $p$ . Por ello a estos ciclos se les conoce como *ciclos evanescentes*.

En el caso más simple, que es cuando el punto crítico  $p$  es no degenerado (también llamado *punto crítico de Morse*), estos ciclos se pueden describir de la siguiente manera:

Supongamos que  $p_j$  es un punto crítico de  $F$  no degenerado. Denotemos  $F(p_j) = z_j$ , al valor crítico de  $p_j$ , y tomemos la bola cerrada  $\overline{B}_\varepsilon(p_j)$ , con centro en  $p_j$  y radio  $\varepsilon$ , y el disco  $D_r(z_j)$ , con centro en  $z_j$  y radio  $r$ , tal que satisfacen las condiciones del teorema 3.2.1 para  $p = p_j$  y  $b = z_j$ . Usaremos el *lema de Morse* [29], el cual da un sistema de coordenadas locales para dar una expresión sencilla para polinomios en vecindades de puntos críticos no degenerados. Considerando el sistema de coordenadas  $(x, y)$ , dado por el *lema de Morse* en  $\overline{B}_\varepsilon(p_j)$ , con  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, tenemos que  $F(x, y) = x^2 + y^2 + z_j$ , para  $(x, y) \in \overline{B}_\varepsilon(p_j)$ . En estas coordenadas  $p_j$  corresponde al origen y su valor crítico es  $z_j$ ;  $F(0, 0) = z_j$ .

Dado  $z \in D_r(z_j) - \{z_j\}$ , bajo el sistema de coordenadas del *lema de Morse*, la superficie de Riemann  $F^{-1}(z)$ , en una vecindad de  $p_j$ , está definida por  $x^2 + y^2 = z - z_j$ . Expresemos a  $y$  como función de  $x$ , esto es  $y(x) = \pm\sqrt{z - z_j - x^2}$ . Por lo que  $y(x)$  es una función multivaluada con dos ramas y con puntos de ramificación en  $x = \pm\sqrt{z - z_j}$ . El cambio del argumento de los valores de la función  $y(x)$  alrededor de puntos de los puntos de ramificación nos dice cómo se identifican las dos ramas de  $y(x)$ . Esto es dado por la integral de  $\frac{1}{2\pi i} \frac{y'(x)dx}{y(x)}$  a lo largo de lazos que rodeen a los puntos  $x = \pm\sqrt{z - z_j}$ . En este caso, esto es igual a  $\frac{1}{2}$ . La identificación de las ramas, dada por este cambio de argumento, nos dice que la superficie  $x^2 + y^2 = z - z_j$  es una esfera menos dos puntos (que corresponden al infinito de cada plano complejo que representa a cada rama), que a su vez es homeomorfo a un cilindro:



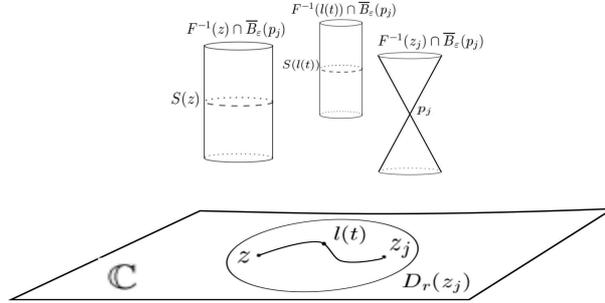
En particular, esto implica que el primer grupo de homología de la fibra regular local de  $F$  en  $p_j$ , para un valor  $z$ , i.e.,  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$ , tiene sólo un generador. Denotemos este generador por  $S(z)$ .

Ahora consideremos el lazo  $l: [0, 1] \rightarrow D_r(z_j)$  entre  $z$  y  $z_j$ , de manera que  $l(0) = z$  y  $l(1) = z_j$ , donde  $z \in D_r(z_j) - \{z_j\}$ .

En cada valor  $l(t)$ , con  $t \neq 1$ , de la curva  $l$ , consideramos a la fibra regular local correspondiente, i.e.,  $F^{-1}(l(t)) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$ , con su respectivo generador de la 1-homología  $S(l(t))$ . Más precisamente, el ciclo  $S(l(t))$  está dado de la siguiente manera:

Definamos  $S(l(t)) = \rho(t)S^1$ , donde  $\rho(t) = \sqrt{\|l(t) - z_j\|}$  y  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 + y^2 = 1, \text{Im}(x) = \text{Im}(y) = 0\}$ , i.e.,  $S(l(t))$  es homeomorfo a una esfera real de dimensión 1 y radio  $\rho(t)$ . Como  $F^{-1}(l(t)) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$  está definido (en coordenadas locales) por  $x^2 + y^2 = l(t) - z_j$ , y  $(\rho(t)x)^2 + (\rho(t)y)^2 = \rho(t)^2(x^2 + y^2) = \rho(t)^2 = \|l(t) - z_j\|$ , tenemos que  $\rho(t)(x, y) \in F^{-1}(l(t)) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$  para todo  $\rho(t)(x, y) \in S(l(t))$ . Por lo que  $S(l(t)) \subset F^{-1}(l(t)) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$ .

Con esto observemos que, cuando el parámetro  $t$  tiende al valor 1, esto es que  $z$  tienda al valor  $z_j$ , se tiene que el radio  $\rho(t)$  tiende a cero. Por lo que, los ciclos  $S(l(t))$ , tienden a cero en las coordenadas locales  $(x, y)$  del *lema de Morse* cuando  $t$  tiende a 1. Notemos que de la descripción del polinomio  $F$  en estas coordenadas, el origen de estas coordenadas locales corresponde al punto crítico  $p_j$ . Esto quiere decir que cuando  $z$  tiende al valor crítico  $F(p_j) = z_j$ , el ciclo  $S(z)$ , generador de la 1-homología de  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$ , tiende al punto crítico  $p_j$ .



**Definición 3.2.3.** ([2], p.13) A la clase de homología del ciclo  $S(l(t))$  en  $F^{-1}(l(t)) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$  se le llama ciclo evanescente del valor crítico  $F(p_j)$ .

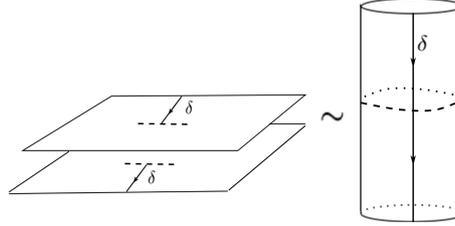
En estos términos, las transformaciones  $Mon_l^*$  y  $Var_l$  quedan descritas de la siguiente manera:

Dado un punto crítico  $p_j$  de  $F$ , con valor crítico  $z_j$ , consideremos  $z \in D_r(z_j) - \{z_j\}$ , y las coordenadas locales  $(x, y)$  (descritas arriba), de modo que  $F^{-1}(z)$  se escribe como  $x^2 + y^2 = z - z_j$ , en una vecindad  $B_\varepsilon(p_j)$  de  $p_j$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $z_j = 0$ . Ya vimos que esta superficie corresponde a un cilindro, que puede obtenerse como gráfica de la

función  $y(x) = \pm\sqrt{z-x^2}$ , con puntos de ramificación  $x = \pm\sqrt{z}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos también que  $z$  es real, lo cual se puede obtener mediante una rotación si es necesario.

Un ciclo relativo no trivial en esta superficie será una curva que atraviese al cilindro de una frontera del cilindro a la otra, donde estas fronteras se obtienen por la intersección de este cilindro con la frontera de la bola  $B_\varepsilon(p_j)$ . Consideraremos uno de estos ciclos relativos, y lo denotaremos como  $\delta$ .

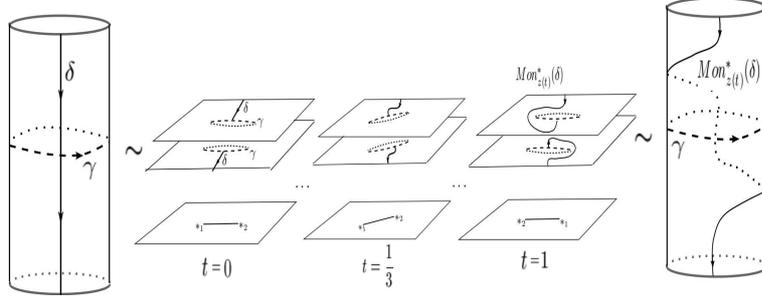
Por construcción del cilindro, el ciclo  $\delta$  corresponde en las ramas de  $y(x)$  a lo siguiente: en una de las ramas es un segmento contenido el semiplano superior del eje  $x$ , con uno de los extremos que en el intervalo  $[-\sqrt{z}, \sqrt{z}]$ ; mientras que en la otra rama, es un segmento contenido en el semiplano inferior del eje  $x$ , con uno de sus extremos en el intervalo  $[-\sqrt{z}, \sqrt{z}]$ .



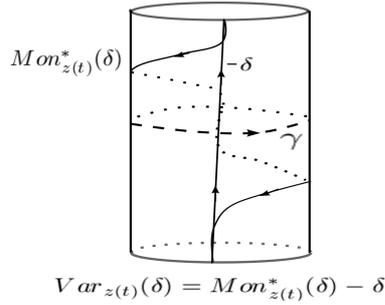
Consideremos la curva  $z(t) = ze^{2\pi it}$ , con  $t \in [0, 1]$ , que empieza y termina en el valor  $z$ , y rodea al valor crítico 0. Consideremos los difeomorfismos  $\Gamma_{z(t)}$ , definidos por la fibración de Milnor local, y los respectivos homomorfismo en la homología relativa  $\Gamma_{z(t)}^*$  (ver definiciones 3.2.1 y 3.2.2). La monodromía de  $\delta$  es la imagen de  $\delta$  bajo el homomorfismo  $\Gamma_{z(t)}^*$ . Veremos cómo se modifica la imagen de  $\delta$  bajo  $\Gamma_{z(t)}^*$ ,

$$\Gamma_{z(t)}^*(\delta) \in H_1(F^{-1}(z(t)) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j), F^{-1}(z(t)) \cap \partial\overline{B}_\varepsilon(p_j)),$$

conforme  $t$  se mueve de 0 a 1. Recordemos que los difeomorfismos  $\Gamma_{z(t)}$  dejan fija a la frontera. Así, la manera en que  $\delta$  cambia sobre cada fibra regular local  $F^{-1}(z(t)) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$ , puede verse en el cambio de los puntos de ramificación  $\pm\sqrt{z(t)}$  de la función  $y(x) = \pm\sqrt{z(t)-x^2}$  al variar el parámetro  $t$ ; i.e., conforme los valores de las fibras regulares locales recorren la curva  $z(t)$ . Para cada valor de  $t$  se tiene que los puntos de ramificación cambian por una rotación de ángulo  $\pi t$ , pues  $\sqrt{z(t)} = \sqrt{e^{2\pi it}z} = e^{\pi it}\sqrt{z}$ . De este modo, al rodear completamente a la curva  $z(t)$  se obtiene un cambio de ángulo  $\pi$  en el argumento, de modo que, en la fibra local correspondiente a  $z(1)$ , los puntos de ramificación  $\pm\sqrt{z(t)}$  se intercambian entre sí. Este movimiento de los puntos de ramificación, y la evolución del ciclo  $\delta$ , se puede ver en la siguiente imagen:



Ahora, notemos que la diferencia de  $Mon_{z(t)}^*(\delta)$  con  $\delta$ , define (salvo signo) al ciclo evanescente que genera al primer grupo de homología de la fibra regular local  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$ . En el dibujo hemos denotado a este ciclo evanescente como  $\gamma$ .



Considerando la orientación natural de la superficie  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$  como subvariedad de  $\mathbb{C}^2$ , elegimos una orientación para los ciclos evanescentes  $\gamma$ . Mediante la diferencia  $Mon_{z(t)}^*(\delta) - \delta$ , se obtiene el ciclo  $\gamma$  o bien  $-\gamma$  dependiendo de la orientación de  $\delta$ . Pero este signo puede determinarse mediante el índice de intersección de ambas curvas. Denotamos a este índice como  $(\delta, \gamma)$ .

Así, la variación  $Var_{z(t)}(\delta) = Mon_{z(t)}^*(\delta) - \delta$  del ciclo relativo  $\delta$  está dada por:

$$Var_{z(t)}(\delta) = (\delta, \gamma)\gamma. \tag{3.12}$$

Por otro lado, retomando el estudio de la topología local, si  $p_j$  es un punto crítico degenerado de  $F$ , con valor crítico  $z_j$ , se puede dar una base la 1-homología de fibra regular local de  $F$  de la siguiente manera ([2], p. 30):

Sea  $\tilde{F} = F_\lambda$  una perturbación del polinomio  $F$ , definida en el disco  $D_r(z_j)$ , con centro  $z_j$  y radio  $r$  (por ejemplo, se puede tomar  $\tilde{F}$  como  $F_\lambda = F + \lambda g$ , donde  $g$  es una función lineal  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $\lambda \in (\mathbb{R}, 0)$ ). Para  $\lambda$  suficientemente pequeño  $\lambda$  ( $|\lambda| \leq \lambda_0$ ) las fibras regulares locales de  $\tilde{F}$  en

la vecindad de  $p_j$ , i.e.,  $\tilde{F}^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$  para  $z$  valor regular de  $\tilde{F}$  en  $D_r(z_j)$ , con  $r$  suficientemente pequeño,  $r \leq r_0$ , son transversales a la esfera  $\partial\overline{B}_\varepsilon(p_j)$ , y los valores críticos de  $\tilde{F}$  en el disco  $\overline{B}_\varepsilon(p_j)$  tienen módulo menor que  $r_0$ , i.e., los valores críticos de puntos críticos de  $\tilde{F}$  en  $\overline{B}_\varepsilon(p_j)$  están contenidos en el disco  $D_r(z_j)$ . Se puede verificar que la fibra regular local  $\tilde{F}^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$  es difeomorfa a la fibra regular local dada por  $F$ ,  $F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)$ , para  $z$  valor regular de  $F$  y  $\tilde{F}$  contenido en  $D_r(z_j)$ . Del *teorema de Sard* se sigue que, casi todas las perturbaciones  $\tilde{F}$  de  $F$  tienen en el disco  $D_r(z_j)$  únicamente puntos críticos no degenerados con valores críticos distintos (si  $F_\lambda = F + \lambda g$ , esto ocurre para casi toda función lineal  $g$  ([2], p.31)).

De este modo, podemos tomar  $\tilde{F}$  para formar una base de la 1-homología de la fibra regular local de  $F$  en una vecindad de  $p_j$ . Esto es, si  $\tilde{F}$  tiene  $\mu_{p_j}$  puntos críticos no degenerados, entonces  $H_1(F^{-1}(z) \cap \overline{B}_\varepsilon(p_j)) = \mathbb{Z}^{\mu_{p_j}}$ , y se tiene una base dada (salvo isomorfismo) por los ciclos evanescentes en los puntos críticos no degenerados de la perturbación  $\tilde{F}$  ([2] Teorema. 2.1).

En [30] y en ([3], p.220), también se define el número de Milnor  $\mu_{p_j}$ , de  $F$  en el punto  $p_j$ , como el grado topológico de la transformación:

$$\begin{aligned} \partial\overline{B}_\varepsilon(p) &\rightarrow S^1 \\ (x, y) &\mapsto \frac{\nabla(F)(y, x)}{\|\nabla(F)(x, y)\|}, \end{aligned}$$

donde  $\nabla(F) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ . De manera equivalente, el número de Milnor  $\mu(p_j)$  se puede definir como el índice de intersección de las curvas  $\frac{\partial F}{\partial x} = F_x = 0$  y  $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y = 0$  en el punto  $p_j$ ;

$$\mu_{p_j}(F) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{p_j}(x, y) / \langle F_x, F_y \rangle, \quad (3.13)$$

donde  $\mathcal{O}_{p_j}(x, y)$  es el anillo local de  $\mathbb{C}^2$  en  $p_j$  ([13], p.20 y p.27; [3], p.220); i.e., el anillo de funciones racionales en  $\mathbb{C}^2$  definidas en  $p_j$ ; ya que esto es local,  $\mathcal{O}_{p_j}(x, y)$  también coincide con el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en una vecindad de  $p_j$ , o bien, el anillo de series de potencias formales en una vecindad de  $p_j$ . Y  $\langle F_x, F_y \rangle$  es el ideal *Jacobiano* en  $\mathcal{O}_{p_j}(x, y)$ , generado por el gradiente de  $F$ .

Por propiedades del índice de intersección de curvas algebraicas (ver [13], p.37 propiedades (1) y (2)), se tiene que,  $\mu_{p_j}$  es un entero no negativo, y  $\mu_{p_j}(F) = 0$  si y sólo si  $p_j$  no está en la intersección de la curva  $F_x = 0$  con  $F_y = 0$ . Si  $p_j$  es un punto crítico de  $F$  no aislado se define su número de Milnor como  $\mu_{p_j}(F) = \infty$ . Además, también por propiedades del índice de intersección de curvas ([13], p. 37 propiedad (5), o bien, apéndice B de [30]), se tiene que  $\mu_{p_j}(F) = 1$  si y sólo si  $p_j$  es un punto crítico de  $F$  no degenerado.

También se define el *número de Milnor total de  $F$*  como:

$$\mu(F) = \sum_{p \in \mathbb{C}^2} \mu_p(F),$$

que por propiedades de los anillos locales  $\mathcal{O}_{p_j}(x, y)$  ([13], p.27), se tiene que

$$\sum_{p \in \mathbb{C}^2} \mu_p(F) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y] / \langle F_x, F_y \rangle .$$

En particular, todos los puntos críticos de  $F$  son aislados si y sólo si  $\mu(F) < \infty$ .

### 3.2.3. Fibración de Milnor global

Por lo anterior tenemos que, dado un ciclo absoluto  $\delta_j \in H_1(F^{-1}(z))$ , se puede conocer explícitamente la *monodromía* del ciclo relativo definido por  $\delta_j$  en la vecindad de un punto crítico no degenerado al variar los valores de  $z$  dentro de una vecindad del valor crítico correspondiente a ese punto crítico. Ahora utilizaremos la *fibración de Milnor global* para unir la información de las deformaciones en las fibras locales (la monodromía de los ciclos relativos (3.11)), y así obtener la deformación de los ciclos absolutos en la *fibra global*  $F^{-1}(z)$ . Que sea suficiente unir la información local en puntos críticos de  $F$  en  $\mathbb{C}^2$ , para obtener la *monodromía global*, depende de la topología de la fibra genérica de  $F$ . En [4] [3], Broughton hace una construcción de la topología de  $F^{-1}(z)$  a partir de la topología local en vecindades de los puntos críticos de  $F$  en  $\mathbb{C}^2$  y de la topología en el complemento de estas vecindades en un *tubo de Milnor*<sup>2</sup>. Además exhibe a la 1-homología de  $F^{-1}(z)$  como una suma de  $\mu$  copias de  $\mathbb{Z}$ , donde  $\mu$  es la suma de todos los números de Milnor de  $F$  en todos los puntos críticos aislados de  $F$ , más un grupo abeliano  $A$ , que representa un aporte de ciclos evanescentes en el infinito; esto es  $H_1(F^{-1}(z)) = \mathbb{Z}^{\mu} \oplus A$ . En el caso en que el grupo  $A$  es trivial, se tiene una expresión de los operadores de *monodromía* y *variación* en la fibra global  $F^{-1}(z)$ , en términos de los operadores de *monodromía* y *variación locales* que vimos en subsección anterior (definiciones 3.2.1 y 3.2.2). A esa expresión se le conoce como *fórmula de Picard-Lefschetz* (ver (3.28)). Para llegar a esto, dentro de esta subsección estudiaremos la topología de la fibra regular global de  $F$  siguiendo los trabajos [4] y [3] de Broughton.

**Teorema 3.2.2.** [38][4] *Dada una función polinomial  $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ , existe un conjunto finito de puntos  $\Sigma \subset \mathbb{C}$  tales que, la restricción*

$$F : \mathbb{C}^{n+1} \setminus F^{-1}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Sigma \quad (3.14)$$

*es una fibración  $C^\infty$  localmente trivial. Ésta es llamada fibración global de Milnor de  $F$ .*

**Comentario 3.2.1.** *Aunque para los resultados de esta tesis sólo necesitamos el caso  $n + 1 = 2$ , en esta subsección expondremos los resultados de la topología de  $F^{-1}(z)$  en términos generales.*

Para polinomios  $F$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , se define el número de Milnor en puntos de  $\mathbb{C}^{n+1}$  de manera análoga al caso  $n + 1 = 2$ , que vimos en la subsección anterior ([3], p.220).

<sup>2</sup> $F^{-1}(D_i)$ , donde  $D_i$  es un disco, con centro en un valor crítico de  $F$ , suficientemente pequeño.

**Definición 3.2.4.** Sea  $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  una función polinomial y sea  $z \in \mathbb{C}$ . Supongamos que  $p_1, \dots, p_r$  son los puntos críticos de  $F$  aislados contenidos en  $F^{-1}(z)$ . Se define

$$\mu^z(F) = \sum_{i=1}^r \mu_{p_i}(F),$$

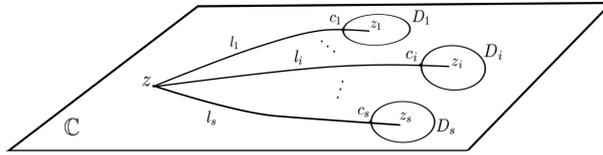
como el número de Milnor de la fibra de  $F$  en  $z$ . Y se define

$$\mu(F) = \sum_{z \in \mathbb{C}} \mu^z(F),$$

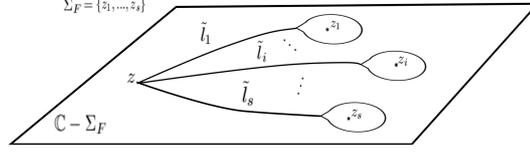
como el número de Milnor total de  $F$ .

El conjunto más pequeño  $\Sigma$ , tal que (3.14) es una fibración localmente trivial, es llamado el *conjunto de valores atípicos de  $F$* , y lo denotaremos como  $\Sigma_F$ . A las fibras  $F^{-1}(b)$ , en valores atípicos  $b \in B_F$ , las llamaremos *fibras atípicas*. A los valores en el complemento de  $\Sigma_F$ ,  $z \in \mathbb{C} - \Sigma_F$ , los llamaremos *valores regulares*, y a las fibras  $F^{-1}(z)$  sobre estos valores, las llamaremos *fibras regulares*.

Supongamos que  $\Sigma_F = \{z_1, z_2, \dots, z_s\}$ , y consideremos un valor regular  $z \in \mathbb{C} - \Sigma_F$ . Tomemos lazos  $l_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , que unen a  $z$  con  $z_i$ , denotaremos a la imagen de  $l_i$  también como  $l_i$ , y suponemos que dos lazos distintos  $l_i$  y  $l_j$ ,  $i \neq j$ , sólo se intersecan en el valor regular  $z$ . Sean  $D_i$ , discos centrados en los valores  $z_i$ , suficientemente pequeños, de modo que  $D_i$  interseca a  $l_i$  sólo en un punto  $c_i$ , y no interseca a  $l_j$  para toda  $j \neq i$ .



De manera análoga a como se hizo en la fibración local, pero ahora usando la fibración de Milnor global, se pueden definir las transformaciones de monodromía (3.11) en los discos  $D_i$ , como el transporte de la fibra regular  $F^{-1}(c_i)$ , a lo largo de una curva que rodea al valor atípico  $z_i$ . Por otro lado, usando las trivializaciones de la fibración de Milnor global de  $F$  a lo largo del segmento del lazo  $l_i$  entre  $c_i$  y  $z$ , obtenemos un difeomorfismo entre las fibras  $F^{-1}(z)$  y  $F^{-1}(c_i)$ . De modo que, el efecto de la monodromía local en la fibra  $F^{-1}(c_i)$ , alrededor de  $z_i$ , es también el efecto de la monodromía en la fibra regular  $F^{-1}(z)$ . Ya que el primer grupo de homotopía de  $\mathbb{C} - \Sigma_F$  basado en  $z$ ,  $\pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z)$ , es generado por los lazos, basados en  $z$ , que rodean a los valores  $z_i \in \Sigma_F$ , se tiene que la unión de las monodromías locales al rededor de los valores  $z_i$ , definen el operador de monodromía en la fibración de Milnor global de  $F$ . Esto es, denotemos por  $\tilde{l}_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \Sigma_F$  a los lazos basados en  $z$ , tal que  $\tilde{l}_i$  rodea al valor crítico  $z_i$ ,



En cada lazo  $\tilde{l}_i$  se define la monodromía en  $F^{-1}(z)$  como se describió arriba. Luego, ya que el primer grupo de homotopía de  $\mathbb{C} - \Sigma_F$  basado en  $z$ ,  $\pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z)$ , está generado por los lazos  $\tilde{l}_i$ , tenemos que cada  $l \in \pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z)$  es composición de los lazos  $\tilde{l}_i$ , por lo que la monodromía a lo largo de  $l$  es la composición de la monodromía en los lazos  $\tilde{l}_i$  que componen a  $l$ . Esto define el siguiente homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z) &\rightarrow \text{Aut}(H_1(F^{-1}(z))) \\ l &\mapsto \text{Mon}_{l*}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $\text{Mon}_{l*}$  es la acción de la monodromía, a lo largo del lazo  $l$ , en la 1-homología de  $F^{-1}(z)$ .

**Definición 3.2.5.** ([2], p.10) ([40], p. 21) El automorfismo  $\text{Mon}_{l*}$  es llamado el operador de monodromía en el lazo  $l$ . A la imagen de  $\pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z)$  bajo el homomorfismo (3.15) se le llama el grupo de monodromía de  $F$ .

Y a la diferencia definida como:

$$\text{Var}_l(\delta) = \text{Mon}_{l*}(\delta) - \delta,$$

para  $l \in \pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z)$  y  $\delta \in H_1(F^{-1}(z))$ , se le llama el operador de variación a lo largo del lazo  $l$ .

Ahora daremos la construcción de la topología de la fibra regular  $F^{-1}(z)$  que hace Broughton en [4]. Consideraremos para ello al polinomio  $F$  definido en  $\mathbb{C}^{n+1}$ ,  $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ , si bien en los resultados de esta tesis sólo necesitamos el caso  $n+1=2$ .

Considerando los lazos  $l_i$  y los discos  $D_i$  que definimos arriba, con  $1 \leq i \leq s$ , denotaremos  $F_i = F^{-1}(l_i \cup D_i)$  y  $F_z = F^{-1}(z)$ ; la inclusión de  $F_z$  en  $F_i$  la denotaremos

$$e : F_z \rightarrow F_i. \quad (3.16)$$

Usando la notación de Broughton en [4], definamos los siguientes espacios,

$$V_q^i = \ker(e_*), \quad CV_q^i = \text{coker}(e_*), \quad K_q^i = H_q(F_i, F_z), \quad (3.17)$$

donde  $e_*$  denota el morfismo inducido en homología, por la inclusión  $e$ ,  $e_* : H_q(F_z) \rightarrow H_q(F_i)$ , y  $\text{coker}(e_*) = H_q(F_i)/\text{Im}(e_*)$ . Los espacios  $V_q^i$ ,  $CV_q^i$  y  $K_q^i$ , son llamados *homología evanescente*, *homología contra-evanescente* y *homología crítica*, respectivamente.

Denotaremos como  $\tilde{H}_q$  a la  $q$ -homología reducida.

**Proposición 3.2.1.** [4] Sea  $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  una función polinomial, con  $\Sigma_F = \{z_1, \dots, z_s\}$  su conjunto de valores atípicos. Entonces,

$$CV_q^i = 0 \text{ y } V_q^i \cong K_{q+1}^i, \text{ con } q \geq 0 \text{ y } 1 \leq i \leq s,$$

y

$$\tilde{H}_q(F^{-1}(z)) = \bigoplus_{i=1}^s K_{q+1}^i, \text{ para toda } q \geq 0,$$

donde  $z$  es un valor regular de  $F$ , i.e.,  $z \in \mathbb{C} - \Sigma_F$ .

*Demostración.* Denotemos  $Y = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_s$  y  $X = l_1 \cup l_2 \cup \dots \cup l_s \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_s$ , con  $F_i$ ,  $l_i$  y  $D_i$  como arriba, por lo que  $Y = F^{-1}(X)$ . Como  $Y$  es un cubriente de  $X$ , y  $X$  es un retracto por deformación de  $\mathbb{C}$ , entonces, por el lema de homotopía de espacios cubrientes ([35], p. 279)  $Y$  es un retracto por deformación de  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Consideremos la sucesión exacta larga de la pareja  $(Y, F_z)$ ; esto es

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(F_z) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_{q+1}(Y) \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(Y, F_z) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_q(F_z) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_q(Y) \rightarrow \dots,$$

donde  $\iota_*$  denota el morfismo en homología inducido por la inclusión de  $F_z$  en  $Y$ ;  $j_*$  es el morfismo que proyecta clases de  $\tilde{H}_{q+1}(Y)$  en clases de  $H_{q+1}(Y, F_z)$ ; y  $\partial_*$  es inducido por el operador frontera  $\partial$ ; i.e., dado  $\gamma \in H_{q+1}(Y, F_z)$ , se define  $\partial_*(\gamma)$  como la clase en  $H_q(F_z)$  de la  $q$ -cadena singular  $\partial(\gamma)$ . Nótese que por definición de los elementos en  $H_{q+1}(Y, F_z)$ , se tiene que  $\partial(\gamma)$  es una  $q$ -cadena singular en  $F_z$  ([35], p.99).

Ya que  $Y$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $\mathbb{C}^{n+1}$ , tenemos que la homología reducida de  $Y$  es cero,  $\tilde{H}_{q+1}(Y) = \tilde{H}_q(Y) = 0$ , por lo que  $\partial_*$  es un isomorfismo,

$$H_{q+1}(Y, F_z) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_q(F_z). \quad (3.18)$$

Por otro lado, ya que  $Y = \bigcup_{i=1}^s F_i$ , por la propiedad aditiva de la homología ([35], p. 101), existe un isomorfismo  $\psi$  entre  $H_{q+1}(Y, F_z)$  y  $\sum_{i=1}^s H_{q+1}(F_i, F_i \cap F_z)$ ;

$$H_{q+1}(Y, F_z) \xrightarrow{\Psi} \sum_{i=1}^s H_{q+1}(F_i, F_i \cap F_z).$$

Nótese que  $F_i \cap F_z = F_z$ , para toda  $i$ . Nótese también que cada par  $F_i$  y  $F_j$ , con  $i \neq j$ , se tiene que  $F_i \cap F_j = F_z$ . De este modo, ya que los simplejos en  $F_z$  representan a la clase del cero, entonces la suma anterior es de hecho una suma directa,

$$H_{q+1}(Y, F_z) \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_{i=1}^s H_{q+1}(F_i, F_z) \quad (3.19)$$

En la notación (3.17), con la composición de los isomorfismos  $\partial_*$  y  $\Psi$ , se tiene que

$$\tilde{H}_q(F_z) \cong \bigoplus_{i=1}^s K_{q+1}^i, \text{ para todo } q \geq 0.$$

Consideremos ahora la sucesión exacta larga de la pareja  $(F_i, F_z)$ , para cada  $i$ ,

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(F_z) \xrightarrow{e_*} \tilde{H}_{q+1}(F_i) \xrightarrow{k_*} H_{q+1}(F_i, F_z) \xrightarrow{\partial_{i*}} \tilde{H}_q(F_z) \xrightarrow{e_*} \tilde{H}_q(F_i) \rightarrow \cdots, \quad (3.20)$$

donde el morfismo  $e_*$  es inducido por la inclusión (3.16),  $k_*$  es la proyección de  $\tilde{H}_{q+1}(F_i)$  en  $H_{q+1}(F_i, F_z)$ , y  $\partial_{i*}$  es el morfismo inducido por el operador frontera.

Esta sucesión exacta larga induce la siguiente sucesión exacta corta,

$$0 \xrightarrow{\bar{0}} \tilde{H}_{q+1}(F_i)/\text{Im}(e_*) \xrightarrow{\bar{k}_*} H_{q+1}(F_i, F_z) \xrightarrow{\partial_{i*}} \ker(e_*) \xrightarrow{e_*} 0, \quad (3.21)$$

donde  $\bar{k}_*$  es el morfismo inducido por  $k_*$  en el cociente  $\tilde{H}_{q+1}(F_i)/\text{Im}(e_*)$ . Nótese también que por la sucesión exacta larga (3.20), se tiene que  $\text{Im}(\partial_{i*}) = \ker(e_*)$ .

No es difícil verificar que el morfismo  $\partial_{i*}$  se puede expresar por la siguiente composición

$$H_{q+1}(F_i, F_z) \xrightarrow{i_*} \bigoplus_{i=1}^s H_{q+1}(F_i, F_z) \xrightarrow{\Psi} H_{q+1}(Y, F_z) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_q(F_z),$$

donde  $i_*$  es el morfismo inducido por la inclusión de un sumando en la suma directa;  $\psi$  es el isomorfismo (3.19), entre la homología de  $Y$  y la homología de sus componentes  $F_i$ , inducido por la inclusión de cada componente  $F_i$  en  $Y$ ; y  $\partial_*$  es el isomorfismo (3.18), inducido por el operador frontera de elementos de  $H_{q+1}(Y, F_z)$  en elementos de  $H_q(F_z)$ . Como cada uno de estos morfismos es inyectivo, entonces la composición también es inyectiva, por lo que  $\partial_{i*}$  es inyectiva. Por la exactitud de (3.21), esto implica que  $\text{Im}(\bar{k}_*) = 0$ . Por lo que  $H_{q+1}(F_i)/\text{Im}(e_*) = 0$ ; esto pues  $\bar{k}_* = 0$  significa que  $\bar{k}_*$  envía a los elementos de  $H_{q+1}(F_i)/\text{Im}(e_*)$  en la clase del cero en  $H_{q+1}(F_i, F_z)$ , i.e., en  $(q+1)$ -cadenas singulares de  $F_z$ . Por otro lado, por definición de  $e_*$ , la imagen de  $e_*$  consiste en la contención de las  $(q+1)$ -cadenas singulares de  $F_z$  en  $F_i$ . De este modo, como  $\bar{k}_*$  es la proyección de clases de  $H_{q+1}(F_i)/\text{Im}(e_*)$  en clases de  $H_{q+1}(F_i, F_z)$ ,  $\bar{k}_* = 0$  significa que toda  $(q+1)$ -cadena singular en  $F_i$  es una  $(q+1)$ -cadena singular en  $F_z$ , por lo que  $\text{Im}(e_*) = H_{q+1}(F_i)$ .

Ya que  $H_{q+1}(F_i)/\text{Im}(e_*) = 0$  es igual a  $\text{coker}(e_*)$ , usando la notación (3.17), esto significa que  $CV_{q+1}^i = 0$ .

Por otro lado, por la exactitud de (3.21) (o de (3.20)) también se tiene que  $\text{Im}(\partial_{i*}) = \ker(e_*)$ , por lo que  $\partial_{i*}$  (de la sucesión (3.21)) es suprayectiva. De este modo  $\partial_{i*}$  es un isomorfismo entre  $H_{q+1}(F_i, F_z)$  y  $\ker(e_*)$ . En la notación (3.17), esto significa que

$$K_{q+1}^i \cong V_q^i.$$

□

**Teorema 3.2.3.** [3] Sea  $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  una función polinomial, y  $\Sigma_F = \{z_1, \dots, z_s\}$  su conjunto de valores atípicos. Entonces, para cualquier valor regular  $z \in \mathbb{C} - \Sigma_F$ ,

$$\tilde{H}_n(F^{-1}(z)) \cong \mathbb{Z}^\mu \oplus A,$$

donde  $\mu$  es el número de Milnor total de  $F$ , y  $A$  es un grupo Abeliano.

*Demostración.* Por la proposición anterior sabemos que

$$H_q(F^{-1}(z)) = \bigoplus_{i=1}^s H_{q+1}(F_i, F_z).$$

Basta probar que  $H_{q+1}(F_i, F_z) = \mathbb{Z}^{\mu_i} \oplus A_i$ , donde  $A_i$  es un grupo abeliano, y donde  $\mu_i$  denota al número de Milnor de la fibra atípica  $F^{-1}(z_i)$ , i.e., la suma de todos los números de Milnor de  $F$  en los puntos críticos aislados contenidos en la fibra  $F^{-1}(z_i)$ .

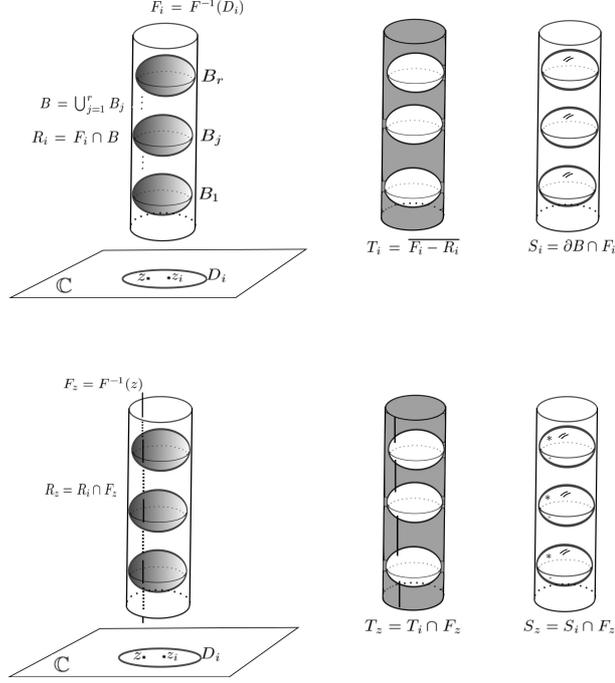
Denotaremos a los puntos críticos aislados contenidos en  $F^{-1}(z_i)$  como  $p_1, \dots, p_r$ , y denotaremos como  $\mu_{p_j}$  al número de Milnor de  $F$  en el punto crítico  $p_j$ , de modo que  $\mu_i = \sum_{j=1}^r \mu_{p_j}$ . A su vez, denotando como  $\mu$  al número de Milnor total de  $F$ , se tiene que  $\mu = \sum_{i=1}^s \mu_i$ .

Para cada punto crítico  $p_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , consideremos una bola  $B_j$  centrada en  $p_j$ , suficientemente pequeña, de modo que para un disco  $D_i$  centrado en el valor atípico  $z_i$ , también suficientemente pequeño, se satisfagan las condiciones del teorema de la fibrición de Milnor local (en dimensión  $n+1$  [30]), i.e., que  $F : B_j \cap F^{-1}(D_i - \{z_i\}) \rightarrow D_i - \{z_i\}$  sea una fibrición localmente trivial, y  $F : \partial B_j \cap F^{-1}(D_i) \rightarrow D_i$  sea una fibrición trivial (teorema 3.2.1 en dimensión  $n+1$ ), para toda  $j = 1, \dots, r$ .

Como todas las fibras regulares son homeomorfas, vía las trivializaciones de la fibrición de Milnor global (3.14), supondremos, sin pérdida de generalidad, que  $z$  está contenido en  $D_i - \{z_i\}$ .

Ahora definiremos los siguientes espacios, que servirán para formar después una sucesión de Mayer-Vietoris:

Denotaremos  $F_i := F^{-1}(D_i)$ . Sean  $B := \bigcup_{j=1}^r B_j$ , la unión de las bolas  $B_j$  en todos los puntos críticos aislados contenidos en la fibra  $F^{-1}(z_i)$ . Denotamos  $R_i := F_i \cap B$ , la intersección de  $F^{-1}(D_i) = F_i$  con la unión de las bolas  $B_j$ ;  $T_i := \overline{F_i - R_i}$ , la cerradura del complemento de  $R_i$  en  $F_i$ ; y  $S_i := \partial B \cap F_i = R_i \cap T_i$ , la frontera de  $T_i$ . Consideremos también los espacios que resultan de intersectar los espacios anteriores con la fibra regular  $F_z = F^{-1}(z)$ . Esto es,  $R_z := R_i \cap F_z$ ,  $T_z := T_i \cap F_z$  y  $S_z := S_i \cap F_z$ .



Como  $F : \partial B_j \cap F_i \rightarrow D_i$  es una fibración trivial para cada  $B_j$  (parte 2 del teorema 3.2.1), cada fibra local  $F_z \cap (\partial B_j \cap F_i)$  es un retracto por deformación de  $\partial B_j \cap F_i$ . Ahora observemos que  $F_z \cap (\partial B_j \cap F_i) = F_z \cap (S_i \cap B_j) = S_z \cap B_j$ , y  $\partial B_j \cap F_i = S_i \cap B_j$ . Entonces, lo anterior equivale a decir que  $S_z \cap B_j$  es un retracto por deformación de  $S_i \cap B_j$ . De este modo, se tiene que la unión de estas fibras locales,  $\bigcup_j S_z \cap B_j$  (que es igual a  $S_z$ ), es un retracto por deformación de  $\bigcup_j F_i \cap \partial B_j$  (que es igual a  $S_i$ ). Es decir,  $S_z$  es un retracto por deformación de  $S_i$ .

Consideremos las parejas de espacios  $(R_i, R_z)$ ,  $(S_i, S_z)$  y  $(T_i, T_z)$ . Notemos que  $(R_i, R_z) \cup (T_i, T_z) = (F_i, F_z)$  y  $(R_i, R_z) \cap (T_i, T_z) = (S_i, S_z)$ . De este modo se obtiene la siguiente sucesión de Mayer-Vietoris, con las parejas  $(R_i, R_z)$  y  $(T_i, T_z)$ :

$$\cdots \rightarrow H_q(S_i, S_z) \rightarrow H_q(R_i, R_z) \oplus H_q(T_i, T_z) \rightarrow H_q(F_i, F_z) \rightarrow H_{q-1}(S_i, S_z) \rightarrow \cdots$$

Como  $S_z$  es un retracto por deformación de  $S_i$ , las homología de la pareja  $(S_i, S_z)$  son triviales; en particular  $H_q(S_i, S_z) = H_{q-1}(S_i, S_z) = 0$ . Por lo que, de la sucesión obtenemos el siguiente isomorfismo

$$H_q(R_i, R_z) \oplus H_q(T_i, T_z) \xrightarrow{\cong} H_q(F_i, F_z) \quad (3.22)$$

Por otro lado, como  $R_i$  es la unión disjunta de  $F_i \cap B_j$ , con  $1 \leq j \leq r$ , entonces

$$H_q(R_i, R_z) = \bigoplus_{j=1}^r H_q(F_i \cap B_j, R_z \cap (F_i \cap B_j)). \quad (3.23)$$

Claramente  $R_z \cap (F_i \cap B_j) = F_z \cap B_j$ . De este modo la expresión anterior es igual a

$$H_q(R_i, R_z) = \bigoplus_{j=1}^r H_q(F_i \cap B_j, F_z \cap B_j). \quad (3.24)$$

Por la fibración de Milnor local (teorema 3.2.1 parte 1), cada  $F_i \cap B_j$  se contrae en la fibra atípica local  $F^{-1}(z_i) \cap B_j$ . Por otro lado, por el *lema de estructura cónica* [30], la fibra atípica local  $F^{-1}(z_i) \cap B_j$  es homeomorfa al cono sobre la intersección de la fibra  $F^{-1}(z_i) \cap B_j$  con la frontera de la bola  $B_j$ . Y ya que los conos son contraíbles, se tiene que  $F^{-1}(z_i) \cap B_j$  es contraíble. De este modo tenemos que  $F_i \cap B_j$  se contrae en un punto.

Consideremos ahora la sucesión exacta larga, en homología reducida, de la pareja  $(F_i \cap B_j, F_z \cap B_j)$ :

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(F_i \cap B_j) \rightarrow H_q(F_i \cap B_j, F_z \cap B_j) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(F_z \cap B_j) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(F_i \cap B_j) \rightarrow \cdots.$$

Como  $F_i \cap B_j$  es contraíble se tiene que  $\tilde{H}_q(F_i \cap B_j)$  y  $\tilde{H}_{q-1}(F_i \cap B_j)$  son triviales. Por lo que, se tiene un isomorfismo entre  $H_q(F_i \cap B_j, F_z \cap B_j)$  y la  $(q-1)$ -homología reducida de  $F_z \cap B_j$ ,

$$H_q(F_i \cap B_j, F_z \cap B_j) \cong \tilde{H}_{q-1}(F_z \cap B_j). \quad (3.25)$$

Por otro lado, [30] [2] se sabe que la fibra local de Milnor  $F_z \cap B_j$  tiene el mismo tipo de homotopía que un ramillete de  $\mu_{p_j}$  esferas de dimensión real  $n$ , donde  $\mu_{p_j}$  es el número de Milnor de  $F$  en el punto crítico  $p_j$ . Por lo que  $\tilde{H}_n(F_z \cap B_j) = \mathbb{Z}^{\mu_{p_j}}$ , mientras que  $\tilde{H}_{q-1}(F_z \cap B_j) = 0$  para  $q \neq n+1$ .

De este modo, sustituyendo (3.25) en la expresión (3.24), tenemos que

$$H_q(R_i, R_z) = \bigoplus_{j=1}^r \tilde{H}_{q-1}(F_z \cap B_j) = 0 \text{ para } q \neq n+1$$

y

$$H_{n+1}(R_i, R_z) = \bigoplus_{j=1}^r \tilde{H}_n(F_z \cap B_j) = \sum_{j=1}^r \mathbb{Z}^{\mu_{p_j}} = \mathbb{Z}^{\mu_i}. \quad (3.26)$$

Así, retomando el isomorfismo (3.22) para  $q = n+1$ , tenemos que

$$H_{n+1}(F_i, F_z) = H_{n+1}(R_i, R_z) \oplus H_{n+1}(T_i, T_z) = \mathbb{Z}^{\mu_i} \oplus H_{n+1}(T_i, T_z). \quad (3.27)$$

Denotamos  $A_i := H_{n+1}(T_i, T_z)$ .

Por otro lado, por la proposición 3.2.1, sabemos que

$$\tilde{H}_q(F^{-1}(z)) = \bigoplus_{i=1}^s H_{q+1}(F_i, F_z) \text{ para toda } q \geq 0.$$

En particular, para  $q = n$  se tiene,

$$\tilde{H}_n(F^{-1}(z)) = \bigoplus_{i=1}^s H_{n+1}(F_i, F_z).$$

Sustituyendo  $H_{n+1}(F_i, F_z)$  por la expresión (3.27) se tiene

$$\tilde{H}_n(F^{-1}(z)) = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}^{\mu_i} \oplus A_i,$$

es decir

$$\tilde{H}_n(F^{-1}(z)) = \mathbb{Z}^\mu \oplus A,$$

donde  $A = \bigoplus_{i=1}^s A_i$ . □

Observaciones del teorema anterior:

Notemos que, de la demostración del teorema anterior, se tiene que la homología  $\tilde{H}_n(F^{-1}(z))$  de la fibra regular de  $F$ , es la suma directa de la homología de las fibras locales  $\tilde{H}_n(F_z \cap B_j) = \mathbb{Z}^{\mu_i}$  (usando las expresiones 3.26 y 3.27), más la suma directa del grupo denotado como  $A$ , que es el aporte que puedan dar los ciclos que se encuentren en una vecindad del infinito;  $\tilde{H}_n(F^{-1}(z)) = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}^{\mu_i} \oplus A$ .

Por otro lado, se sabe que los ciclos evanescentes en las fibras locales  $F_z \cap B_j$  forman una base de  $\tilde{H}_n(F_z \cap B_j)$  ([2], Teorema 2.1). Por lo que, la suma directa de las homologías locales  $\tilde{H}_n(F_z \cap B_j)$  en la  $n$ -homología de  $F^{-1}(z)$ , nos dice que los ciclos evanescentes en  $\tilde{H}_n(F^{-1}(z))$  son linealmente independientes. En particular cuando el grupo  $A$  es trivial se tiene que los ciclos evanescentes (en los puntos críticos de  $F$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$ ) forman una base de  $\tilde{H}_n(F^{-1}(z))$ .

En contraste al caso en que  $A$  es trivial, también puede ocurrir que un polinomio  $F$  no tenga puntos críticos en el plano afín  $\mathbb{C}^{n+1}$ , y que su  $n$ -homología  $H_n(F^{-1}(z))$ , sea generada sólo por ciclos en el grupo  $A$ , i.e., por ciclos en el infinito.

En [4], Broughton describe una familia grande de polinomios, llamados *polinomios monótonos (tame polynomials)*, donde para cada polinomio  $F$  de esa familia, el conjunto de valores atípicos  $\Sigma_F$  está formado sólo por los valores críticos de  $F$ , y tal que el grupo  $A$  es trivial. También exhibe un ejemplo del caso contrario a las condiciones de la familia de *polinomios monótonos*, i.e., da un polinomio sin puntos críticos en el plano afín  $\mathbb{C}^{n+1}$ , de modo que el  $n$  grupo de homología de su fibra regular está generado sólo por el grupo  $A$ .

En lo siguiente describiremos el ejemplo de Broughton, pero antes es importante hacer notar lo siguiente:

El conjunto de valores atípicos  $\Sigma_F$  claramente contiene a los valores críticos de puntos críticos de  $F$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Sin embargo, también se pueden tener valores atípicos que correspondan a puntos críticos al infinito, a estos los llamaremos *valores atípicos (o críticos) al infinito* (notemos que un valor crítico puede ser también un valor atípico al infinito). En [23] [20], Hà y Lê dan un criterio para caracterizar a los *valores atípicos al infinito* en el caso  $n + 1 = 2$ , esto es: si un valor  $z_0$  no es valor crítico de  $F$ , entonces basta con

que la topología de la fibra en  $z_0$  sea distinta de la topología de la fibra para valores genéricos, para que  $z_0$  sea un *valor atípico al infinito*. En la sección 3.4 se caracterizarán con más detalle.

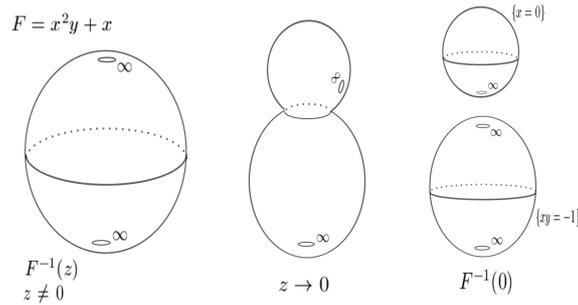
**Ejemplo 3.2.1.** (Broughton [4])

Sea  $F = x^2y + x$ . Notemos que  $\nabla F = (2xy + 1, x^2)$ , de modo que para que  $(x, y)$  sea punto crítico, se debe tener  $x = 0$ , pero si  $x = 0$  entonces  $2xy - 1$  es distinto de cero, por lo que no hay punto críticos en  $\mathbb{C}^2$ .

Por otro lado, para valores de  $z$  distintos de cero, se puede verificar que la fibra  $F^{-1}(z)$  es homeomorfa a una esfera menos dos puntos ( $\mathbb{C} - 0$ ), mientras que la fibra,  $F^{-1}(0)$ , sobre el valor cero, tiene dos componentes;  $x = 0$  y  $xy + 1 = 0$ , que forman la unión ajena de una esfera menos un punto (componente  $\{x = 0\}$ ) y una esfera menos dos puntos (componente  $\{xy = -1\}$ ). Las compactificaciones proyectivas de estas dos superficies  $x = 0$  y  $xy = -1$ , se intersecan en el infinito del eje  $y$  en  $\mathbb{C}P^2$ , i.e., en la dirección de  $x = 0$ ; pero como superficies en el plano afin  $\mathbb{C}^2$ , no se intersecan. Por lo que, la fibra genérica de  $F$  es conexa, mientras que la fibra de  $F$  en el valor 0 tiene dos componentes conexas.

Por el criterio de Ha y Lê, se tiene que el 0 es un valor atípico al infinito, además no hay más valores atípicos a parte del 0. Por lo que el conjunto de valores atípicos de  $F$  es  $\Sigma_F = \{0\}$ .

Sin embargo, la 1-homología de la fibra genérica de  $F$ , i.e.,  $F^{-1}(z)$  para  $z \neq 0$ , tiene un generador. Cuando  $z$  tiende al valor cero, se puede observar que el ciclo que genera a la 1-homología de  $F^{-1}(z)$  se colapsa en un punto al infinito; el punto que resulta de la intersección de la compactificación proyectiva de  $F^{-1}(z)$ , con la línea al infinito en la dirección del plano  $\{x = 0\}$  en  $\mathbb{C}P^2$ . Este punto al infinito es de hecho un punto crítico del polinomio  $F$  sobre la línea al infinito, i.e., considerando al polinomio que representa a  $F$  en las coordenadas  $(x_2, y_2) = (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$ , del infinito de  $y$  en  $\mathbb{C}P^2$ , esto es  $x_2^2 - x_2y_2^2$ , se tiene que el origen de la coordenadas  $(x_2, y_2)$  es un punto crítico de este polinomio.

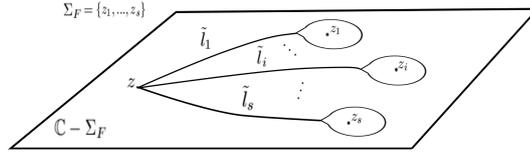


Retomemos el caso que nos interesa, i.e.,  $n + 1 = 2$ .

Cuando la 1-homología de la fibra genérica  $F^{-1}(z)$ , está generada únicamente por los ciclos evanescentes en puntos críticos en  $\mathbb{C}^2$ , el operador de monodromía (3.2.5) queda totalmente determinado por el efecto de los operadores de monodromía (3.11) en las fibras de Milnor locales  $F^{-1}(z) \cap B_j$ ,

con  $B_j$  vecindades de puntos críticos aislados. En el caso en que el grupo  $A$  es trivial, la *fórmula de Picard-Lefschetz* [2] da una expresión, en términos de las variaciones locales (3.12), para el operador de monodromía en cada lazo de  $\pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z)$  (definición 3.2.5) de la siguiente manera:

Supongamos que  $\Sigma_F = \{\text{valores críticos de } F\}$  y que el grupo  $A$  es trivial. Denotemos a los valores críticos de  $F$  como  $\{z_1, \dots, z_s\}$ . Sea  $\tilde{l}_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \Sigma_F$  un lazo basado en  $z$  y que rodea al valor crítico  $z_i$  como en el siguiente dibujo



El primer grupo de homotopía de  $\mathbb{C} - \Sigma_F$  basado en  $z$ ,  $\pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z)$ , está generado por los lazos  $\tilde{l}_i$ .

Denotemos como  $\{p_1, \dots, p_r\}$  a los puntos críticos con valor crítico  $z_i$ , asumamos que todos son no degenerados, y denotemos como  $\gamma_i^j$  al ciclo evanescente del punto crítico  $p_j$ . Sea  $\delta$  un ciclo en  $H_1(F^{-1}(z))$ , la *fórmula de Picard-Lefschetz* [2] nos dice que para cada  $\tilde{l}_i$  el operador de monodromía  $Mon_{\tilde{l}_i}$  actúa de la siguiente manera:

$$Mon_{\tilde{l}_i}(\delta) = \delta + \sum_{j=1}^r (\delta, \gamma_i^j) \gamma_i^j, \quad (3.28)$$

donde  $(\delta, \gamma_i^j)$  denota al índice de intersección entre los ciclos  $\delta$  y  $\gamma_i^j$ .

Denotaremos como  $\mathcal{O}rb(\delta(z))$  al subespacio en  $H_1(F^{-1}(z))$ , generado por la órbita del ciclo  $\delta(z) \in H_1(F^{-1}(z))$  bajo la acción del grupo de monodromía de  $F$  (definición 3.2.5):

$$\mathcal{O}rb(\delta(z)) = \langle \{Mon_{l^*}(\delta(z)) : \text{para cada } l \in \pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z)\} \rangle .$$

### 3.2.4. Continuación analítica de integrales abelianas

Recordemos que uno de los objetivos principales de esta tesis, expuestos en la sección 3.1, es estudiar las condiciones para que la integral abeliana  $\int_{\delta_j(z)} \eta$ , con  $\delta_j(z) \in H_1(F^{-1}(z))$ , se anule idénticamente. En particular cuando  $\eta$  es una 1-forma polinomial que realiza una perturbación  $dF + \varepsilon\eta = 0$ , con  $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$ ,  $F$  polinomio real y  $\delta_j(z)$  un ciclo evanescente en un punto crítico de  $F$  de tipo centro.

La fibración de Milnor global y el operador de monodromía, permiten ver a las integrales abelianas  $\int_{\delta_j(z)} \eta$  como funciones analíticas en  $z$ , que admiten continuación analítica en el complemento de los valores atípicos del polinomio  $F$ .

**Teorema 3.2.4.** *Sea  $F \in \mathbb{C}[x, y]$ , con  $\Sigma_F$  el conjunto de valores atípicos de  $F$ . Consideremos un ciclo  $\delta(z)$  en la 1-homología de la fibra regular  $F^{-1}(z)$ ,  $z \in \mathbb{C} - \Sigma_F$ . Entonces, para toda 1-forma polinomial  $\eta$  en  $\mathbb{C}^2$ , la integral abeliana  $\int_{\delta(z)} \eta$  admite continuación analítica en  $\mathbb{C} - \Sigma_F$  como función de  $z$ .*

*Demostración.* La demostración se sigue del teorema 26.29 del libro [26], usando la fibración localmente trivial dada por  $F : \mathbb{C}^2 - F^{-1}(\Sigma_F) \rightarrow \mathbb{C} - \Sigma_F$ .  $\square$

Denotemos  $I(z) = \int_{\delta_j(z)} \eta$ . La monodromía de  $I(z)$ , alrededor de un valor crítico  $z_i$ , está dada de la siguiente manera:

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $z_i = 0$ . La monodromía de la función  $I(z)$  alrededor del 0 es lo que se obtiene al continuar esta función, a lo largo de una curva que rodee 0. Por ejemplo, para la función dada por el logaritmo complejo,  $\log(z)$ , lo que se obtiene al continuar esta función, a lo largo de la curva  $ze^{2\pi i\theta}$ , con  $\theta \in [0, 1]$ , es  $\log(ze^{2\pi i}) = \log(z) + 2\pi i$ .

Como  $\eta$  es univaluada, entonces la continuación analítica de  $I(z) = \int_{\delta_j(z)} \eta$  sólo afecta al ciclo  $\delta(z)$ . Por lo que, la continuación de la función  $I(z)$ , a lo largo de la curva  $ze^{2\pi i\theta}$ , con  $\theta \in [0, 1]$  es igual a

$$I(ze^{2\pi i}) = \int_{\delta_j(ze^{2\pi i})} \eta,$$

con  $\delta_j(ze^{2\pi i}) = Mon_{0*}(\delta_j(z))$ , donde  $Mon_{0*}$  es el operador de monodromía alrededor del valor 0 (definición 3.2.5). En general, denotemos también como  $Mon_{i*}$ , al operador de monodromía alrededor del valor atípico  $z_i$ . Por un abuso de notación, denotaremos también por  $Mon_{i*}$  a la monodromía de funciones. Así, tenemos que

$$Mon_{i*}I(z) = \int_{Mon_{i*}(\delta_j(z))} \eta.$$

Por otro lado, la variación de  $I(z)$  alrededor del valor atípico  $z_i$ , que se define como  $Var_i(I) = Mon_{i*}(I(z)) - I(z)$ , está dada por

$$Var_i I(z) = \int_{Mon_{i*}(\delta_j(z))} \eta - \int_{\delta_j(z)} \eta,$$

esto es,

$$Var_i(I(z)) = \int_{Var_i(\delta_j(z))} \eta.$$

Nota: Si  $\eta$  fuese multivaluada, se debe considerar el aporte de su multivaluación tanto en la monodromía como en la variación.

Con esto, tenemos por continuación analítica en  $\mathbb{C} - \Sigma_F$ , que si  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$  para toda  $z$  en una vecindad  $U$  de un valor regular de  $F$  (suficientemente pequeña, de modo que la fibración de Milnor de  $F$  sobre  $U$  sea trivial), entonces

$\int_{\gamma(z)} \eta \equiv 0$  para todo  $\gamma(z) \in \mathcal{O}rb(\delta(z))$ , con  $z \in U$ .

En el caso en que la 1-homología de la fibra regular,  $F^{-1}(z)$  con  $z \in \mathbb{C} - \Sigma_F$ , es generada por los ciclos evanescentes, la fórmula de Picard-Lefschetz (3.28), nos da también la continuación analítica de la integral abeliana  $I(z) = \int_{\delta_j(z)} \eta$  a lo largo de cualquier lazo en  $\mathbb{C} - \Sigma_F$ .

### 3.3. Exactitud relativa

De la sección anterior, tenemos que si la integral de una 1-forma polinomial  $\eta$  se anula en una familia continua de órbitas periódicas  $\delta(z)$  (en particular podría ser una familia continua de órbitas periódicas reales), contenidas en las superficies de nivel  $z$  de  $F$ , entonces por continuación analítica la integral de  $\eta$  también se anula a lo largo de cualquier curva en la órbita por monodromía de  $\delta(z)$ . Esto nos da una relación entre la condición  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$  y la dimensión de  $\mathcal{O}rb(\delta(z)) \subset H_1(F^{-1}(z))$ .

Conocer bajo qué condiciones la órbita por monodromía de un ciclo evanescente  $\delta(z)$  en  $H_1(F^{-1}(z))$ , genera a todo el espacio  $H_1(F^{-1}(z))$ , es también conocido como *el problema de monodromía*:

**Problema 3.3.1.** (*Problema de monodromía*) [8] ¿Bajo qué condiciones en  $F$  se tiene que la órbita por monodromía de un ciclo evanescente en un punto crítico de Morse genera a toda la homología  $H_1(F^{-1}(z))$ ?

Bajo hipótesis de genericidad en el polinomio  $F$ , Ilyashenko [24] mostró que la órbita por monodromía de cualquier ciclo evanescente  $\delta(z)$  en la fibra regular  $F^{-1}(z)$ , genera toda la 1-homología de  $F^{-1}(z)$ . En este caso, si  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , es posible definir un polinomio  $R$  de modo que  $\eta - dR$  se anule en todos los vectores tangentes a las superficies de nivel de  $F$ . De este modo, Ilyashenko llega a que  $\eta$  debe tener la siguiente expresión:

$$\eta = g dF + dR, \text{ con } g \text{ y } R \text{ polinomios,}$$

y se dice que  $\eta$  es *algebraicamente relativamente exacta* respecto a  $dF$ .

De forma más general, se tiene la siguiente definición:

**Definición 3.3.1.** Decimos que una 1-forma  $\eta$  es *algebraicamente relativamente exacta* respecto a otra 1-forma  $\omega$ , si existen polinomios  $g, R \in \mathbb{C}[x, y]$ , tales que  $\eta = g\omega + dR$ .

Las hipótesis de genericidad que pide Ilyashenko son: que todos los puntos críticos de la complejificación de  $F$  sean no degenerados, y que cada dos puntos críticos distintos tengan valores críticos distintos, esto es que  $F$  sea un *polinomio de Morse*; y que la parte principal homogénea de  $F$ , se factorice en factores lineales simples. A esta segunda condición también se le conoce como *transversalidad al infinito*. El enunciado del teorema de Ilyashenko, que describimos arriba es el siguiente:

**Teorema 3.3.1.** (Ilyashenko, 1969) [24]([26],p.540) Sea  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  un polinomio real transversal al infinito cuya complejificación es un polinomio de Morse, y sea  $\delta(z)$  una familia continua de órbitas periódicas reales en las curvas de nivel  $F^{-1}(z)$  de  $F$ .

Si  $\eta$  es una 1-forma polinomial arbitraria con integral idénticamente cero a lo largo de  $\delta(z)$ , entonces  $\eta$  es algebraicamente relativamente exacta respecto a  $dF$ . En particular, si  $\deg \eta \leq \deg dF$ , entonces  $\eta$  es exacta,  $\eta = dR$ ,  $R \in \mathbb{R}[x, y]$ .

Que un polinomio  $F$ , con grado  $n + 1$  sea transversal al infinito, implica que la compactificación proyectiva de su fibra regular,  $\overline{F^{-1}(z)}$ , interseca en  $n + 1$  puntos distintos a la línea al infinito. Con esto se tiene que la 1-homología de la fibra afín de  $F$ , i.e.,  $F^{-1}(z) \subset \mathbb{C}^2$ , está descrita por la suma directa de la 1-homología de la compactificación proyectiva de la fibra regular, más los ciclos en  $F^{-1}(z)$  que rodean a los puntos de intersección de  $\overline{F^{-1}(z)}$  con la línea al infinito.

Un resultado importante, en la prueba del teorema de Ilyashenko, es que para polinomios de Morse transversales al infinito, la 1-homología de sus superficies de nivel, es generada por los ciclos evanescentes.

**Teorema 3.3.2.** ([26], p. 535) Los ciclos evanescentes generan el primer grupo de homología de cualquier fibra  $F^{-1}(z) \subset \mathbb{C}^2$  de un polinomio de Morse transversal al infinito.

Otro paso crucial en la prueba, es que en este tipo de polinomios, el grupo de monodromía (definición 3.2.5) actúa transitivamente sobre los ciclos evanescentes.

**Teorema 3.3.3.** ([26], p. 535) El grupo de monodromía actúa transitivamente en la colección de todos los ciclos evanescentes, esto es: para cualesquiera dos ciclos evanescente  $\delta_1(z), \delta_2(z) \in F^{-1}(z)$ ,  $z \in \mathbb{C} - \Sigma_F$ , existe un lazo  $l \in \pi_1(\mathbb{C} - \Sigma_F, z)$  tal que  $Mon_{l*} \delta_1(z) = \delta_2(z)$ .

Hacemos notar que en el teorema anterior se usa de manera fundamental el que los puntos críticos de  $F$  están en niveles críticos distintos.

Los dos teoremas anteriores implican, que en este tipo de polinomios, la órbita por monodromía de cualquier ciclo evanescente  $\delta(z)$  genera toda la 1-homología de la fibra regular  $F^{-1}(z)$ .

En esta tesis, trabajaremos con polinomios  $F$  que no satisfacen todas la hipótesis genéricas del teorema de Ilyashenko. A saber, consideraremos polinomios de la forma  $F = \prod_{j=1}^d f_j$ , con  $f_j \in \mathbb{R}[x, y]$ . En estos polinomios, el valor  $z = 0$  resulta ser un valor crítico repetido; es el valor crítico de todos los puntos críticos dados por las intersecciones de los conjuntos algebraicos  $f_j^{-1}(0)$ . Trabajaremos dos casos: uno en que el valor cero es el único valor crítico repetido, y otro en que el polinomio  $F$  tenga además una simetría del tipo  $S : (x, y) \mapsto (-x, y)$ , donde se tiene también la repetición de valores críticos que produzca la simetría, i.e., si dos puntos críticos tienen el mismo valor crítico es porque o bien ambos están en el nivel  $z = 0$ , o bien porque

ambos son simétricos respecto a la simetría  $S$ . En ambos casos, quitamos también la condición de transversalidad al infinito, pero la compensamos con una condición que no permita que haya ciclos evanescentes en puntos críticos al infinito (esto para no caer en el caso del ejemplo 3.2.1 de Broughton). Esa condición al infinito, y otras condiciones más específicas sobre  $F$ , se verán más adelante.

### 3.3.1. Espacio de integrales abelianas

En los casos no genéricos, la órbita por monodromía de un ciclo evanescente, no necesariamente genera a toda la 1-homología de la fibra regular (por ejemplo en los casos no genéricos estudiados en [39] y [8]). La expresión de una 1-forma  $\eta$  tal que  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , depende del complemento de la órbita por monodromía de  $\delta(z)$  en la 1-homología de la fibra regular  $F^{-1}(z)$ . Para llegar a una expresión canónica de  $\eta$ , consideraremos la cohomología de de Rham de la fibra regular de  $F$ , y asociaremos a la órbita por monodromía de  $\delta(z)$  su dual en la cohomología de de Rham. A este dual lo denotaremos como  $\mathcal{O}rb(\delta(z))^* \subset H_{dR}^1(F^{-1}(z))$ . Expresaremos a la cohomología  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$  en términos del dual de  $\mathcal{O}rb(\delta(z))$ , y del dual de su complemento en la 1-homología de la fibra regular  $F^{-1}(z)$ . Esta descomposición nos permitirá caracterizar a los elementos de una base algebraica de la cohomología  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$  (para fibras regulares), para caracterizar las 1-formas polinomiales  $\eta$  cuya integral  $\int_{\delta(z)} \eta$  es idénticamente cero. La descripción de estas 1-formas se verá en las secciones siguientes.

Sea  $\Omega^*(F_z, alg)$  el complejo de formas holomorfas en  $F_z := F^{-1}(z)$  que son restricción de formas racionales en  $\mathbb{C}^2$ . Denotamos como  $H_{dR}^*(F_z, alg)$  a la cohomología calculada con el complejo  $\Omega^*(F_z, alg)$ . El *teorema de de Rham algebraico* [17] ([16], p. 453) nos dice que

$$H_{dR}^*(F_z, alg) \cong H^*(F_z, \mathbb{C}).$$

Por simplicidad también denotaremos a la cohomología  $H_{dR}^*(F_z, alg)$  como  $H_{dR}^*(F_z)$ .

Dado un ciclo  $\delta(z)$  contenido en  $F_z$ , definamos el espacio de integrales abelianas en 1-formas de  $\Omega^1(F_z, alg)$  a lo largo del ciclo  $\delta(z)$ :

$$\mathcal{P}_{\delta(z)} := \left\{ \int_{\delta(z)} \omega : \omega \in \Omega^1(F_z, alg) \right\}.$$

Consideremos el anillo de funciones racionales en  $\mathbb{C}$  definidas en  $z$ . Esto es el conjunto de funciones  $p/q$  con  $p$  y  $q$  polinomios en  $\mathbb{C}$  tal que  $q(z) \neq 0$ . Este conjunto se denota como  $\mathcal{O}_z(\mathbb{C})$ , y es llamado el *anillo local en  $z$*  ([13], p. 21). Denotemos como  $\mathbb{C}(z)$  a la imagen de  $\mathcal{O}_z(\mathbb{C})$  bajo el homomorfismo de de evaluación de funciones en el valor  $z$ ,

$$\begin{aligned} ev : \mathcal{O}_z(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ p/q &\mapsto p(z)/q(z). \end{aligned}$$

Como  $ev$  es suprayectiva  $\mathbb{C}(z)$  es isomorfo a  $\mathbb{C}$ . Además  $\mathbb{C} \cong \mathcal{O}_z(\mathbb{C})/\ker(ev)$ .

Notemos que  $\mathcal{P}_{\delta(z)}$  es un  $\mathbb{C}(z)$ -espacio vectorial con el producto dado por  $\frac{p(z)}{q(z)} \int_{\delta(z)} \omega = \int_{\delta(z)} \frac{p(F)}{q(F)} \omega$ , para cualesquiera  $\frac{p(z)}{q(z)} \in \mathbb{C}(z)$  y  $\omega \in \Omega^1(F_z, alg)$ . El producto está bien definido pues, ya que  $p/q \in \mathcal{O}_z(\mathbb{C})$ ,  $\frac{p(F)}{q(F)}$  es una función racional en  $\mathbb{C}^2$  que es holomorfa en  $F_z$ . Así para cualquier  $\omega \in \Omega^1(F_z, alg)$  también se tiene que  $\frac{p(F)}{q(F)} \omega \in \Omega^1(F_z, alg)$ .

Consideremos la órbita por monodromía de  $\delta(z)$ ,  $Orb(\delta(z)) \subset H_1(F^{-1}(z))$ , y su dual, al que denotamos como  $Orb(\delta(z))^*$ , en la 1-cohomología de de Rham de la fibra regular,  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$ . Por [17], tomamos una base de 1-formas polinomiales  $\{\omega_i\}$  para la cohomología  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$ . Supongamos que  $\{\omega_i\}_{i=1}^N$  es base de  $Orb(\delta(z))^*$ . Esto es,

$$Orb(\delta(z))^* = \left\{ \sum_{i=1}^N p_i(z) \omega_i : p_i(z) \in \mathbb{C}(z) \right\}.$$

Que los coeficientes  $p_i$  sean funciones racionales se debe a que éstos se pueden expresar como cocientes de determinantes de matrices formadas por integrales abelianas, conocidas como *matrices de periodo*. Los determinantes de estas matrices son funciones univaluadas y con crecimiento acotado por un polinomio en  $|z|$ , por lo que estos determinantes son polinomios en  $\mathbb{C}$  (para más detalle se puede ver [26] p. 534 o [2] p. 318 y p. 277).

Definamos la siguiente transformación

$$\Psi : Orb(\delta(z))^* \rightarrow \mathcal{P}_{\delta(z)},$$

dada por  $\Psi(\eta) = \int_{\delta(z)} \eta$ .

**Proposición 3.3.1.**  $\Psi$  es un  $\mathbb{C}(z)$ -homomorfismo inyectivo entre  $Orb(\delta(z))^*$  y  $\mathcal{P}_{\delta(z)}$ . En particular,  $\dim Orb(\delta(z))^* \leq \dim \mathcal{P}_{\delta(z)}$ .

*Demostración.* La linealidad de  $\Psi$  se sigue de la linealidad de las integrales. Verifiquemos la inyectividad de  $\Psi$ :

Sea  $\{\gamma_j(z)\}_{j=1}^N$  una base de  $Orb(\delta(z))$ . Completamos la base de  $Orb(\delta(z))$  en una base  $\beta = \{\gamma_j(z)\}$  para  $H_1(F^{-1}(z))$ . Sea  $\beta^* = \{\tilde{\eta}_j(z)\}$  la base dual a  $\beta = \{\gamma_j(z)\}$  en la cohomología de de Rham  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$ , donde  $\{\tilde{\eta}_j(z)\}_{j=1}^N$  es una base de  $Orb(\delta(z))^*$ . De modo que,  $\int_{\gamma_i(z)} \tilde{\eta}_j = 1$  si  $i = j$  y  $\int_{\gamma_i(z)} \tilde{\eta}_j = 0$  si  $i \neq j$ .

Sea  $\eta \in Orb(\delta(z))^*$  tal que  $\psi(\eta) = 0$ . Expresemos a  $\eta$  en términos de la base  $\{\tilde{\eta}_j(z)\}_{j=1}^N$  de  $Orb(\delta(z))^*$ ;

$$\eta = \sum_{j=1}^N p_j(z) \tilde{\eta}_j.$$

Integremos la expresión anterior a lo largo del ciclo  $\gamma_i(z)$  de la base  $\beta$ , con  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\int_{\gamma_i(z)} \eta = \sum_{j=1}^N p_j(z) \int_{\gamma_i(z)} \tilde{\eta}_j. \quad (3.29)$$

Como  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , por continuación analítica tenemos que  $\int_{\gamma(z)} \eta \equiv 0$ , para todo  $\gamma(z) \in \mathcal{O}rb(\delta(z))$ . En particular, como  $\{\gamma_i(z)\}_{i=1}^N$  es base de  $\mathcal{O}rb(\delta(z))$ , entonces  $\int_{\gamma_i(z)} \eta \equiv 0$  para toda  $1 \leq i \leq N$ .

De esta manera, el lado izquierdo de (3.29) es 0, mientras que, por propiedades de la base dual, el lado derecho es  $p_i(z)$ . Por lo que  $p_i(z) \equiv 0$  para todo  $i = 1, \dots, N$ . Por lo tanto,  $\eta = 0$ .  $\square$

### 3.4. Condición al infinito

En esta sección se estudiarán los criterios [20][21] para caracterizar el tipo de valores atípicos para polinomios de  $\mathbb{C}[x, y]$ , en particular el tipo de valores atípicos que generan ciclos evanescentes en el infinito (como en el ejemplo 3.2.1). Y con eso enunciaremos el teorema de Gavrilov [15], que nos define una familia de polinomios (no necesariamente transversales al infinito) tales que su primer grupo de homología tiene una base de ciclos evanescentes (en puntos críticos en  $\mathbb{C}^2$ ).

Sea  $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  una función polinomial y  $z$  un valor regular de  $F$ , por el teorema de Broughton 3.2.3 tenemos que  $H_n(F^{-1}(z)) = \mathbb{Z}^{\mu(F)} \oplus A$ , donde  $\mu(F)$  es el número total de Milnor de  $F$ , y  $A$  es un grupo abeliano que corresponde a ciclos que pueden surgir de puntos críticos al infinito. Si  $A$  es trivial, esto quiere decir que la topología de la fibra regular de  $F$ ,  $F^{-1}(z)$ , está determinada por su topología en vecindades de puntos críticos en  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Esto significa que el  $n$ -ésimo grupo de homología  $H_n(F^{-1}(z))$  está generado por los ciclos evanescentes en los puntos críticos de  $F$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Sin embargo, un polinomio  $F$  podría tener puntos críticos en el infinito y a su vez la  $n$ -homología  $H_n(F^{-1}(z))$  podría tener una base de ciclos evanescentes, i.e., no necesariamente un punto crítico al infinito produce un ciclo evanescente en ese punto. Esto depende de si la topología de las fibras de  $F$  cambia en vecindades del infinito.

Para estudiar estos cambios en la topología de las fibras hay que considerar la fibración de Milnor de  $F$  (3.14),

$$F : \mathbb{C}^{n+1} - F^{-1}(\Sigma_F) \rightarrow \mathbb{C} - \Sigma_F,$$

donde  $\Sigma_F$  es el conjunto de valores atípicos de  $F$ . Se distinguen dos tipos de valores atípicos; los valores en donde hay cambios en la topología de la fibra dentro de un conjunto compacto de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , y los valores en donde hay cambios en la topología de la fibra fuera de un conjunto compacto de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Claramente los primeros corresponden a los valores críticos de  $F$  (pues hay cambios en

la topología en vecindades de sus puntos críticos contenidos en  $\mathbb{C}^{n+1}$ ). El segundo tipo de valores atípicos es llamado *valores críticos de  $F$  al infinito*. Más precisamente, para este tipo de valores se tiene la siguiente definición:

**Definición 3.4.1.** *Sea  $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  una función polinomial y sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Decimos que  $z_0$  es un valor regular de  $F$  al infinito si existen  $r > 0$  y un conjunto compacto  $K \subset \mathbb{C}^{n+1}$  tales que la restricción*

$$F : F^{-1}(D_r(z_0)) - K \rightarrow D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\},$$

*defina una fibración trivial.*

*Un valor  $z_0 \in \mathbb{C}$  que no es regular al infinito es llamado valor crítico al infinito.*

Denotemos como  $\Sigma_c$  al conjunto de valores críticos de  $F$ , y denotemos como  $\Sigma_\infty$  al conjunto de valores críticos de  $F$  al infinito. Se puede probar [20] que

$$\Sigma_F = \Sigma_c \cup \Sigma_\infty.$$

El conjunto  $\Sigma_c$  puede ser descrito de la siguiente manera:

$$\Sigma_c = \{z \in \mathbb{C} : \mu^z(F) > 0\},$$

donde  $\mu^z(F)$  es la suma de los números de Milnor de  $F$  en puntos de la fibra  $F^{-1}(z)$  (definición 3.2.4).

En cuanto al conjunto  $\Sigma_\infty$ , en general para polinomios  $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ , no es claro cómo determinar si un valor pertenece a  $\Sigma_\infty$ . Sin embargo, para polinomios de  $\mathbb{C}^2$  en  $\mathbb{C}$ , se tienen criterios para determinar estos valores [20], [23], [21], [22], [15]. A saber, en [23] Hà Huy Vui y Lê Dũng Tráng probaron que, dado un polinomio  $F \in \mathbb{C}[x, y]$ , un valor  $z_0 \in \mathbb{C} - \Sigma_c$  pertenece a  $\Sigma_\infty$ , si y sólo si  $\chi(F^{-1}(z)) \neq \chi(F^{-1}(z_0))$ , donde  $\chi$  denota a la característica de Euler, y  $z$  es un valor genérico de  $F$ .

Por otro lado, H. V. Hà y L. A. Nguyễn [22] mostraron que un valor  $z_0 \in \mathbb{C}$  pertenece a  $\Sigma_\infty$ , si y sólo si existe al menos un punto de ramificación en la fibra regular  $F^{-1}(z)$  (respecto a una proyección general) que tiende a infinito cuando  $z$  tiende a  $z_0$ .

En [15] se describe un método, que mediante el cálculo del discriminante de  $F$  respecto a  $y$  (o respecto a  $x$ , según se tengan coordenadas apropiadas), permite determinar los valores de  $\Sigma_\infty$ . A continuación describiremos ese método:

**Definición 3.4.2.** *Decimos que una función lineal  $l$  está en posición general respecto a  $F \in \mathbb{C}[x, y]$  si para cualquier  $t \in \mathbb{C}$  el índice de intersección de la recta  $\{l = t\} \subset \mathbb{C}^2$  con la curva  $\{F = z\} \subset \mathbb{C}^2$  es exactamente  $n = \deg(F)$ , para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ .*

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $l = x$  es general respecto a  $F$ ; esto es que,  $F(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)y + a_n(x)$  donde

$n = \deg F$  y  $a_j \in \mathbb{C}[x]$  para toda  $j$ . Expresar a  $F$  de esa manera siempre es posible, bajo un cambio lineal de coordenadas si es necesario (el cual no altera la topología de las fibras).

En otras palabras, la proyección de la fibra  $F^{-1}(z) \subset \mathbb{C}^2$  en la coordenada  $x$ ,

$$\begin{aligned} p_1 : F^{-1}(z) \subset \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x, \end{aligned} \quad (3.30)$$

es una transformación suprayectiva, para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Notemos que los puntos de ramificación de esta proyección son los puntos  $(x, y) \in F^{-1}(z)$  tales que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$ . Estos puntos están determinados por el discriminante de  $F - z$  con respecto a  $y$  ([11], Ap. 1).

Para cada  $z \in \mathbb{C}$  denotemos como  $\Delta(x, z)$  al discriminante de  $F - z$  respecto a  $y$ ; o, lo que es lo mismo, el resultante de  $F - z$  y  $\frac{\partial F}{\partial y}$  como polinomios en  $y$ . De este modo,  $\Delta(x, z)$  es un polinomio en  $x$  y en  $z$ .

Sea  $d(z_0)$  el grado de  $\Delta(x, z_0)$  en  $x$  y sea  $d$  el grado de  $\Delta(x, z)$  en  $x$  para un valor  $z$  de  $F$  genérico:

$$\Delta(x, z) = b_0(z)x^d + \cdots + b_{d-1}(z)x + b_d(z), \quad b_j \in \mathbb{C}[z].$$

Claramente  $d(z) \leq d$ , y se tiene la desigualdad sólo para un conjunto finito de valores en  $z$ ; a saber, los valores  $z$  tales que  $b_0(z) = 0$ .

**Definición 3.4.3.** *Denotamos*

$$\rho^z(F) = d - d(z), \quad \rho(F) = \sum_{z \in \mathbb{C}} \rho^z(F)$$

El número de puntos de ramificación en  $\mathbb{C}^2$  de la proyección (3.30), para cada fibra  $F^{-1}(z)$ , es igual al grado en  $x$  del discriminante  $\Delta(x, z)$  [15]. Por lo que,  $\rho^{z_0}(F)$  es el número de puntos de ramificación sobre la fibra  $F^{-1}(z)$  respecto a la proyección (3.30), para  $z$  valor genérico de  $F$ , que tienden a  $\infty$  cuando  $z$  tiende a  $z_0$ . De este modo,  $\rho(F)$  es el número total de puntos de ramificación que tienden a infinito al variar  $z$  en  $\mathbb{C}$ .

En [15], Gavrilo muestra que  $\rho(F)$  es un invariante topológico, y da una expresión para la característica de Euler de cualquier fibra de  $F$  en términos de los números de Milnor y de los valores  $\rho(F)$  y  $\rho^z(F)$ . Esto es:

**Teorema 3.4.1.** [15] *Sea  $F \in \mathbb{C}[x, y]$  tal que todos sus puntos críticos son aislados. Entonces*

$$\chi(F^{-1}(z)) = 1 - \mu(F) - \rho(F) + \mu^z(F) + \rho^z(F).$$

**Corolario 3.4.1.** [15] *Sea  $F \in \mathbb{C}[xy]$  un polinomio tal que todos sus puntos críticos son aislados. La fibra de  $F$ ,  $F^{-1}(z)$ , para valores genéricos  $z$ , tiene el tipo de homotopía de un ramillete de  $\mu(F) + \rho(F)$  1-esferas, por lo que*

$$\dim H_1(F^{-1}(z)) = \mu(F) + \rho(F).$$

En términos del teorema de Broughton (3.2.3), tenemos que  $H_1(F^{-1}(z)) = \mathbb{Z}^{\mu(F)} \oplus A$ . Así, el corolario anterior nos dice que  $\dim A = \rho(F)$ .

De esta manera, el conjunto de valores críticos al infinito  $\Sigma_\infty$  puede describirse como:

$$\Sigma_\infty = \{z \in \mathbb{C} : \rho^z(F) > 0\}.$$

Por lo tanto, que  $\rho(F)$  sea igual a cero, significa que no hay ciclos evanescentes en el infinito.

**Definición 3.4.4.** [15] Decimos que un polinomio  $F$  es bueno si  $\rho(F) = 0$ .

Así, se tiene el siguiente teorema:

**Proposición 3.4.1.** [15] Sea  $F$  un polinomio bueno. Entonces, los ciclos evanescentes, en puntos críticos de  $F$  en  $\mathbb{C}^2$ , forman una base de  $F^{-1}(z)$ , para todo valor  $z \notin \Sigma_F$ , y  $\dim(H_1(F^{-1}(z))) = \mu(F)$ .

**Ejemplo 3.4.1.** Consideremos el polinomio  $F = (x^3 - y)(x - y)$ . Éste tiene un punto singular al infinito, dado por la intersección de la compactificación proyectiva de  $F^{-1}(z)$  con la línea al infinito en la dirección de  $x = 0$ .

Notemos que la proyección (3.30) de  $F^{-1}(z)$  en el eje  $x$  es suprayectiva. Calculamos<sup>3</sup> el discriminante de  $F - z$  respecto a  $y$  (o lo que es lo mismo, el resultante de  $F - z$  con  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ), esto es el siguiente polinomio en  $x$  y en  $z$ :

$$\Delta(x, z) = -x^6 + 2x^4 - x^2 - 4z.$$

El grado del discriminante en  $x$  es  $d = 6$ . Como el grado del discriminante en  $x$  no depende de  $z$ , entonces  $d(z) = 6$  para toda  $z$ . Por lo tanto  $\rho(F) = 0$ .

**Ejemplo 3.4.2.** Sea  $F = ((x - y)^2 + 2(x + y) - 16)(x^2 + y - 4)y$ . Este polinomio tiene dos puntos singulares en el infinito, uno en la dirección de  $x - y = 0$ , y otro en la dirección de  $x = 0$ . Notemos que la proyección (3.30) no es suprayectiva. Haremos un cambio de coordenadas para que la proyección (3.30) sea suprayectiva:

Sea  $\tilde{x} = x - y$  y  $\tilde{y} = y$ . Bajo estas coordenadas  $F$  se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(\tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{y}) \\ &= (\tilde{x}^2 + 2(\tilde{x} + 2\tilde{y}) - 16)((\tilde{x} + \tilde{y})^2 + \tilde{y} - 4)\tilde{y} \end{aligned}$$

Denotemos  $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}^2 + 2(\tilde{x} + 2\tilde{y}) - 16)((\tilde{x} + \tilde{y})^2 + \tilde{y} - 4)\tilde{y}$ . En estas coordenadas la proyección de  $\tilde{F}^{-1}(z)$  en el eje  $\tilde{x}$  es suprayectiva.

Calculamos [37] el discriminante de  $\tilde{F} - z$  respecto a  $\tilde{y}$ . Esto es,

$$\Delta(\tilde{x}, z) = 16\tilde{x}^{17} + P(\tilde{x}, z),$$

donde  $P$  es un polinomio en  $\tilde{x}$  y en  $z$ , con grado en  $\tilde{x}$  menor que 17. Así, el grado  $\Delta$  en  $\tilde{x}$  es  $d = 17$  y  $d(z) = 17$  para toda  $z$ . Por lo que  $\rho(\tilde{F}) = 0$ , y como  $\tilde{F}^{-1}(z)$  y  $F^{-1}(z)$  tienen la misma topología para  $z$  valor genérico, entonces  $\rho(F) = 0$ .

<sup>3</sup>Usando el software llamado "Singular" [37].

### 3.5. Particiones en curvas de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$

Como se describió en la introducción y en la sección 3.1, el *problema tangencial del centro* está motivado en el estudio de centros reales de foliaciones integrables en  $\mathbb{R}^2$ . En los casos que estamos considerando, la integral primera es un polinomio con coeficientes reales  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ . Sin embargo, para entender las condiciones que provocan la anulación idéntica de una integral abeliana,  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , a lo largo de cualquier familia continua de órbitas periódicas,  $\delta(z) \subset F^{-1}(z)$ , reales en particular, ha sido necesario considerar la complejificación del polinomio  $F$ . Este procedimiento nos permite conocer la monodromía de la familia de ciclos  $\delta(z)$  y la continuación analítica de la integral abeliana  $\int_{\delta(z)} \eta$ . En esta sección veremos que bajo ciertas condiciones en  $F$ , es posible conocer la monodromía de cualquier ciclo  $\delta(z) \in H_1(F^{-1}(z))$ , con la información que nos da la foliación definida por  $F$  en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ .

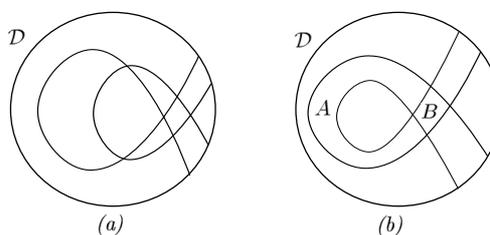
Consideraremos el modelo del plano proyectivo real dado por  $\mathcal{D} = D/\{p \sim -p : p \in \partial D\}$ , donde  $D$  es el disco unitario en  $\mathbb{R}^2$  con centro en el origen. Notemos que  $\partial\mathcal{D} \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ .

Ahora definiremos lo que llamaremos una partición de curvas en  $\mathcal{D}$ . Esta definición está basada en la definición de *partición* dada por A'Campo en [1] para una versión local dentro de un disco en  $\mathbb{R}^2$ :

**Definición 3.5.1.** *Sea  $J$  la unión disjunta de  $r$  copias del intervalo  $[0, 1]$ . Una partición con  $r$  ramas de  $\mathcal{D}$  es una inmersión  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{D}$  tal que:*

1.  $\alpha(\partial J) \subset \partial\mathcal{D}$ ,  $\alpha(\overset{\circ}{J}) \subset \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ ,  $\alpha(J)$  es conexa en  $\mathcal{D}$ .
2.  $\alpha(\overset{\circ}{J})$  es una inmersión genérica en  $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ , i.e., las intersecciones de  $\alpha(\overset{\circ}{J})$  sólo pueden ser dobles y transversales.
3. Una región es una componente conexa de  $\mathcal{D} - \alpha(J)$  tal que su cerradura no interseca a  $\partial\mathcal{D}$ . La intersección de la cerradura de dos regiones  $A$  y  $B$  debe cumplir que  $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$  o  $\overline{A} \cap \overline{B} = \{\text{un punto}\}$  o  $\overline{A} \cap \overline{B} = \alpha(I)$ , donde  $I$  es un segmento de  $J$ .  
A la curva  $\alpha(J)$  también la llamaremos partición de  $\mathcal{D}$  si  $\alpha$  es una partición de  $\mathcal{D}$ .

**Definición 3.5.2.** *Llamaremos puntos dobles de la partición  $\alpha$ , sólo a los puntos que resulten de intersección de ramas de  $\alpha(J)$  contenidos en  $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ . A los puntos de intersección de ramas de  $\alpha$  en  $\partial\mathcal{D}$  los llamaremos puntos singulares en  $\partial\mathcal{D}$ .*

**Ejemplo 3.5.1.**

La figura (a) es una partición de  $\mathcal{D}$  con 2 ramas y 5 regiones. Mientras que la figura (b) no satisface todas las condiciones para ser partición, pues la intersección de la cerradura de sus regiones  $A$  y  $B$  es la imagen de dos segmentos.

En particular, el tipo de particiones que nos interesan son aquellos que están dados por la extensión a  $\mathbb{RP}^2$  del conjunto de ceros de un polinomio real,  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ .

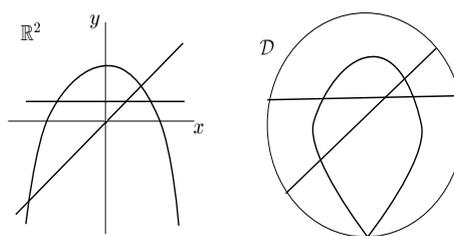
**Definición 3.5.3.** Dado  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ , diremos que  $F$  define una partición de  $\mathbb{RP}^2$  con  $r$  ramas si:

1.  $F^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^2$  tiene  $r$  componentes conexas.
2. La extensión de  $F^{-1}(0)$  en  $\mathbb{RP}^2$  define una partición en el modelo  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{RP}^2$ .

Notemos que si  $F$  define una partición de  $\mathcal{D}$ , entonces todos los puntos críticos de tipo silla  $F$  están en nivel cero (por resultar de las intersecciones de las ramas de  $F^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^2$ ), mientras que ningún punto crítico de tipo centro puede estar en las ramas definidas por  $F^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 3.5.2.** Sea  $F = (x^2 + y - 4)(x - y)(y - 1)$ .

$F^{-1}(0)$  define una partición en  $\mathcal{D}$  con 3 ramas, 3 regiones y 5 puntos dobles (de tipo silla), y un punto singular en  $\partial\mathcal{D}$ .



Nota: En la definición de partición no ponemos restricción al tipo de singularidades que  $F$  tenga en la línea al infinito. Sin embargo, en los casos que consideraremos para el problema *tangencial del centro*, sí pondremos una restricción a este tipo de singularidades. Sólo se permitirán aquellas singularidades al infinito que satisfagan que  $\rho(F) = 0$ , donde  $\rho$  es el invariante topológico que se definió en la sección 3.4.

### 3.5.1. Diagrama de Dynkin y monodromía

Un aspecto especial de las particiones, en particular en aquellas que son definidas por los ceros de un polinomio real, es que se puede asociar un signo a las regiones. Esto es importante para definir un objeto combinatorio a las particiones llamado *diagrama de Dynkin*.

**Definición 3.5.4.** [1] Una partición signada de  $\mathcal{D}$  es una partición tal que a cada región se le asocia un signo  $+$  o  $-$ . Si la partición es definida por un polinomio  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ , asociaremos a cada región el signo dado por el signo del polinomio  $F$  en la región.

Para una partición signada podemos definir un diagrama de Dynkin de la siguiente manera:

Denotamos como  $C_1, \dots, C_\mu$  a las regiones y puntos dobles de la partición en  $\mathcal{D}$ . Estos serán los vértices del diagrama de Dynkin. Ordenaremos estos vértices de la siguiente manera:  $C_1, \dots, C_p$  serán las regiones con signo  $+$ ;  $C_{p+1}, \dots, C_{p+k}$  serán los puntos dobles; y  $C_{p+k+1}, \dots, C_\mu$  serán las regiones con signo  $-$ .

Para definir los ejes del digrama definiremos la siguiente intersección entre vértices para  $0 \leq i < j \leq \mu$ :

$$(C_i, C_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_i \text{ es una región positiva y } C_j \text{ es un punto doble} \\ & \text{contenido en la frontera de } C_i, \text{ o} \\ & C_j \text{ es una región negativa y } C_i \text{ es un punto doble} \\ & \text{contenido en la frontera de } C_j, \text{ o} \\ & C_i \text{ es una región positiva y } C_j \text{ es una región negativa} \\ & \text{tales que } \bar{C}_i \cap \bar{C}_j \text{ es la imagen de un segmento bajo la partición.} \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad (3.31)$$

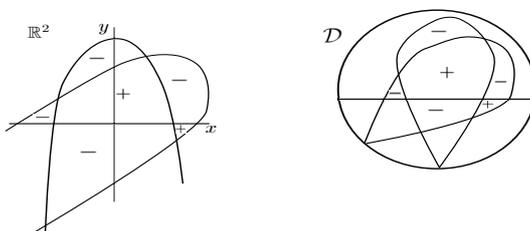
Se define el *diagrama de Dynkin* de una partición signada como la gráfica con vértices  $C_1, \dots, C_\mu$ , con un eje entre los vértices  $C_i$  y  $C_j$  si y sólo si  $(C_i, C_j) = 1$ . Usamos la siguiente representación gráfica para las regiones y los puntos dobles:

Regiones positivas:  $\oplus$

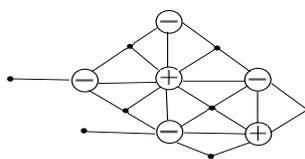
Regiones negativas:  $\ominus$

Puntos dobles:  $\bullet$

**Ejemplo 3.5.3.** Consideremos la partición definida por el polinomio  $F = ((x - y)^2 + 2(x + y) - 16)(x^2 + y - 4)y$ . Ésta es una partición con 3 ramas, 6 regiones, 8 puntos dobles (de tipo silla) en  $\mathring{\mathcal{D}}$ , y 2 puntos singulares en  $\partial\mathcal{D}$ . A cada región de la partición en  $\mathcal{D}$  le damos el signo que  $F$  tiene dentro de la región:



Su diagrama de Dynkin es<sup>4</sup>



En el caso en que la partición está definida por un polinomio real  $F$ , notemos que además cada vértice  $C_j$  está asociado a un punto crítico de  $F$ ; a saber, conservando el orden de los vértices que utilizamos arriba, cada región positiva  $C_1, \dots, C_p$  contiene un punto crítico de  $F$  de tipo centro con valor crítico positivo, cada región negativa  $C_{p+k+1}, \dots, C_\mu$  contiene un punto crítico de  $F$  de tipo centro con valor crítico negativo, y cada punto doble  $C_{p+1}, \dots, C_{p+k}$  es un punto crítico de  $F$  de tipo silla. A su vez, asociamos a cada vértice  $C_1, \dots, C_\mu$  con la familia continua de ciclos evanescentes en su punto crítico correspondiente. Usando el índice de intersección entre ciclos evanescentes, también es posible construir una gráfica para la partición definida por  $F$ ; esto es, definiendo un eje entre dos vértices  $C_i$  y  $C_j$  si y sólo si sus ciclos evanescentes asociados se intersecan.

Sin embargo, en [1] A'Campo probó que cuando  $F$  define una partición, es posible elegir una orientación para los ciclos evanescentes (ver apéndice A) en la fibra regular de  $F$ , de modo que la intersección entre vértices definida en (3.31) coincida con la intersección entre vértices definida por el índice de intersección de ciclos, de modo que ambos diagramas, el definido por las intersecciones (3.31) y el definido por el índice de intersección de ciclos coincidan. Esto es:

Supongamos que  $\delta_1, \dots, \delta_\mu$  son los ciclos evanescentes de  $F$ . Denotaremos como  $\delta_1, \dots, \delta_p$  a los ciclos evanescentes en puntos críticos de tipo centro en niveles positivos (centros en sentido de la foliación real definida por  $dF = 0$ ), y denotaremos por  $C_j$  a la región, de la partición definida por  $F$  en  $\mathcal{D}$ , que contiene a  $\delta_j$ , para  $1 \leq j \leq p$ . Denotaremos como  $\delta_{p+1}, \dots, \delta_{p+k}$  a los ciclos evanescentes en puntos críticos de tipo silla (sillas en el sentido de la foliación real definida por  $dF = 0$ ), y denotaremos como  $p_i \in \mathcal{D}$  al punto crítico de

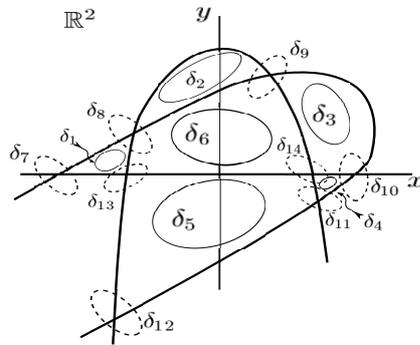
<sup>4</sup>Recordemos que los puntos de intersección entre ramas en  $\partial\mathcal{D}$  no son parte de los vértices del diagrama de Dynkin.

tipo silla correspondiente al ciclo evanescente  $\delta_i$ , para  $p + 1 \leq i \leq p + k$ . Denotaremos como  $\delta_{p+k+1}, \dots, \delta_\mu$  a los ciclos evanescentes en puntos críticos de tipo centro en niveles negativos, y denotaremos como  $C_j$  a la región en la partición que contiene al ciclo  $\delta_j$ , para  $p+k+1 \leq j \leq \mu$ . Que los ciclos  $\delta_1, \dots, \delta_\mu$  tengan la orientación dada por A'Campo (apéndice A) implica que el índice de intersección entre ellos está dado de la siguiente manera:

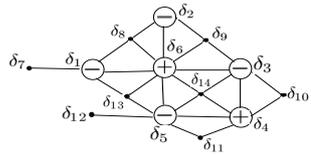
$$(\delta_i, \delta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+k \\ & \text{y } p_j \in \bar{C}_i, \text{ o} \\ & \text{si } p+k+1 \leq j \leq \mu, p+1 \leq i \leq p+k \\ & \text{y } p_i \in \bar{C}_j, \text{ o} \\ & \text{si } 1 \leq i \leq p, p+k+1 \leq j \leq \mu \\ & \text{y } \bar{C}_i \cap \bar{C}_j \text{ es la imagen de un segmento en la partición.} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (3.32)$$

**Comentario 3.5.1.** *Notar que por la antisimetría del índice de intersección, si  $(\delta_i, \delta_j) = 1$  entonces  $(\delta_j, \delta_i) = -1$ .*

**Ejemplo 3.5.4.** *En el ejemplo anterior (ejemplo 3.5.3) esto es:*



*Asociando a cada vértice de su diagrama de Dynkin con cada ciclo evanescente (denotados  $\delta_j$ ) de  $F$  se tiene:*



donde cada eje entre dos vértices significa que los ciclos asociados tienen índice de intersección 1 (o -1 por el comentario 3.5.1).

De este modo, eligiendo una orientación adecuada para los ciclos evanescentes se tiene que el índice de intersección de ciclos (3.32) coincide con las intersecciones entre vértices definidas por (3.31).

Notemos que, cuando la 1-homología de la fibra regular de  $F$ , es generada por los ciclos evanescentes,  $\delta_1(z), \dots, \delta_\mu(z)$ , considerados en la tabla (3.32), el diagrama de Dynkin de la partición definida por  $F$ , nos permite conocer explícitamente la monodromía de cualquier ciclo en  $H_1(F^{-1}(z))$  usando la fórmula de Picard-Lefschetz (3.28).

### 3.5.2. Buenas particiones definidas por polinomios

De la sección 3.2, es sabido que, dado un polinomio  $F \in \mathbb{C}[x, y]$ , la 1-homología de su fibra regular tiene la siguiente expresión:  $H_1(F^{-1}(z)) = \mathbb{Z}^{\mu(F)} \oplus A$ , con  $z$  valor regular,  $\mu(F)$  el número de Milnor total de  $F$  y  $A$  un grupo abeliano. Además, de la sección 3.4,  $A = \mathbb{Z}^{\rho(F)}$  con  $\rho(F)$  invariante topológico. La parte asociada a  $\mathbb{Z}^{\mu(F)}$  tiene una base de ciclos evanescentes, mientras que la parte asociada a  $A = \mathbb{Z}^{\rho(F)}$  consiste en ciclos que surgen de puntos críticos de  $F$  al infinito. Es decir, si  $\rho(F) = 0$  entonces  $H_1(F^{-1}(z))$  tiene una base de ciclos evanescentes (proposición 3.4.1).

**Observación 3.5.1.** *En particular, para  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  tal que  $F^{-1}(0)$  define una partición en  $\mathcal{D}$ , si todos los puntos críticos de  $F$  son reales y  $\rho(F) = 0$ , entonces los ciclos  $\delta_1(z), \dots, \delta_\mu(z)$ , asociados a los vértices del diagrama de Dynkin de  $F$ , forman una base de  $H_1(F^{-1}(z))$  y  $\mu$  es igual a  $\mu(F)$  (ver proposición 3.5.1).*

**Definición 3.5.5.** *Sea  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ , diremos que  $F$  define una buena partición de  $\mathcal{D}$  si satisface lo siguiente:*

1.  $F$  define una partición de  $\mathcal{D}$ , y cada región de esta partición no puede contener más de un punto crítico de  $F$ .
2. El diagrama de Dynkin de la partición definida por  $F$  es conexo.
3.  $\rho(F) = 0$ .
4. Todos los puntos críticos de  $F$  en  $\mathbb{C}^2$  son reales y no degenerados.

**Proposición 3.5.1.** *Si  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  define una buena partición de  $\mathcal{D}$ , entonces los ciclos evanescentes, asociados a los vértices del diagrama de Dynkin de  $F$ , forman una base de la 1-homología de la fibra regular de la complejificación de  $F$ .*

*Demostración.* Consecuencia de la proposición 3.4.1. □

**Ejemplo 3.5.5.** *Consideremos el polinomio*

$$F = ((x - y)^2 + 2(x + y) - 16)(x^2 + y - 4)y.$$

Como se ve en la gráfica del ejemplo 3.5.4,  $F$  tiene 8 puntos críticos de tipo silla, y 6 puntos críticos de tipo centro en  $\mathbb{R}^2$ . Veamos que son los únicos puntos críticos de  $F$  en  $\mathbb{C}^2$  y que son no degenerados. Para esto, calcularemos al dimensión del anillo  $\mathbb{C}[x, y]/\langle F_x, F_y \rangle$ . Usando el software “Singular” [37] vemos que

$$\dim \mathbb{C}[x, y]/\langle F_x, F_y \rangle = 14.$$

Por otro lado, por la expresión (3.13) de la subsección 3.2.2, tenemos que el número de Milnor de  $F$  en  $p_j$  se define como la dimensión del anillo local en  $p_j$  módulo el ideal generado por la derivadas parciales de  $F$ ;

$$\mu_{p_j}(F) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{p_j}(x, y)/\langle F_x, F_y \rangle,$$

es decir, como el índice de intersección de las curvas  $F_x = 0$  y  $F_y = 0$  en el punto  $p_j$ . De donde,  $\mu_{p_j}$  es un entero no negativo, y  $\mu_{p_j} = 0$  si y sólo si  $p_j$  no está en la intersección de  $F_x = 0$  con  $F_y = 0$  ([13], p.37); es decir, cada punto crítico tiene número de Milnor al menos 1. Además, se sabe que ([13], p.40 propiedad (9))

$$\sum_{p_j \in \mathbb{C}^2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{p_j}(x, y)/\langle F_x, F_y \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y]/\langle F_x, F_y \rangle.$$

Pero ya sabemos que  $F$  tiene 14 puntos críticos en  $\mathbb{R}^2$  (8 de tipo silla y 6 de tipo centro), y cada uno de estos puntos críticos tiene número de Milnor al menos 1. Luego, ya que la dimensión de  $\mathbb{C}[x, y]/\langle F_x, F_y \rangle$  es 14, entonces la única opción es que cada uno de estos puntos críticos tenga número de Milnor igual a 1. Y por la dimensión de  $\mathbb{C}[x, y]/\langle F_x, F_y \rangle$  no puede haber más puntos críticos de  $F$  en  $\mathbb{C}^2$ .

Por otro lado, en el ejemplo 3.4.2 vimos que  $\rho(F) = 0$ , y en el ejemplo 3.5.3 vimos que  $F$  define una partición de  $\mathcal{D}$  y que su diagrama de Dynkin es conexo. Por lo tanto,  $F$  define una buena partición en  $\mathcal{D}$ .

### 3.5.3. Familias especiales de ciclos para una partición

Asumamos que  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  define una buena partición de  $\mathcal{D}$ . Definiremos dos familias de ciclos en la fibra regular  $F^{-1}(z)$ , que servirán (en el capítulo 4) para definir una base para  $H_1(F^{-1}(z))$ . La utilidad de esa base es que permitirá conocer la órbita por monodromía de un ciclo evanescente, y mostrar, bajo ciertas condiciones en  $F$ , que  $H_1(F^{-1}(z))$  se puede expresar como la suma directa de la órbita por monodromía de un ciclo evanescente más el espacio de los ciclos que son invariantes bajo monodromía (caso (a) del capítulo 4). En el caso en que  $F$  tenga además una simetría se tendrá que agregar, además, la suma directa de otro espacio (caso (b) del capítulo 4).

A continuación precisaremos la notación que utilizaremos para los ciclos evanescentes:

Supongamos que  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  define una buena partición de  $\mathcal{D}$  con  $r$  ramas. Sea  $n$  igual al número de puntos críticos de  $F$  de tipo centro (reales), y  $k$  igual al número puntos críticos de  $F$  de tipo silla (reales).

Nota: Para evitar cualquier posible confusión recordamos que por puntos críticos de tipo centro o de tipo silla, siempre entenderemos que son centros y sillas en el sentido real.

Denotaremos por  $\delta_i(z)$ , con  $i = 1, \dots, n$ , a los ciclos evanescentes de  $F^{-1}(z)$  en puntos críticos de tipo centro (en niveles positivos o negativos), y denotaremos por  $\gamma_j(z)$ , con  $j = 1, \dots, k$ , a los ciclos evanescentes de  $F^{-1}(z)$  en puntos críticos de tipo silla. Por la proposición 3.5.1, los ciclos

$$\{\delta_i(z)\}_{i=1}^n \cup \{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k,$$

forman una base de  $H_1(F^{-1}(z))$ , donde  $n + k = \mu(F)$ .

Asumiremos siempre que los ciclos en  $F^{-1}(z)$  tienen la orientación establecida por A'Campo (apéndice A) de modo que el índice de intersección de ciclos evanescentes está dado como en la tabla (3.32)<sup>5</sup>.

Denotemos, además, por  $\gamma_i^\ell(z)$  a los ciclos en  $\{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k$  correspondientes a los puntos críticos (de tipo silla) sobre la rama  $\ell$  de la partición definida por  $F$  (i.e., una componente conexa de  $F$  en  $\mathbb{R}^2$ ); pero sin considerar a los ciclos que corresponden a puntos críticos obtenidos por autointersecciones de la rama  $\ell$ . Supondremos que los ciclos  $\gamma_i^\ell(z)$  están ordenados de un extremo al otro extremo en la rama  $\ell$ , y ese orden está representado por el subíndice  $\iota$ . Denotamos por  $r(\ell)$  al número de puntos críticos (de tipo silla) sobre la rama  $\ell$  de la partición definida por  $F$ .

Definamos los siguientes ciclos,

$$\tilde{\gamma}_i(z) = \text{Var}_0(\delta_i(z)) = \sum_{j=1}^k (\delta_i(z), \gamma_j(z)) \gamma_j(z) \quad (3.33)$$

y

$$\sigma_\ell(z) = \sum_{\iota=1}^{r(\ell)} (-1)^\iota \gamma_\iota^\ell(z) \quad (3.34)$$

**Ejemplo 3.5.6.** Consideremos el polinomio del ejemplo 3.5.4, i.e.,

$$F = ((x - y)^2 + 2(x + y) - 16)(x^2 + y - 4)y.$$

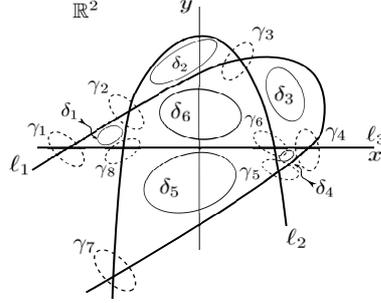
Denotaremos a los factores de  $F$  como

$$f_1 = (x - y)^2 + 2(x + y) - 16, \quad f_2 = x^2 + y - 4 \quad \text{y} \quad f_3 = y,$$

y denotaremos como  $\ell_1$  a la rama dada por los ceros del factor  $f_1$ ; del mismo modo denotamos  $\ell_2 = \{f_2 = 0\}$  y  $\ell_3 = \{f_3 = 0\}$ .

<sup>5</sup>Considérese el cambio de notación para los ciclos evanescentes que establecimos en esta subsección.

Utilizando la notación de ciclos  $\delta_i$  para ciclos evanescentes correspondientes a puntos críticos de tipo centro, y  $\gamma_j$  para ciclos evanescentes correspondientes a puntos críticos de tipo silla, se tiene:



Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1 &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_8, \\ \tilde{\gamma}_2 &= \gamma_2 + \gamma_3, \\ \tilde{\gamma}_3 &= \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_6, \\ \tilde{\gamma}_4 &= \gamma_4 + \gamma_6 + \gamma_5, \\ \tilde{\gamma}_5 &= \gamma_6 + \gamma_5 + \gamma_7 + \gamma_8, \\ \tilde{\gamma}_6 &= \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_6 + \gamma_8.\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}\sigma_{\ell_1} &= \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 + \gamma_5 - \gamma_7, \\ \sigma_{\ell_2} &= \gamma_7 - \gamma_8 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_6 - \gamma_5, \\ \sigma_{\ell_3} &= \gamma_1 - \gamma_8 + \gamma_6 - \gamma_4.\end{aligned}$$

En el capítulo 4 utilizaremos a la familia de ciclos  $\tilde{\gamma}_j(z)$  para describir a la órbita por monodromía de los ciclos evanescentes en la 1-homología de la fibra regular de  $F$ .

Por otro lado, los ciclos  $\sigma_\ell$  se distinguen por ser invariantes bajo monodromía. Esto es debido a que su índice de intersección con todos los ciclos  $\delta_i(z)$  y  $\gamma_j(z)$  es cero, como se prueba a continuación:

**Lema 3.5.1.** *Supongamos que  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  define una partición en  $\mathcal{D}$ . Entonces, los ciclos  $\sigma_\ell(z)$  son invariantes bajo monodromía.*

*Demostración.* Sea  $\{\delta_i(z)\}_{i=1}^n \cup \{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k$  una base de  $H_1(F^{-1}(z))$ , con la notación establecida arriba. Basta verificar que  $(\sigma_\ell(z), \delta_i(z)) = 0$  para toda  $i = 1, \dots, n$ , y  $(\sigma_\ell(z), \gamma_j(z)) = 0$  para toda  $j = 1, \dots, k$ .

Usaremos la tabla (3.32), donde  $\delta_{p+1}(z), \dots, \delta_{p+k}(z)$  denotan a los ciclos  $\gamma_j(z)$  con  $j = 1, \dots, k$ .

De la definición de  $\sigma_\ell(z)$ , claramente se tiene que  $(\sigma_\ell(z), \gamma_j(z)) = 0$  para toda  $j = 1, \dots, k$ , por la tabla (3.32).

Por otro lado, para los ciclos  $\delta_i(z)$ , si la rama  $\ell$  no contiene segmentos de  $\partial\overline{C}_i$ , donde  $C_i$  es la región en la partición que contiene a  $\delta_i(z)$ , entonces la tabla (3.32) nos dice que  $(\sigma_\ell(z), \delta_i(z)) = 0$ .

Supongamos ahora que  $\ell$  contiene segmentos de  $\partial\overline{C}_i$ . Denotemos por  $p_j$  a los puntos críticos de tipo silla sobre la rama  $\ell$ , ordenados de un extremo a otro de  $\ell$ , obtenidos por la intersección de  $\ell$  con ramas distintas. Entonces si  $p_j$  está contenido en  $\partial\overline{C}_i$ , por definición de región en una partición de  $\mathcal{D}$ , necesariamente uno de los puntos continuos a  $p_j$  en el orden de  $\ell$ , esto es  $p_{j+1}$  o bien  $p_{j-1}$ , debe de estar también en  $\partial\overline{C}_i$ . Luego, ya que  $\sigma_\ell(z)$  es la suma alternada de los ciclos  $\gamma_j(z)$  correspondientes a los puntos críticos  $p_j$ , y por la tabla (3.32) la intersección de  $\delta_i(z)$  con los ciclos  $\gamma_j(z)$  correspondientes a los puntos  $p_j \in \partial\overline{C}_i$  es 1, se tiene que  $(\sigma_\ell(z), \delta_i(z)) = 0$ .  $\square$

Más aún, tenemos que, si tomamos  $r-1$  ciclos  $\sigma_\ell(z)$  distintos, entonces éstos son linealmente independientes entre sí:

**Proposición 3.5.2.** *Supongamos que  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  define una partición de  $\mathcal{D}$ , con  $r > 1$  ramas. Entonces el conjunto  $\{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1}$  es linealmente independiente.*

*Demostración.* Supongamos que

$$\sum_{\ell=1}^{r-1} n_\ell \sigma_\ell(z) = 0, \quad (3.35)$$

con  $n_\ell \in \mathbb{Z}$  no todos cero.

Consideremos la rama  $r$  y el ciclo  $\sigma_r(z)$ . Por conexidad de la partición (propiedad (1) en la definición 3.5.1), la rama  $r$  debe intersecar al menos a alguna otra rama  $\ell$  de la partición. Supongamos que  $\nu \in \{1, \dots, r-1\}$  es una rama de la partición que interseca a la rama  $r$ . Denotemos por  $p_{r\nu}$  a un punto crítico de tipo silla en la intersección de  $r$  con  $\nu$ . Denotemos por  $\gamma_{r\nu}(z)$  al ciclo evanescente en  $p_{r\nu}$ .

Notemos que para cada  $\sigma_\ell(z) = \sum_{i=1}^{r(\ell)} (-1)^i \gamma_i^\ell(z)$  con  $\ell \neq r, \nu$ , se tiene que  $\gamma_i^\ell(z) \neq \gamma_{r\nu}(z)$  para toda  $i$ . Mientras que para  $\sigma_\nu(z) = \sum_{i=1}^{r(\nu)} (-1)^i \gamma_i^\nu(z)$ , se tiene que para algún  $\tau = 1, \dots, r(\nu)$ ,  $\gamma_\tau^\nu(z) = \gamma_{r\nu}(z)$ .

Expresemos la suma (3.35) en términos de los ciclos  $\gamma_i(z)$ , y despejemos el ciclo  $\gamma_{r\nu}$ , esto es:

$$n_\nu \gamma_{r\nu}(z) = \sum_{\ell \neq \nu} \sum_{i=1}^{r(\ell)} (-1)^i n_\ell \gamma_i^\ell(z), \quad (3.36)$$

donde el signo  $\pm$  depende la paridad del subíndice  $\tau$  tal que  $\gamma_\tau^\nu(z) = \gamma_{r\nu}(z)$ .

Por otro lado, por el teorema 3.2.3 el conjunto  $\{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k$  es linealmente independiente.

Como  $\gamma_i^\ell(z) \in \{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k$  para toda  $i$  y  $\ell$ , y  $\gamma_i^\ell(z) \neq \gamma_{r\nu}(z)$  para toda  $i$  con

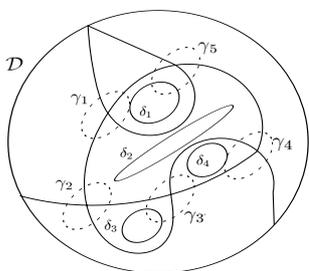
$\ell \neq \nu$ , entonces la expresión (3.36) implica que  $n_\nu = 0$ .

Después, repetimos el proceso anterior, pero tomando la rama  $\nu$  en vez de la rama  $r$ . Esto implicará que todos los coeficientes  $n_\ell$  de las ramas  $\ell$  que intersequen a  $\nu$  sean cero. Por conexidad, esto se puede repetir, hasta probar que todos los coeficientes  $n_\ell$  son cero.  $\square$

A continuación mostraremos a que esta familia de ciclos  $\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^n$  es linealmente independiente:

Observemos primero el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.5.7.** Supongamos que  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  define la siguiente partición en  $\mathcal{D}$



donde

$$\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 + \gamma_5, \tilde{\gamma}_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5, \tilde{\gamma}_3 = \gamma_2 + \gamma_3, \tilde{\gamma}_4 = \gamma_3 + \gamma_4. \quad (3.37)$$

Supongamos que

$$m_1 \tilde{\gamma}_1 + m_2 \tilde{\gamma}_2 + m_3 \tilde{\gamma}_3 + m_4 \tilde{\gamma}_4 = 0 \text{ con } m_i \in \mathbb{Z}.$$

Sustituyamos, en la expresión anterior, a cada  $\tilde{\gamma}_i$  por su suma en ciclos  $\gamma_i$  como en (3.37); esto es,

$$m_1(\gamma_1 + \gamma_5) + m_2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5) + m_3(\gamma_2 + \gamma_3) + m_4(\gamma_3 + \gamma_4) = 0,$$

ahora agrupamos los sumandos de cada  $\gamma_j$ ; esto es,

$$(m_1 + m_2)\gamma_1 + (m_2 + m_3)\gamma_2 + (m_2 + m_3 + m_4)\gamma_3 + (m_2 + m_4)\gamma_4 + (m_1 + m_2)\gamma_5 = 0.$$

Como los ciclos  $\gamma_j$  son linealmente independientes, la expresión anterior implica que

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= 0 \\ m_2 + m_3 &= 0 \\ m_2 + m_3 + m_4 &= 0 \\ m_2 + m_4 &= 0 \end{aligned}, \quad (3.38)$$

de modo que, los ciclos  $\tilde{\gamma}_j$  son linealmente independientes, si y sólo si, para cualesquiera coeficientes  $m_i$  el sistema anterior tiene una única solución dada por  $m_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  (que en este caso no es muy difícil ver que se cumple).

Ahora haremos una abstracción del problema (propuesta por D. Novikov). Para esto nos olvidaremos de los ciclos y, en vez de ellos, pensaremos en las regiones de la partición:

Sea  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  tal que define una partición en  $\mathcal{D}$ . Denotemos por  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{D}$  a la inmersión que define a la partición definida por  $F$ , donde  $J = \bigcup_{j=1}^r [0, 1]$  con  $r$  igual al número de ramas de la partición.

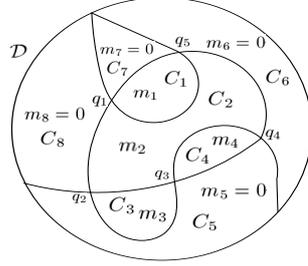
Denotaremos como  $C_i$  a las componentes conexas de  $\mathcal{D} - \alpha(J)$ ; a las componentes  $C_i$  tales que su cerradura  $\overline{C}_i$  no interseque a  $\partial\mathcal{D}$  las llamamos como en la definición 3.5.1, *regiones* (acotadas), y a las componentes  $C_i$  cuya cerradura sí interseque a  $\partial\mathcal{D}$  las llamaremos *regiones no acotadas*. Notemos que hay tantas regiones (acotadas) como puntos críticos de  $F$  de tipo centro (reales). Denotamos como  $n$  al número total de puntos críticos de  $F$  de tipo centro (reales).

A cada región de  $\mathcal{D} - \alpha(J)$  le asociaremos un coeficiente  $m_i \in \mathbb{Z}$ , a las regiones no acotadas les asociaremos el coeficiente 0. En el ejemplo anterior denotamos por  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  a las regiones (acotadas), a cada una le asociamos un coeficiente  $m_1, m_2, m_3$  y  $m_4$  respectivamente; y denotamos como  $C_5, C_6, C_7$ , y  $C_8$  a las regiones no acotadas, a éstas les asociamos los coeficientes  $m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 0$ .

**Definición 3.5.6.** Sea  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{D}$ , donde  $J = \bigcup_{i=1}^r [0, 1]$ , una inmersión que satisface todas las condiciones de la definición de partición 3.5.1 salvo la condición de conexidad para  $\alpha(J)$ . Denotamos como  $C_i$  a las componentes conexas de  $\mathcal{D} - \alpha(J)$ . A la asociación de componentes  $C_i$  con coeficientes enteros  $m_i$ , tal que las componentes cuya cerradura interseque a  $\partial\mathcal{D}$  tengan coeficiente cero, la llamaremos *partición en coeficientes  $m_i$* .

**Comentario 3.5.2.** Para las particiones en coeficientes no pedimos la condición de conexidad para la imagen de la inmersión,  $\alpha(J)$ , por lo que se puede tener una partición en coeficientes tal que todas sus regiones sean no acotadas (las cuales tienen coeficiente cero).

Para el ejemplo anterior, su *partición en coeficientes  $m_i$*  es la siguiente:



Denotaremos como  $q_j$  al punto crítico de  $F$  de tipo silla asociado al ciclo evanescente  $\gamma_j$ , con  $j = 1, \dots, k$ , donde  $k$  es el número total de puntos críticos de  $F$  de tipo silla (reales). A estos puntos  $q_j$  también los llamaremos puntos de cruce o *puntos dobles* en el caso de tener una *partición en coeficientes* que no esté dada por los ceros de un polinomio.

A cada  $q_j$  le asociamos la suma de los coeficientes  $m_j$  tales que  $q_j \in \overline{C}_i$ ; esto es,

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^j(q_j) m_i, \quad \text{donde } \delta_i^j(q_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } q_j \in \overline{C}_i \\ 0, & \text{si no} \end{cases},$$

con esto formamos un sistema lineal de ecuaciones dado por

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^j(q_j) m_i = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.39)$$

**Definición 3.5.7.** Al sistema lineal (3.39) le llamaremos el sistema lineal de coeficientes  $m_i$ , asociado a la *partición en coeficientes*  $m_i$ , con regiones (acotadas y no acotadas)  $C_j$  y puntos de cruce  $q_j$ .

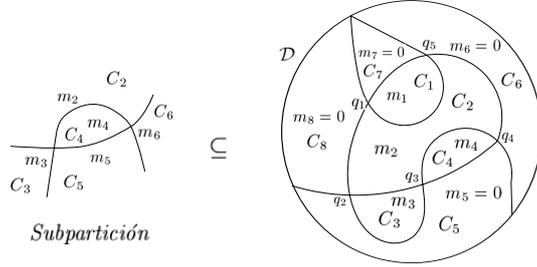
Por construcción (como en el ejemplo 3.5.7) tenemos que

$$\sum_{i=1}^n m_i \tilde{\gamma}_i = 0 \iff \sum_{i=1}^n \delta_i^j(q_j) m_i = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (3.40)$$

por lo que, los ciclos  $\tilde{\gamma}_i$  son linealmente independientes, si y sólo si, para cualesquiera coeficientes  $m_i$ , el *sistema lineal de coeficientes*  $m_i$  tiene una única solución dada por  $m_i = 0$  para toda  $i$ .

Ahora trabajaremos con *particiones en coeficientes*  $m_i$ . Veremos que, haciendo movimientos en las curvas que limitan a las regiones, podemos obtener nuevas particiones en nuevos coeficientes  $m'_i$ . Mostraremos que las soluciones del *sistemas lineal de coeficientes*  $m_i$  pueden expresarse como combinaciones lineales de las soluciones de los *sistemas lineales de coeficientes*  $m'_i$ . Para esto haremos las siguientes precisiones:

A particiones en coeficientes contenidas en particiones más grandes las llamaremos *subparticiones*. Por ejemplo,



Nótese el sistema lineal de coeficientes, asociado a una subpartición, está contenido en el sistema lineal de coeficientes de la partición más grande. En el ejemplo anterior, el sistema de la subpartición es

$$\begin{aligned} m_2 + m_3 + m_4 + m_5 &= 0 \\ m_2 + m_4 + m_5 + m_6 &= 0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

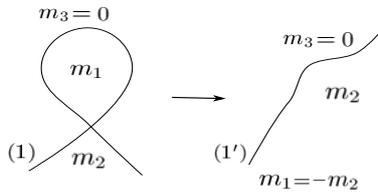
mientras que el sistema lineal de la partición grande es

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_7 + m_8 &= 0 \\ m_2 + m_3 + m_5 + m_8 &= 0 \\ m_2 + m_3 + m_4 + m_5 &= 0, \\ m_2 + m_4 + m_5 + m_6 &= 0 \\ m_1 + m_2 + m_6 + m_7 &= 0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

donde  $m_5 = \dots = m_8 = 0$ . El sistema (3.41) corresponde a la tercera y cuarta ecuación del sistema (3.42).

Los siguientes movimientos los realizaremos en *subparticiones*. Éstos nos servirán para expresar, en nuevas subparticiones, las relaciones de los coeficientes correspondientes a los sistemas de lineales de las subparticiones iniciales:

Movimiento (I).



**Comentario 3.5.3.** Notemos que en la subpartición (1), la región con coeficiente  $m_3$  no puede ser acotada, pues como región acotada no satisface la propiedad de intersección entre la cerradura de las regiones (acotadas), de la definición de partición (propiedad (3) de la definición 3.5.1). Por ello, la región de coeficiente  $m_3$  tiene que ser no acotada y el coeficiente  $m_3$  tiene que ser cero.

El sistema lineal asociado a la subpartición (1) es,

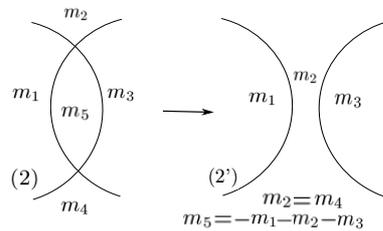
$$m_1 + m_2 = 0,$$

de donde

$$m_1 = -m_2. \tag{3.43}$$

El movimiento (I) cambia a la subpartición (1) por la subpartición (1'), conservando la relación (3.43).

Movimiento (II).



El sistema lineal de coeficientes asociado a la subpartición (2) es:

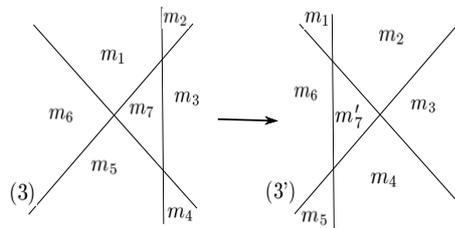
$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 + m_5 &= 0 \\ m_1 + m_4 + m_3 + m_5 &= 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

De este sistema se tiene la siguiente relación en los coeficientes:

$$m_4 = m_2 \text{ y } m_5 = -m_1 - m_2 - m_3. \tag{3.45}$$

El movimiento (II) nos cambia la subpartición (2) por la subpartición (2') conservando la relación (3.45). Es decir, los coeficientes  $m_4$  y  $m_5$ , que se pierden al cambiar (2) por (2'), se pueden expresar como combinaciones lineales de los coeficientes  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  de la subpartición (2').

Movimiento (III).



El movimiento (III) cambia la subpartición (3) por la subpartición (3').

El sistema lineal asociado a la subpartición (3) es:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 + m_7 &= 0 \\ m_3 + m_4 + m_5 + m_7 &= 0 \\ m_5 + m_6 + m_1 + m_7 &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Mientras que el sistema lineal de coeficientes de la subpartición (3') es:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_6 + m_7' &= 0 \\ m_3 + m_4 + m_2 + m_7' &= 0 \\ m_5 + m_6 + m_4 + m_7' &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Veamos que estos dos sistemas lineales son equivalentes, en el sentido de que conociendo las soluciones de uno se conoce las soluciones del otro:

Consideremos la primer ecuación del sistema (3.46),

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_7 = 0. \quad (3.48)$$

De esta ecuación se tiene que  $m_7 = -m_1 - m_2 - m_3$ .

La ecuación (3.48) es lo mismo que la siguiente ecuación,

$$m_1 + m_2 + m_6 + (-m_6 + m_3 + m_7) = 0.$$

Sustituyamos  $m_7$  por  $-m_1 - m_2 - m_3$ , esto es

$$m_1 + m_2 + m_6 + (-m_6 + m_3 - m_1 - m_2 - m_3) = 0,$$

que es lo mismo que

$$m_1 + m_2 + m_6 + (-m_6 - m_1 - m_2) = 0.$$

Consideraremos una nueva variable  $m_7'$ , y diremos que  $m_7' = -m_6 - m_1 - m_2$ . Así la ecuación (3.48) es equivalente a la ecuación

$$m_1 + m_2 + m_6 + m_7' = 0.$$

De manera análogamente podemos verificar que la segunda y tercera ecuación de (3.46) son equivalentes a la segunda y tercera ecuación de (3.47) respectivamente. Por lo que los sistemas (3.46) y (3.47) son equivalentes, donde  $m_7$  y  $m_7'$  son combinaciones lineales de los coeficientes  $m_1, \dots, m_6$ .

Así, el movimiento (III) nos cambia la subpartición (3) por la subpartición (3'), donde los sistemas lineales de coeficientes de ambas son equivalentes.

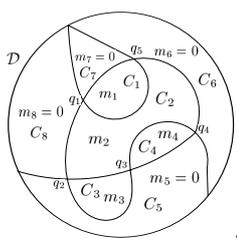
**Comentario 3.5.4.** *Estos tres movimientos se conocen como los movimientos de Reidemeister en la teoría de nudos [31].*

Estos movimientos nos dan una expresión geométrica de la solución de los sistemas lineales en las subparticiones; de manera que los coeficientes que se van perdiendo al pasar de una subpartición a otra, por medio de estos movimientos, se expresan como combinaciones lineales de los coeficientes de la nueva subpartición (éstas son las relaciones en los coeficientes que se van guardando en cada movimiento).

Notemos que cada partición en coeficientes de  $\mathcal{D}$  está conformada por subparticiones. Por lo que, el sistema lineal de una partición en coeficientes de  $\mathcal{D}$  es la unión de los sistemas lineales en coeficientes de las subparticiones. Así, se puede resolver el sistema lineal de una partición de  $\mathcal{D}$ , resolviendo los sistemas lineales de las subparticiones usando estos movimientos.

**Ejemplo 3.5.8.** Usaremos los movimientos (I), (II) y (III) para resolver el sistema lineal de coeficientes del ejemplo (3.5.7).

La partición en coeficientes del ejemplo (3.5.7) es:

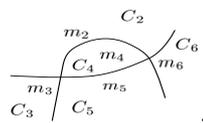


donde su sistema lineal de coeficientes está dado por

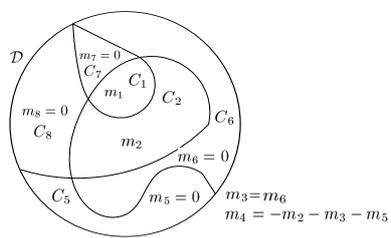
$$\begin{aligned}
 m_1 + m_2 + m_7 + m_8 &= 0 \\
 m_2 + m_3 + m_5 + m_8 &= 0 \\
 m_2 + m_3 + m_4 + m_5 &= 0, \\
 m_2 + m_4 + m_5 + m_6 &= 0 \\
 m_1 + m_2 + m_6 + m_7 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

con  $m_5 = \dots = m_8 = 0$ .

Apliquemos el movimiento (II) a la subpartición

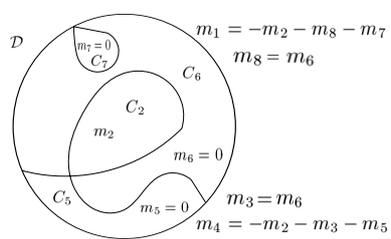


esto es,



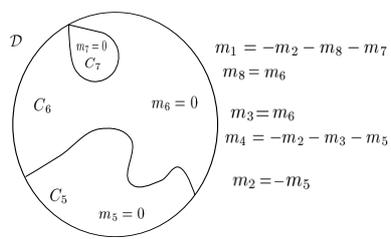
conservando la relación:  $m_3 = m_6$  y  $m_4 = -m_2 - m_3 - m_5$ .

Ahora, aplicamos el movimiento (II) a la subpartición entre las componentes  $C_8, C_7, C_2$  y  $C_6$ , esto es



con la relación:  $m_8 = m_6$  y  $m_1 = -m_2 - m_8 - m_7$ .

Finalmente, aplicamos el movimiento (I) a la subpartición que contiene a la componente  $C_2$ ; esto es,



con la relación:  $m_2 = -m_5$ .

Cada vez que se pasa de una subpartición a otra por medio de estos movimientos, las relaciones que vamos conservando nos dicen que los coeficientes de primeras subparticiones quedan expresados como combinación lineal de los coeficientes de las nuevas subparticiones.

Como al final llegamos a una partición de  $\mathcal{D}$  que tiene sólo regiones no acotadas (las cuales por definición tienen siempre coeficiente 0), entonces sólo nos quedan subparticiones con coeficientes iguales a cero. De este modo, todos los coeficientes anteriores son combinación lineal de coeficientes iguales a 0. Por lo

que, la única solución del sistema lineal de coeficientes de la partición (3.5.7) es  $m_i = 0$  para toda  $i = 1, \dots, 8$ .

Nótese que por la equivalencia (3.40); i.e.,

$$\sum_{i=1}^n m_i \tilde{\gamma}_i = 0 \iff \sum_{i=1}^n \delta_i^j(q_j) m_i = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

entre la combinación lineal de los ciclos  $\tilde{\gamma}_j$  con coeficientes  $m_i \in \mathbb{Z}$  y el sistema lineal en coeficientes  $m_i$ , la solución del ejemplo anterior implica que los ciclos  $\{\tilde{\gamma}_j\}_{j=1}^4$ , de la partición del ejemplo (3.5.7), son linealmente independientes.

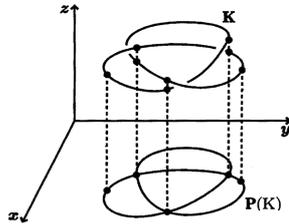
De este modo, para probar que los ciclos  $\{\tilde{\gamma}_j\}_{j=1}^k$  de una partición son linealmente independientes, hay que probar que para cualesquiera coeficientes  $m_i \in \mathbb{Z}$  el sistema lineal en coeficientes  $m_i$ ,  $\sum_{i=1}^n \delta_i^j(q_j) m_i = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ , de la partición tiene una única solución dada por  $m_i = 0$  para toda  $i$ .

Por las propiedades de los movimientos (I), (II) y (III), al llevar una partición a otra, por medio de estos movimientos, todos los coeficientes iniciales se pueden expresar como combinación lineal de los coeficientes finales. Así, para probar que  $\sum_{i=1}^n \delta_i^j(q_j) m_i = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$  tiene una única solución dada por  $m_i = 0$  para toda  $i$ , basta probar que la partición inicial puede ser llevada a una partición que sólo tenga regiones no acotadas, y de este modo que sólo tenga coeficientes cero.

Para probar esto, usaremos un resultado de teoría de nudos que nos permita mostrar que, usando los movimientos (I), (II) y (III), siempre podemos separar a todas las ramas de cualquier partición en coeficientes, y obtener una partición que únicamente tenga regiones no acotadas.

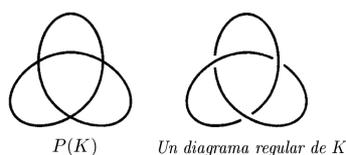
Primero precisaremos un poco el lenguaje de teoría de nudos [31]:

Un nudo  $K$  puede ser pensado como una curva enredada en un espacio de tres dimensiones con coordenadas  $(x, y, z)$ . Podemos considerar la proyección  $P$  de esta curva en el plano  $xy$ ;  $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ . Genéricamente, la proyección  $P(K)$  de  $K$  es una curva cerrada en el plano  $xy$  con autointersecciones.

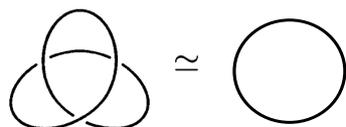


El problema de considerar la proyección  $P(K)$  de un nudo  $K$ , es que se pierde la información de si el nudo  $K$  pasa por arriba o por abajo de sí mismo en cada

punto de autointersección. Para recuperar esa información se define lo que se conoce como un *diagrama regular de  $K$*  ([31], p.27), que es modificar el dibujo de la proyección  $P(K)$ , haciendo cortes para indicar si el nudo pasa por arriba o por debajo de sí mismo.



Un nudo puede tener varios diagramas regulares. Se dice que dos diagramas son equivalentes si se puede llevar uno en el otro usando los movimientos de Reidemeister (los movimientos (I), (II) y (III)) (definición 4.1.1 [31], p.50). Además se tiene que dos nudos son isotópicos si y sólo si sus diagramas son equivalentes (teorema 4.1.1, [31], p.50). Por ejemplo, el siguiente dibujo muestra dos diagramas regulares equivalentes del nudo trivial:

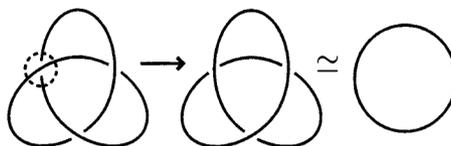


El resultado que usaremos es el siguiente:

**Proposición 3.5.3.** ([31], Prop. 4.4.1, p. 62) *Se puede cambiar un diagrama regular de cualquier nudo (o enlace<sup>6</sup>) arbitrario, en el diagrama del nudo (o enlace) trivial, cambiando los cruces tantas veces como sea necesario y usando los movimientos de Reidemeister.*

Es decir, que siempre que no haya obstrucciones en los movimientos de Reidemeister, cualquier nudo se puede llevar al nudo trivial.

Por ejemplo, en el siguiente dibujo cambiamos uno de los cruces del nudo  $K$  (que vimos arriba), de modo que obtenemos un diagrama del nudo trivial. Además, aplicando el movimiento (I) de Reidemeister, este diagrama se puede llevar en el diagrama del nudo trivial donde no hay cruces.



<sup>6</sup>Unión de nudos.

Esto significa que cambiando los cruces en el diagrama de un nudo se puede obtener un nudo trivial, aunque por supuesto no de manera isotópica, i.e., esto no significa que todos los nudos sean triviales. A este tipo de operación, de cambiar los cruces de un nudo, se les conoce como *operaciones de desanudar* (*unknotting operations*). Por otro lado, la proposición también nos dice que, una vez que cambiamos apropiadamente los cruces para obtener un diagrama del nudo trivial, entonces usando los movimientos de Reidemeister es posible llevar ese diagrama en un diagrama sin cruces, que es lo que en la proposición llaman *el diagrama del nudo (enlace) trivial*.

**Proposición 3.5.4.** *Dada una partición en coeficientes  $m_i$  de  $\mathcal{D}$ , su sistema lineal de coeficientes  $\sum_{i=1}^n \delta_i^j(q_j)m_i = 0$  tiene una única solución dada por  $m_i = 0$  para toda  $i$ .*

*Demostración.* Consideremos una partición  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{D}$ , donde  $J = \bigcup_{j=1}^r [0, 1]$ , y consideraremos su *partición en coeficientes  $m_i$*  (definición 3.5.6), pensemos a las ramas (cada imagen de  $[0, 1]$  bajo  $\alpha$ ) como segmentos de nudos.

Para resolver el sistema lineal de coeficientes  $m_i$ ,  $\sum_{i=1}^n \delta_i^j(q_j)m_i = 0$ , asociado a esta partición  $\alpha$ , podemos aplicar sin restricción todos los movimientos de Reidemeister ((I), (II) y (III)), de modo que los coeficientes de la partición están en terminos de los coeficientes de las particiones que se obtienen después de hacer esos movimientos.

Que podamos aplicar siempre los movimientos de Reidemeister significa que no hay obstrucciones en el movimiento de las ramas. Por lo que, en particular podemos llevar a la partición inicial en una *partición en coeficientes*<sup>7</sup> donde todas las ramas no se intersecan entre sí, y todas las regiones sean no acotadas.

Como las regiones no acotadas tienen por definición de *partición en coeficientes* coeficientes cero, y todos los coeficientes  $m_i$  iniciales son combinación lineal de los coeficientes de esta nueva *partición en coeficientes*, entonces todos los coeficientes  $m_i$  del sistema lineal  $\sum_{i=1}^n \delta_i^j(q_j)m_i = 0$  tienen que ser cero.  $\square$

**Proposición 3.5.5.** *Sea  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  tal que define una partición de  $\mathcal{D}$ . Entonces el conjunto  $\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^n$  es linealmente independiente.*

*Demostración.* Consecuencia de la equivalencia (3.40) y la proposición anterior.  $\square$

### 3.5.4. Particiones con una simetría

En esta subsección consideraremos el caso en que el polinomio  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ , que define una buena partición de  $\mathcal{D}$ , tiene una simetría, y estableceremos la notación que usaremos para los ciclos en este caso.

Sea  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , la simetría algebraica dada por  $S(x, y) = (-x, y)$ . Supongamos que  $F$  es invariante bajo  $S$ ,  $F(S) = F$ . Denotaremos por  $p_i$  a los

<sup>7</sup>Las particiones en coeficientes no necesariamente tienen que ser conexas, a diferencia de las particiones de la definición 3.5.1.

puntos críticos de tipo centro sobre el eje  $y$ , i.e.,  $p_i = (0, y_i)$ ; y denotaremos por  $p_{-i}$  y  $p_{+i}$  a puntos críticos de tipo centro tales que  $S(p_{-i}) = p_{+i}$ , donde  $p_{-i}$  está contenido en el semiplano real  $\{x < 0\}$  y  $p_{+i}$  está contenido en el semiplano real  $\{x > 0\}$ . Denotaremos por  $\delta_i(z)$ ,  $\delta_{-i}(z)$  y  $\delta_{+i}(z)$  a las familias continuas de órbitas periódicas, de la foliación  $dF = 0$ , correspondientes a los puntos críticos  $p_i$ ,  $p_{-i}$  y  $p_{+i}$  respectivamente. Ya que  $F(p_{-i}) = F(p_{+i})$  pues  $F(S) = F$ , denotaremos al valor crítico de  $p_{-i}$  y  $p_{+i}$  como  $z_{\pm i}$ .

Denotemos como  $s$  al número de puntos críticos  $p_{-i}$  en el semiplano  $\{x < 0\}$ . Por la simetría, éste también es el número de puntos críticos  $p_{+i}$  en el plano  $\{x > 0\}$ .

Por otro lado, estamos denotando como  $n$  al número total de puntos críticos de  $F$  de tipo centro (reales). De este modo, tenemos  $n - 2s$  puntos críticos  $p_i$  sobre el eje  $y$ . Indexaremos estos puntos críticos de la siguiente manera:

$$\{p_{-i}\}_{i=1}^s, \quad \{p_{+i}\}_{i=1}^s \text{ y } \{p_i\}_{i=2s+1}^n.$$

Del mismo modo indexamos a los ciclos evanescentes  $\delta_i(z)$ ,  $\delta_{-i}(z)$  y  $\delta_{+i}(z)$  correspondientes a los puntos críticos  $p_{-i}$ ,  $p_{+i}$  y  $p_i$ , respectivamente. Esto es;

$$\{\delta_{-i}(z)\}_{i=1}^s, \quad \{\delta_{+i}(z)\}_{i=1}^s \text{ y } \{\delta_i(z)\}_{i=2s+1}^n. \quad (3.50)$$

Consideraremos la complejificación de  $S$ ;  $S : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Como  $F$  es invariante bajo  $S$ , se tiene que  $S : F^{-1}(z) \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow F^{-1}(z) \subset \mathbb{C}^2$  está bien definida. Por lo que podemos aplicar el funtor de homología  $H_1(-)$  a la función  $S$  restringida a la fibra regular  $F^{-1}(z)$ . De este modo, obtenemos el homomorfismo  $S_* = H_1(S)$  entre los grupo de 1-homología;

$$S_* : H_1(F^{-1}(z)) \rightarrow H_1(F^{-1}(z)),$$

dado por  $S_*(\gamma) = S(\gamma)$ , donde  $\gamma$  y  $S(\gamma)$  representan clases en  $H_1(F^{-1}(z))$ .

Análogamente, usando el funtor de cohomología  $H_{dR}^1(-)$ , obtenemos el homomorfismo  $S^* = H_{dR}^1(S)$  entre los grupos de 1-cohomología de  $F^{-1}(z)$ ;

$$S^* : H_{dR}^1(F^{-1}(z)) \rightarrow H_{dR}^1(F^{-1}(z)),$$

donde para cada 1-form  $\omega \in H_{dR}^1(F^{-1}(z))$ , la imagen de  $\omega$  bajo  $S^*$ , es una 1-forma  $S^*(\omega)$  definida como  $S^*(\omega)_{(x,y)}(v) = \omega_{S(x,y)}(D_{(x,y)}S(v))$ ; con  $(x, y) \in F^{-1}(z)$ , y  $v$  vector tangente a  $F^{-1}(z)$  en el punto  $(x, y)$ , donde  $D_{(x,y)}S$  es la derivada de  $S$  en el puntos  $(x, y)$ .

Notemos que, por el teorema de cambio de variable se tiene que,

$$\int_{S_*(\gamma(z))} \omega = \int_{\gamma(z)} S^*(\omega). \quad (3.51)$$

Por otro lado, la orientación de A'Campo (apéndice A) implica que los ciclos evanescentes contenidos en  $\mathbb{R}^2$ , respecto a puntos críticos de tipo centro

en niveles positivos, tienen orientación positiva (en dirección contraria a las manecillas del reloj), mientras que los ciclos evanescentes (en  $\mathbb{R}^2$ ) respecto a puntos críticos de tipo centro en niveles negativos tienen orientación negativa (en dirección de las manecillas del reloj), o viceversa para ambos. Por lo que, todos los ciclos evanescentes  $\delta_i(z)$ ,  $\delta_{-i}(z)$  o  $\delta_{+i}(z)$  (para valores  $z$  tal que los ciclos estén contenidos en  $\mathbb{R}^2$ ) con  $F(p_i) > 0$ ,  $F(p_{-i}) > 0$  y  $F(p_{+i}) > 0$ , tienen la misma orientación, que podemos tomar como positiva (respecto a la orientación canónica de  $\mathbb{R}^2$ ), y todos los ciclos evanescentes  $\delta_i(z)$ ,  $\delta_{-i}(z)$  o  $\delta_{+i}(z)$  (para valores  $z$  tal que los ciclos estén contenidos en  $\mathbb{R}^2$ ) con  $F(p_i) < 0$ ,  $F(p_{-i}) < 0$  y  $F(p_{+i}) < 0$ , tienen la misma orientación, que es negativa si para centros en niveles positivos fijamos la orientación positiva (ver apéndice A).

Ya que  $S$  es una reflexión del plano real respecto al eje  $y$ , entonces cuando  $z$  es un valor regular tal que el ciclo  $\delta_i(z)$  (respecto a un punto crítico de tipo centro sobre el eje  $y$ ) está en  $\mathbb{R}^2$ , se tiene que

$$S_*(\delta_i(z)) = -\delta_i(z), \quad (3.52)$$

Por otro lado, notemos que los ciclos  $\delta_{-i}(z)$  y  $\delta_{+i}(z)$ , para valores en  $z$  tal que  $\delta_{-i}(z), \delta_{+i}(z) \subset \mathbb{R}^2$ , tienen la misma orientación, ya que son ciclos evanescentes en el mismo valor crítico  $F(p_{-i}) = F(p_{+i}) = z_{\pm i}$ . Además, debido a la simetría de  $F$ , cuando los ciclos  $\delta_{-i}(z)$  y  $\delta_{+i}(z)$  están en  $\mathbb{R}^2$ , es claro que éstos son simétricos respecto al eje  $y$ , i.e., como conjuntos uno es la imagen del otro bajo  $S$ . Luego, como  $S$  invierte la orientación, se tiene que

$$S_*(\delta_{-i}(z)) = -\delta_{+i}(z). \quad (3.53)$$

Denotaremos como  $\tilde{\gamma}_{-i}(z)$  al ciclo  $Var_0(\delta_{-i}(z))$ ,  $\tilde{\gamma}_{+i}(z)$  al ciclo  $Var_0(\delta_{+i}(z))$  y  $\tilde{\gamma}_i(z)$  al ciclo  $Var_0(\delta_i(z))$ , y los indexamos del mismo modo que la expresión (3.50):

$$\{\tilde{\gamma}_{-i}(z)\}_{i=1}^s, \quad \{\tilde{\gamma}_{+i}(z)\}_{i=1}^s \text{ y } \{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=2s+1}^n. \quad (3.54)$$

Notemos que la proposición 3.5.5 no depende de los valores críticos de  $F$ , en particular también es válida para el caso con simetrías. Por lo que, los ciclos en el conjunto (3.54) son linealmente independientes.

Los ciclos  $\sigma_\ell(z)$  se definen de la misma manera que la expresión (3.34) de la subsección anterior.

### 3.6. Ciclos residuales

Denotaremos por  $\langle \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle$  al subespacio en la 1-homología  $H_1(F^{-1}(z))$  generado por las combinaciones lineales de los ciclos  $\{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1}$ , los cuales son linealmente independientes por la proposición 3.5.2.

Por el lema 3.5.1, el subespacio  $\langle \{\sigma_\ell\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle$  en la 1-homología de la fibra regular  $F^{-1}(z)$ , se distingue por ser invariante por monodromía. Además la demostración es válida para cualquier partición dada por cualquier polinomio. En particular, el lema 3.5.1 también es válido en el caso en que la partición de  $\mathcal{D}$

esté definida por un polinomio  $F$  con una simetría. De este modo, en general se tiene que  $\mathcal{O}rb(\sigma) = \langle \{\sigma\} \rangle$ , para todo  $\sigma \in \langle \{\sigma_\ell\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle$ .

**Definición 3.6.1.** Denotaremos como  $V_\infty$  al subespacio en  $H_1(F^{-1}(z))$  generado por los ciclos invariantes bajo monodromía, i.e.,

$$V_\infty = \langle \{\sigma(z) \in H_1(F^{-1}(z)) : (\sigma(z), \gamma(z)) = 0 \quad \forall \gamma(z) \in H_1(F^{-1}(z))\} \rangle.$$

A los elementos de  $V_\infty$  los llamaremos ciclos residuales.

$$\text{Así, } \langle \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle \subseteq V_\infty.$$

### 3.6.1. Número de ramas en puntos al infinito

En esta subsección daremos una descripción de los ciclos  $V_\infty$ , en términos de los puntos en que la compactificación proyectiva de las superficies de nivel de  $F$  intersectan a la línea al infinito, y veremos que, bajo condiciones en la multiplicidad de los factores lineales de la parte principal homogénea de  $F$ , el espacio  $V_\infty$  coincide con el subespacio  $\langle \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle$ , generado por los ciclos  $\sigma_\ell(z)$  definidos en 3.34.

Dado  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  consideraremos su complejificación, que también denotamos como  $F$ . Para cualquier valor complejo  $c \in \mathbb{C}$  denotaremos como  $L_c$  a la superficie  $F^{-1}(c) \subset \mathbb{C}^2$ , contenida en  $\mathbb{C}^2$ , y denotaremos como  $\bar{L}_c$  a la compactificación proyectiva de  $L_c$  contenida en  $\mathbb{CP}^2$ ;  $\bar{L}_c \subset \mathbb{CP}^2$ . Denotaremos también como  $L_\infty$  a la línea al infinito.

Por el teorema de Bézout de curvas algebraicas [13], es sabido que  $\bar{L}_c$  interseca a  $L_\infty$  en un número finito de puntos. De este modo, la superficie  $L_c$  es igual a la superficie  $\bar{L}_c$  menos los puntos en que interseca a la línea al infinito  $L_\infty$ ;  $L_c = \bar{L}_c \setminus \bar{L}_c \cap L_\infty$ .

Llamaremos a los puntos en  $\bar{L}_c \cap L_\infty$  *puntos de indeterminación* de  $F$ .

Notemos que, al quitar cualquier punto de indeterminación en la superficie  $\bar{L}_c$  se produce uno o varios (pero una cantidad finita) “hoyos” en la superficie  $L_c$ . Cada uno de estos “hoyos”, a su vez, está asociado naturalmente con un ciclo (contenido en la superficie  $L_c$ ) que lo rodea. No es difícil ver que estos ciclos que rodean a los “hoyos” en la superficie  $L_c$ , tienen intersección cero con todos los ciclos en la 1-homología de  $L_c$ . Por lo que estos ciclos son invariantes bajo monodromía, y están contenido en el espacio  $V_\infty$ .

En lo que sigue estudiaremos las condiciones para conocer el número de “hoyos” que produce un punto de indeterminación de  $F$ :

Notemos que para cualquier polinomio  $F$  en  $\mathbb{C}^2$ , con coeficientes reales o complejos, se tiene que la intersección de  $L_c$  con la línea al infinito  $L_\infty$ , está dada por la intersección de los ceros de su parte principal homogénea con la línea al infinito:

Escribamos  $F$  como suma de polinomios homogéneos,

$$F = F_d + F_{d-1} + \cdots + F_1 + F_0,$$

donde  $F_j$  es un polinomio homogéneo de grado  $j$ . A  $F_d \neq 0$  se le conoce como la *parte principal homogénea de  $F$* .

Consideremos el cambio de coordenadas  $(x_1, y_1) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$  de  $\mathbb{CP}^2$ , donde  $\{x_1 = 0\}$  representa a la línea al infinito  $L_\infty$ . Expresemos  $F$  en estas coordenadas, esto es

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right) &= F_d\left(\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right) + F_{d-1}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right) + \cdots + F_1\left(\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right) + F_0 \\ &= \frac{1}{x_1^d} F_d(1, y_1) + \frac{1}{x_1^{d-1}} F_{d-1}(1, y_1) + \cdots + \frac{1}{x_1} F_1(1, y_1) + F_0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Multiplicando la expresión anterior por  $x_1^d$  obtenemos el polinomio equivalente a  $F$  en coordenadas  $(x_1, y_1)$ . Denotaremos a este polinomio como  $\hat{F}(x_1, y_1)$ :

$$\begin{aligned} \hat{F}(x_1, y_1) &= F_d(1, y_1) + F_{d-1}x_1(1, y_1) + \cdots + x_1^{d-1}F_1(1, y_1) + x_1^dF_0 \\ &= F_d(1, y_1) + \mathcal{O}(x_1). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Luego, la superficie  $\bar{L}_c$  en coordenadas  $(x_1, y_1)$  está dada por,

$$\hat{F}(x_1, y_1) = cx_1^d,$$

que es lo que se obtiene al expresar en coordenadas  $(x_1, y_1)$  al polinomio  $F - c$ . Sustituyendo  $\hat{F}(x_1, y_1)$  en la expresión anterior tenemos que  $\bar{L}_c$  está dado por

$$F_d(1, y_1) + \mathcal{O}(x_1) = cx_1^d.$$

Esta superficie interseca a la línea  $L_\infty = \{x_1 = 0\}$ , en

$$F_d(1, y_1) = 0.$$

Nótese que esto es para cualquier valor  $c \in \mathbb{C}$ .

Por otro lado, como  $F_d$  es homogéneo, se factoriza en factores lineales; esto es  $F_d = \prod_{j=1}^m f_{d_j}^{n_j}$  con  $\deg f_{d_j} = 1$  para toda  $j = 1, \dots, m$ , con  $\sum_{j=1}^m n_j = d$ . De este modo, cada factor lineal  $f_{d_j}(1, y_1)$  de  $F_d(1, y_1)$  da una intersección de  $\bar{L}_c$  con la línea al infinito  $L_\infty = \{x_1 = 0\}$ .

En otras palabras, cada factor lineal  $f_{d_j}$  de  $F_d$ , produce un punto de indeterminación de  $F$ , sin embargo, al quitar ese punto de indeterminación de la superficie  $\bar{L}_c$ , el número de “hoyos” que se producen en la superficie  $L_c$  puede ser mayor que uno. Esto depende en parte, de la multiplicidad  $n_j$  del factor lineal  $f_{d_j}$  en  $F_d$ .

Nótese que el número de “hoyos” que se obtienen en  $L_c$  al quitar un punto de indeterminación, es igual al número de ramas (componentes conexas locales) que la superficie  $\bar{L}_c$  tiene en una vecindad de ese punto de

indeterminación.

En el caso en que  $F$  es transversal al infinito; i.e., la parte principal homogénea de  $F$  se factorice en factores lineales simples, se tiene que cada punto de indeterminación en  $\bar{L}_c$  produce sólo un “hoyo” en  $L_c$ . En particular la superficie  $L_c$  es igual a la superficie  $\bar{L}_c$  menos tantos puntos como factores lineales de  $F_d$  (i.e., tantos como el grado de  $F$ ). Esto se puede ver de la siguiente manera:

Expresemos al polinomio  $F$  como suma de polinomios homogéneos:

$$F = F_d + F_{d-1} + \cdots + F_1 + F_0,$$

donde  $F_j$  es un polinomio homogéneo de grado  $j$ , con  $F_d \neq 0$ .

Supongamos que  $F_d$  se factoriza en factores lineales simples,

$$F_d = \prod_{j=1}^d f_{d_j}, \quad \deg f_{d_j} = 1, \forall j, \quad \text{and } f_{d_i} \neq f_{d_j} \forall i \neq j.$$

Consideremos la carta coordenada de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  dada por  $(x_2, y_2) = (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$ , donde la línea al infinito está dada por  $L_\infty = \{y_2 = 0\}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad que todos los puntos de indeterminación pueden verse desde la carta  $(x_2, y_2)$ .

En coordenadas  $(x_2, y_2)$ , la superficie  $\bar{L}_c$  está dada de la siguiente manera:

$$F\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) - c = 0,$$

esto es,

$$\begin{aligned} F_d\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) + F_{d-1}\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) + \cdots + F_1\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) - c &= 0 \\ \frac{1}{y_2^d} F_d(x_2, 1) + \frac{1}{y_2^{d-1}} F_{d-1}(x_2, 1) + \cdots + \frac{1}{y_2} F_1(x_2, 1) &= c. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Multiplicando la expresión anterior por  $y_2^d$ , obtenemos la expresión polinomial que representa a la superficie  $\bar{L}_c$  en coordenadas  $(x_2, y_2)$ :

$$F_d(x_2, 1) + y_2 F_{d-1}(x_2, 1) + \cdots + y_2^{d-1} F_1(x_2, 1) = c y_2^d,$$

que a su vez expresamos como,

$$F_d(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2) = c y_2^d. \quad (3.58)$$

Denotemos como  $x_{2_j}$ ,  $j = 1, \dots, d$ , a las  $d$  raíces (simples) de  $F_d(x_2, 1)$ . Cada punto  $(x_{2_j}, 0)$  corresponde al punto de indeterminación obtenido por la intersección de  $\bar{L}_c$  con  $L_\infty$ , en la dirección de la recta  $f_{d_j} = 0$ .

Definamos la siguiente transformación:

$$\psi : (x_2, y_2) \mapsto (F_d(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2), y_2),$$

verificaremos que  $\psi$  es un difeomorfismo local en cada punto  $(x_{2j}, 0)$ . Para esto, consideremos la derivada de  $\psi$  en estos puntos:

$$|D_{(x_{2j}, 0)}\psi| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_d}{\partial x_2}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2) & * \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{(x_{2j}, 0)}. \quad (3.59)$$

Por lo que, el determinante de  $D_{(x_{2j}, 0)}\psi$  es igual a  $\frac{\partial F_d}{\partial x_2}(x_{2j}, 1)$ . Pero esto es distinto de cero, ya que cada  $x_{2j}$  es raíz simple de  $F_d(x_2, 1)$ .

Esto significa que  $\psi$  es un difeomorfismo local en los puntos  $(x_{2j}, 0)$ . Denotemos como  $\psi(x_2, y_2) = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ . De este modo, en una vecindad de estos puntos la superficie  $\bar{L}_c$ , descrita por la expresión (3.58), se escribe como

$$\tilde{x}_2 = c\tilde{y}_2^d. \quad (3.60)$$

Observemos que este cambio de coordenadas también dice que al extender la foliación  $dF = 0$  en  $\mathbb{CP}^2$ , en vecindad de los puntos  $(x_{2j}, 0)$  sus hojas están dadas por la expresión (3.60), i.e., los puntos de indeterminación de  $F$  son puntos singulares de tipo nodo, para la foliación  $dF = 0$  extendida a  $\mathbb{CP}^2$ .

Notemos que las curvas (3.60) son conexas. Por lo que, al quitar cada punto  $(x_{2j}, 0)$  de la superficie  $\bar{L}_c$ , se obtiene sólo un “hoyo” en  $L_c$ . Es decir, en este caso  $L_c = \bar{L}_c \setminus \{d \text{ puntos}\}$ .

Ahora estudiaremos el caso en que la parte principal homogénea de  $F$  tenga factores lineales con multiplicidad. Para esto, observaremos primero el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.6.1.** Sea  $F = (x^3 - y)((x - y)^2 + 2(x + y) - 4)(x + y - \frac{1}{2})$ . Denotemos  $f_1 = x^3 - y$ ,  $f_2 = (x - y)^2 + 2(x + y) - 4$  y  $f_3 = x + y - \frac{1}{2}$ .

La parte principal homogénea de  $F$  está dada por  $F_d = x^3(x - y)^2(x + y)$ , con  $d = 6$ , que es el producto de las partes principales homogéneas de los factores  $f_j$  de  $F$ .

Determinaremos el número de “hoyos” que se producen en  $L_c$ , para cualquier  $c \in \mathbb{C}$ , al quitar el punto de indeterminación de  $F$ , correspondiente a la dirección del factor lineal  $x$  de  $F_d$ . Para esto, consideremos la carta coordenada  $(x_2, y_2) = (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$  de  $\mathbb{CP}^2$ . La superficie  $\bar{L}_c$  en esta carta coordenada está dada por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_2^3}{y_2^3} - \frac{1}{y_2}\right)\left(\left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{1}{y_2}\right)^2 + 2\left(\frac{x_2}{y_2} + \frac{1}{y_2}\right) - 4\right)\left(\frac{x_2}{y_2} + \frac{1}{y_2} - \frac{1}{2}\right) &= c \\ \frac{1}{y_2^3}(x_2^3 - y_2)\frac{1}{y_2^2}\left((x_2 - 1)^2 + 2y_2(x_2 + 1) - 4y_2^2\right)\frac{1}{y_2}\left(x_2 + 1 - \frac{y_2}{2}\right) &= c \end{aligned} \quad (3.61)$$

Multiplicando la expresión anterior por  $y_2^6$ , obtenemos

$$(x_2^3 - y_2)\left((x_2 - 1)^2 + 2y_2(x_2 + 1) - 4y_2^2\right)\left(x_2 + 1 - \frac{y_2}{2}\right) = cy_2^6. \quad (3.62)$$

Ésta es la expresión polinomial que representa a la superficie  $\bar{L}_c$  en coordenadas  $(x_2, y_2)$ .

Denotemos como  $\hat{f}_1$ ,  $\hat{f}_2$  y  $\hat{f}_3$  a los polinomios que representan a los factores  $f_j$  con  $j = 1, 2, 3$ , respectivamente, por medio del cambio de coordenadas  $(x_2, y_2) = (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$ . Esto es,

$$\hat{f}_1 = x_2^3 - y_2, \quad \hat{f}_2 = (x_2 - 1)^2 + 2y_2(x_2 + 1) - 4y_2^2, \quad \hat{f}_3 = x_2 + 1 - \frac{y_2}{2}.$$

Así, reescribimos la expresión (3.62) como

$$\hat{F}(x_2, y_2) = \hat{f}_1 \hat{f}_2 \hat{f}_3 = cy_2^6.$$

La intersección de  $\bar{L}_c$  con  $L_\infty = \{y_2 = 0\}$ , está dada por,

$$\hat{F}(x_2, 0) = \hat{f}_1(x_2, 0)\hat{f}_2(x_2, 0)\hat{f}_3(x_2, 0) = 0,$$

esto es  $x_2^3(x_2 - 1)^2(x_2 + 1) = 0$ . La raíz  $x_2^3 = 0$  corresponde a la intersección de  $\bar{L}_c$  con  $L_\infty$ , en la dirección del factor lineal  $x$  de  $F_d$ .

Ahora, para conocer el número de ramas de  $\bar{L}_c$ , en una vecindad del punto de indeterminación dado por  $(x_2, y_2) = (0, 0)$ , desarrollaremos  $\hat{F}(x_2, y_2) - cy_2^6$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{F}(x_2, y_2) - cy_2^6 &= \hat{f}_1 \hat{f}_2 \hat{f}_3 - cy_2^6 \\ &= (x_2^3 - y_2) \hat{f}_2 \hat{f}_3 - cy_2^6 \\ &= x_2^3 \hat{f}_2 \hat{f}_3 - y_2^2 \hat{f}_2 \hat{f}_3 - cy_2^6 \\ &= x_2^3 \hat{f}_2 \hat{f}_3 - y_2^2 (\hat{f}_2 \hat{f}_3 - cy_2^4) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Con esto, definamos la siguiente transformación:

$$\psi : (x_2, y_2) \mapsto (x_2(\hat{f}_2 \hat{f}_3)^{\frac{1}{3}}, y_2(\hat{f}_2 \hat{f}_3 - cy_2^4)^{\frac{1}{2}}).$$

Nótese que, como  $\hat{f}_2(0, 0) = 1 \neq 0$  y  $\hat{f}_3(0, 0) = 1 \neq 0$ , entonces las raíces  $(\hat{f}_2 \hat{f}_3)^{\frac{1}{3}}$  y  $(\hat{f}_2 \hat{f}_3 - cy_2^4)^{\frac{1}{2}}$  están bien definidas y son analíticas en una vecindad del punto  $(0, 0)$ .

Consideremos el determinante de la derivada de  $\psi$  en  $(0, 0)$ ,

$$|D_{(0,0)}\psi| = \begin{vmatrix} (\hat{f}_2 \hat{f}_3)^{\frac{1}{3}} + x_2 \frac{\partial(\hat{f}_2 \hat{f}_3)^{\frac{1}{3}}}{\partial x_2} & x_2 \frac{\partial(\hat{f}_2 \hat{f}_3)^{\frac{1}{3}}}{\partial y_2} \\ * & (\hat{f}_2 \hat{f}_3 - cy_2^4)^{\frac{1}{2}} + y_2 \frac{\partial(\hat{f}_2 \hat{f}_3 - cy_2^4)^{\frac{1}{2}}}{\partial y_2} \end{vmatrix}_{(0,0)}. \quad (3.64)$$

Esto es,

$$|D_{(0,0)}\psi| = \begin{vmatrix} (\hat{f}_2 \hat{f}_3(0, 0))^{\frac{1}{3}} & 0 \\ * & (\hat{f}_2 \hat{f}_3(0, 0))^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}, \quad (3.65)$$

que es el producto  $(\hat{f}_2 \hat{f}_3(0, 0))^{\frac{1}{3}}(\hat{f}_2 \hat{f}_3(0, 0))^{\frac{1}{2}}$ , el cual es igual a 1. Por lo cual,  $\psi$  es un difeomorfismo local, en una vecindad del  $(0, 0)$ .

Denotemos  $\psi(x_2, y_2) = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ . Notemos que, bajo este cambio de coordenadas la superficie  $\bar{L}_c$  se escribe como,

$$\tilde{x}_2^3 - \tilde{y}_2^2 = 0,$$

la cual es una superficie conexa. Por lo que, en una vecindad del punto de indeterminación  $(0, 0)$ , la superficie  $\bar{L}_c$  sólo tiene una rama. De este modo, al quitar este punto de indeterminación, sólo se produce un "hoyo" en superficie  $L_c$ .

Sin embargo, no siempre ocurre que en la vecindad de la intersección de  $\bar{L}_c$  con  $L_\infty$ , en la dirección de un factor lineal de  $F_d$  con multiplicidad, la superficie  $\bar{L}_c$  tenga sólo una componente conexa. A continuación daremos las condiciones para conocer el número de componentes conexas de  $\bar{L}_c$ , en vecindades de sus puntos de intersección con la línea al infinito  $L_\infty$ .

Sea  $F = \prod_{j=1}^m f_j$ , con  $f_j \in \mathbb{C}[x, y]$  y  $\deg f_j = d_j$ ,  $\deg F = d = \sum_{j=1}^m d_j$ . Expresaremos cada factor  $f_j$  de la siguiente manera:

$$f_j = \prod_{i=1}^{r_j} f_{ij}^{n_{ij}} + g_j, \quad \sum_{i=1}^{r_j} n_{ij} = d_j,$$

donde  $\prod_{i=1}^{r_j} f_{ij}$  es el polinomio principal homogéneo de  $f_j$ ; con  $f_{ij}$  polinomios homogéneos de grado 1, cada uno con multiplicidad  $n_{ij} \geq 1$ , y  $g_j$  denota a los términos de orden inferior,  $\deg g_j \leq d_j - 1$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$f_1 = x^n \prod_{i=2}^{r_1} f_{i1}^{n_{i1}} + g_1,$$

es decir,  $f_{11} = x$  y denotemos  $n_{11} = n$ . Supongamos también que  $f_{i1} \neq x$  para toda  $i = 2, \dots, r_1$ , y que  $x$  no divide ni a la parte principal homogénea de  $g_1$  ni a la parte principal homogénea de cada  $f_j$  con  $j \neq 1$ .

Ahora, estudiaremos la forma de la superficie  $\bar{L}_c$ , en una vecindad de su punto de intersección con  $L_\infty$  en la dirección de  $x$ . Para esto, consideremos la carta coordenada  $(x_2, y_2)$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , con el cambio de coordenadas dado por  $(x_2, y_2) = (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$ . El punto de intersección de  $\bar{L}$  con  $L_\infty$ , en la dirección de  $x$ , corresponde al punto  $(x_2, y_2) = (0, 0)$ .

En estas coordenadas, la superficie  $\bar{L}_c$  está descrita por la expresión

$$\hat{F}(x_2, y_2) = cy_2^d, \quad (3.66)$$

donde utilizamos la notación  $\hat{F}$ , para expresar a el polinomio que representa a  $F$  en las coordenadas  $(x_2, y_2)$ ; i.e.,  $\hat{F}(x_2, y_2) = y_2^d F(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2})$ . En general, para cualquier polinomio  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  con  $\deg f = a$ , estamos denotando como  $\hat{f}$  al polinomio que se obtiene como  $y_2^a f(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2})$ .

Por otro lado, consideremos los polinomios  $f_j$ ,

$$f_j = \prod_{i=1}^{r_j} f_{ij}^{n_{ij}} + g_j, \quad \deg g_j \leq d_j - 1.$$

Expresemos  $g_j$  como suma de polinomios homogéneos,

$$g_j = g_{jd_j-1} + g_{jd_j-2} + \cdots + g_{j1} + g_{j0},$$

donde  $g_{jk}$  es un polinomio homogéneo de grado  $k$ .

Haciendo el cambio de coordenadas  $(x_2, y_2) = (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} f_j\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) &= \prod_{i=1}^{r_j} f_{ij}^{n_{ij}}\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) + g_j\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{r_j} \frac{1}{y_2^{n_{ij}}} f_{ij}^{n_{ij}}(x_2, 1) + \frac{1}{y_2^{d_j-1}} (g_{jd_j-1}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2)) \end{aligned} \quad (3.67)$$

De esta manera, multiplicando la expresión (3.67) por  $y_2^{d_j}$ , con  $d_j = \sum_{i=1}^{r_j} n_{ij}$ , obtenemos,

$$\hat{f}_j(x_2, y_2) = \prod_{i=1}^{r_j} f_{ij}^{n_{ij}}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2).$$

Consideremos ahora, en particular, al polinomio  $f_1$ ,

$$f_1 = x^n \prod_{i=2}^{r_1} f_{i1} + g_1, \quad \deg g_1 \leq d_1 - 1.$$

Expresemos,  $g_1$  como suma de polinomios homogéneos,

$$g_1 = g_{1d_1-1} + g_{1d_1-2} + \cdots + g_{11} + g_{10}.$$

Supongamos que  $g_{1d_1-k} \neq 0$ , con  $k < d_1$  y que  $g_{1d_1-j} \equiv 0$  para toda  $j < k$ . Así,

$$g_1 = g_{1d_1-k} + g_{1d_1-k-1} + \cdots + g_{11} + g_{10},$$

por lo que  $\deg g_1 = d_1 - k$ , y  $g_{1d_1-k}$  es la parte principal homogénea de  $g_1$ .

Expresemos  $f_1$  en las coordenadas  $(x_2, y_2) = (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$ ,

$$f_1\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) = \frac{x_2^n}{y_2^n} \prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}}\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) + g_{1d_1-k}\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) + \cdots + g_{11}\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) + g_{10}. \quad (3.68)$$

Como  $\sum_{i=2}^{r_1} n_{ij} + n = d_1$ , se tiene que  $\prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}}\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) = \frac{1}{y_2^{d_1-n}} \prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}}(x_2, 1)$ . Sustituyendo esto en (3.68), tenemos que

$$f_1\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) = \frac{x_2^n}{y_2^n} \frac{1}{y_2^{d_1-n}} \prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}}(x_2, 1) + \frac{1}{y_2^{d_1-k}} g_{1d_1-k}(x_2, 1) + \cdots + \frac{1}{y_2} g_{11}(x_2, 1) + g_{10}.$$

Multiplicando la expresión anterior por  $y_2^{d_1}$ , obtenemos el polinomio  $\hat{f}_1$ :

$$\hat{f}_1(x_2, y_2) = x_2^n \prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}}(x_2, 1) + y_2^k g_{1d_1-k}(x_2, 1) + \cdots + y_2^{d_1-1} g_{11}(x_2, 1) + y_2^{d_1} g_{10}.$$

Reescribimos esto como

$$\hat{f}_1(x_2, y_2) = x_2^n \prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}}(x_2, 1) + y_2^k (g_{1d_1-k}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2)).$$

Sustituyendo  $f_1$  en la expresión (3.66) de  $\bar{L}_c$ , donde  $\hat{F}(x_2, y_2) = \prod_{j=1}^m \hat{f}_j(x_2, y_2)$ , se tiene que

$$(x_2^n \prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}}(x_2, 1) + y_2^k (g_{1d_1-k}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2))) \prod_{j=2}^m \hat{f}_j(x_2, y_2) = cy_2^d$$

Ahora restamos  $cy_2^d$  de ambos lados de la expresión anterior y desarrollemos la expresión de la siguiente manera:

$$x_2^n \prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}} \prod_{j=2}^m \hat{f}_j + y_2^k (g_{1d_1-k}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2)) \prod_{j=2}^m \hat{f}_j - cy_2^d = 0.$$

Factoricemos  $y_2^k$  de los últimos dos sumandos en la expresión anterior,

$$x_2^n \prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}} \prod_{j=2}^m \hat{f}_j + y_2^k ((g_{1d_1-k}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2)) \prod_{j=2}^m \hat{f}_j - cy_2^{d-k}) = 0,$$

Ahora, usando la expresión anterior, definamos la siguiente transformación,

$$\psi : (x_2, y_2) \mapsto (x_2 \left( \prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}} \prod_{j=2}^m \hat{f}_j \right)^{\frac{1}{n}}, y_2 ((g_{1d_1-k}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2)) \prod_{j=2}^m \hat{f}_j - cy_2^{d-k})^{\frac{1}{k}})$$

Notemos que, como  $x$  no divide a la parte principal homogénea de  $f_j$  entonces  $\hat{f}_j(0, 0) \neq 0$  para toda  $j = 2, \dots, m$  (i.e., la compactificación proyectiva de  $\{f_j = 0\}$ , no interseca a  $L_\infty$  en el mismo punto que la compactificación proyectiva de la recta  $\{x = 0\}$ , para ninguna  $j = 2, \dots, m$ ). Del mismo modo, como  $x$  no divide a la parte principal homogénea de  $g_1$  entonces  $g_{1d_1-k}(0, 1) \neq 0$ . Además por hipótesis  $f_{1i} \neq x$  para toda  $i = 2, \dots, r_1$ , por lo que  $f_{1i}(0, 1) \neq 0$ , para toda  $i = 2, \dots, r_1$ . De este modo,  $(\prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}} \prod_{j=2}^m \hat{f}_j)(0, 0) \neq 0$  y  $((g_{1d_1-k}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2)) \prod_{j=2}^m \hat{f}_j - cy_2^{d-k})(0, 0) = g_{1d_1-k}(0, 1) \prod_{j=2}^m \hat{f}_j(0, 0) \neq 0$ , por lo que las raíces  $(\prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}} \prod_{j=2}^m \hat{f}_j)^{\frac{1}{n}}$  y  $((g_{1d_1-k}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2)) \prod_{j=2}^m \hat{f}_j - cy_2^{d-k})^{\frac{1}{k}}$  están bien definidas y son analíticas en una vecindad del punto  $(0, 0)$ .

Denotemos  $h_1(x_2, y_2) = (\prod_{i=2}^{r_1} f_{ij}^{n_{ij}}(x_2, 1) \prod_{j=2}^m \hat{f}_j(x_2, y_2))^{\frac{1}{n}}$  y  $h_2(x_2, y_2) = ((g_{1d_1-k}(x_2, 1) + \mathcal{O}(y_2)) \prod_{j=2}^m \hat{f}_j(x_2, y_2) - cy_2^{d-k})^{\frac{1}{k}}$ . Así,  $\psi$  se reescribe como

$$\psi : (x_2, y_2) \mapsto (x_2 h_1, y_2 h_2)$$

Consideremos el determinante de la derivada de  $\psi$  en el punto  $(0, 0)$ ,

$$|D_{(0,0)}\psi| = \begin{vmatrix} h_1 + x_2 \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & x_2 \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ * & h_2 + y_2 \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}_{(0,0)}, \quad (3.69)$$

esto es  $h_1(0,0)h_2(0,0) \neq 0$ . Por lo que,  $\psi$  es un difeomorfismo local en una vecindad del origen de  $(x_2, y_2)$ .

Denotemos  $\psi(x_2, y_2) = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ . Bajo este cambio de coordenadas, la superficie  $\bar{L}_c$  se escribe como:

$$\tilde{x}_2^n + \tilde{y}_2^k = 0.$$

En general, lo que se tiene es lo siguiente:

Consideremos  $F = \prod_{j=1}^m f_j$ , con  $f_j \in \mathbb{C}[x, y]$ , donde  $\deg f_j = d_j$  y  $\deg F = d = \sum_{j=1}^m d_j$ . Escribamos  $f_j = \prod_{i=1}^{r_j} f_{ij}^{n_{ij}} + g_j$ , donde  $\prod_{i=1}^{r_j} f_{ij}^{n_{ij}}$  es la parte principal homogénea de  $f_j$ , con  $\deg f_{ij} = 1$ ,  $\sum_{i=1}^{r_j} n_{ij} = d_j$  y  $\deg g_j = d_j - k_j$ , con  $k_j > 1$ .

Denotemos por  $p_{ij}$  al punto en  $L_\infty$  obtenido por la intersección de  $\bar{L}_c$  en la dirección de la recta  $\{f_{ij} = 0\}$ . Entonces:

**Proposición 3.6.1.** *Conservemos la notación de arriba. Supongamos que  $f_{ij} \neq f_{i'j'}$  para toda  $ij \neq i'j'$ , y supongamos que  $f_{ij}$  no divide a la parte principal homogénea de  $g_j$ . Entonces, en una vecindad del punto  $p_{ij}$ , bajo un cambio de coordenadas la superficie  $\bar{L}_c$  se escribe como*

$$\tilde{x}^{n_{ij}} + \tilde{y}^{k_j} = 0. \quad (3.70)$$

De este modo, bajo las hipótesis de la proposición anterior, se tiene que, el número de componentes conexas de la superficie  $\bar{L}_c$  en la vecindad del punto de indeterminación  $p_{ij}$ , es igual al número de componentes conexas de la superficie  $\tilde{x}^{n_{ij}} + \tilde{y}^{k_j} = 0$ .

Notemos que si  $n_{ij}$  y  $k_j$  son primos relativos,  $(n_{ij}, k_j) = 1$ , entonces (3.70) es conexas.

**Corolario 3.6.1.** *Con la notación de arriba, sea  $F = \prod_{j=1}^m f_j$ , con  $f_j \in \mathbb{C}[x, y]$  y sea  $r = \sum_{j=1}^m r_j$ . Supongamos que  $F$  satisface las hipótesis de la proposición 3.6.1. Entonces, si  $(n_{ij}, k_j) = 1$  para toda  $i$  y para toda  $j$ ,  $L_c = \bar{L}_c \setminus \{r \text{ puntos}\}$ , donde  $r = \sum_{j=1}^m r_j$ , para toda  $c \in \mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Consideremos al polinomio principal homogéneo de  $F$ ,  $F_d = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{r_j} f_{ij}$ . Por hipótesis, tenemos que  $f_{ij} \neq f_{i'j'}$  para toda  $ij \neq i'j'$ . Por lo que  $r = \sum_{j=1}^m r_j$  es igual al número de factores lineales distintos de  $F_d$ .

Por otro lado, cada punto de indeterminación de  $F$  está dado por la intersección de  $\bar{L}_c$ , en la dirección de cada recta  $\{f_{ij} = 0\}$ , con la línea al infinito  $L_\infty$ . Denotamos por  $p_{ij}$  al punto de interminación que se obtiene en la dirección de  $f_{ij}$ . Esto es,  $\#\{p_{ij}\}_{j,i=1}^{m,r_j} = \#\bar{L}_c \cap L_\infty = r$ .

Luego, ya que  $(n_{ij}, k_j) = 1$  para cada  $i$  y para cada  $j$ , se tiene que en una vecindad de cada punto  $p_{ij}$  la superficie  $\bar{L}_c$  es conexas, de donde se tiene el resultado.  $\square$

**Definición 3.6.2.** Diremos que  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  tiene buena multiplicidad al infinito, si se satisfacen las hipótesis del corolario 3.6.1.

**Observación 3.6.1.** El ejemplo 3.6.1 es un polinomio que satisface tener buena multiplicidad al infinito.

### 3.6.2. Generadores en cohomología de de Rham de los ciclos residuales

Ahora, nos restringiremos a la siguiente familia de polinomios reales, que denotaremos como  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ :

Sea  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ , decimos que  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , si y sólo si, es de la siguiente forma,

$$F = \prod_{j=1}^r f_j \quad ; f_j \in \mathbb{R}[x, y] \text{ irreducibles,}$$

donde  $f_j \neq f_i$  si  $j \neq i$ , y

$$f_j = f_{1j}^{n_j} + g_j,$$

con  $f_{1j}$  polinomio homogéneo de grado 1, tales que  $f_{1j} \neq f_{1i}$  si  $j \neq i$ ,  $\deg f_j = n_j \geq 1$  y  $\deg g_j = k_j < n_j$ , para toda  $j = 1, \dots, r$ ; y se satisfacen las siguientes condiciones al infinito:

- (i)  $F$  tiene buena multiplicidad al infinito (ver definición 3.6.2),
- (ii)  $F$  define una buena partición de  $\mathcal{D}$  con  $r$  ramas (ver definición 3.5.5), donde  $r$  es el número de factores lineales distintos en  $F_d$ .

**Comentario 3.6.1.** Notemos que la parte principal homogénea de  $F$  está dada por

$$F_d = \prod_{j=1}^r f_{1j}^{n_j},$$

con  $n_j \geq 1$  para toda  $j = 1, \dots, r$  y  $d = \deg F = \sum_{j=1}^r n_j$ . Por lo que  $F_d$  no necesariamente es un producto de factores lineales simples, debido a las multiplicidades  $n_j$ , de modo que  $F$  no necesariamente es transversal al infinito.

Por el corolario 3.6.1, la fibra regular de  $F$ ,  $F^{-1}(z) \subset \mathbb{C}^2$  es igual a  $\overline{L}_z \setminus \{r \text{ puntos}\}$ , donde  $\overline{L}_z$  denota a la compactificación proyectiva de  $L_z = F^{-1}(z)$ . A estos  $r$  puntos eliminados les llamamos *puntos de indeterminación*.

Cada uno de los puntos de indeterminación corresponde a la intersección de  $\overline{L}_z$  con la línea al infinito  $L_\infty$  en cada una de las direcciones,  $\{f_{1j} = 0\}$ , del polinomio principal homogéneo  $F_d$  de  $F$ . Denotamos (como en la subsección anterior) a estos puntos como  $p_{1j}$ , para la intersección de  $\overline{L}_z$  con  $L_\infty$  en cada dirección  $f_{1j} = 0$ .

Por cada punto de indeterminación, se tiene un ciclo en  $H_1(F^{-1}(z))$  que rodea al “hoyo” que se produce al quitar el punto de indeterminación. Por la propiedad de buena multiplicidad al infinito, por cada punto de indeterminación se produce sólo un “hoyo” en la superficie no compactificada. Denotaremos como  $\hat{\sigma}_j(z)$  al ciclo en  $H_1(F^{-1}(z))$  que rodea al punto de indeterminación  $p_{1j}$ .

De este modo, la 1-homología de  $F^{-1}(z)$  es la suma directa de la 1-homología de la compactificación proyectiva  $\bar{L}_z$  de  $L_z = F^{-1}(z)$ , más el espacio generado por los ciclos que rodean a los puntos de indeterminación.

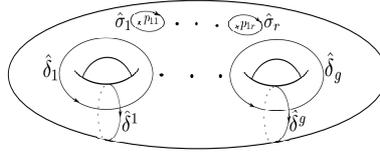


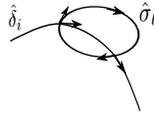
Figura 3.1:  $F^{-1}(z)$

Por ejemplo, si  $\bar{L}_z$  es una superficie de género  $g$ , entonces podemos tomar una base para la 1-homología dada por ciclos  $\hat{\delta}^i, \hat{\delta}_j$ , como en el dibujo de arriba; orientadas de modo que  $(\hat{\delta}^i, \hat{\delta}_i) = 1$  y  $(\hat{\delta}^i, \hat{\delta}_j) = 0$  para  $i \neq j$ , y  $(\hat{\delta}^i, \hat{\delta}^j) = (\hat{\delta}_i, \hat{\delta}_j) = 0$  para toda  $i$  y  $j$ .

Luego, si  $F$  tiene buena multiplicidad al infinito y  $r$  puntos de interminación  $\{p_{11}, \dots, p_{1r}\}$  entonces  $F^{-1}(z)$  es igual a  $\bar{L}_z - \{p_{11}, \dots, p_{1r}\}$ . Denotamos como  $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_r$  a los ciclos que rodean a los puntos  $\{p_{11}, \dots, p_{1r}\}$  como en el dibujo. Claramente  $r - 1$  de los  $\hat{\sigma}_\ell$  son linealmente independientes. Así, los ciclos  $\{\hat{\delta}^i, \hat{\delta}_i\}_{i=1}^g \cup \{\hat{\sigma}_\ell\}_{\ell=1}^{r-1}$  forman una base para  $H_1(F^{-1}(z))$ .

**Lema 3.6.1.** Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , entonces, el subespacio  $V_\infty$  de  $H_1(F^{-1}(z))$ , de ciclos invariantes bajo monodromía (definido en 3.6.1), es generado por los ciclos que rodean a los puntos de indeterminación de  $F^{-1}(z)$ , y por tanto tiene dimensión  $r - 1$ .

*Demostración.* Consideremos la base de ciclos  $\{\hat{\delta}^i, \hat{\delta}_i\}_{i=1}^g$  y  $\{\hat{\sigma}_\ell\}_{\ell=1}^{r-1}$  como en el dibujo (3.1). Los ciclos  $\hat{\sigma}_\ell$ , que rodean a los puntos de indeterminación, tienen intersección cero con los ciclos  $\hat{\delta}_i$  y  $\hat{\delta}^i$ , pues si  $\hat{\sigma}_\ell$  intersecciona a  $\hat{\delta}_i$ , una vez con índice positivo (+1), entonces  $\hat{\sigma}_\ell$  debe interseccionar nuevamente a  $\hat{\delta}_i$  pero ahora con índice negativo (-1) (del mismo modo para  $\hat{\delta}^i$ );



Por lo que  $\hat{\sigma}_\ell$  tienen intersección cero con todos los ciclos en  $H_1(F^{-1}(z))$ .

Ahora verificaremos que cualquier ciclo en  $H_1(F^{-1}(z))$  que tenga intersección cero con todos los ciclos en  $H_1(F^{-1}(z))$ , tiene que ser generado por los

ciclos  $\{\hat{\sigma}_\ell\}_{\ell=1}^{r-1}$ : sea  $\delta \in H_1(F^{-1}(z))$ . Expresemos a  $\delta$  en términos de la base  $\{\hat{\delta}^i, \hat{\delta}_i\}_{i=1}^g \cup \{\hat{\sigma}_\ell\}_{\ell=1}^{r-1}$ :

$$\delta = \sum_{i=1}^g a_i \hat{\delta}^i + b_i \hat{\delta}_i + \sum_{\ell=1}^{r-1} c_\ell \hat{\sigma}_\ell. \quad (3.71)$$

Supongamos que  $\delta$  tiene índice de intersección 0 con todos los ciclos de  $H_1(F^{-1}(z))$ . Consideremos el índice de intersección de  $\delta$  con  $\hat{\delta}^j$ :

$$(\delta, \hat{\delta}^j) = \sum_{i=1}^g a_i (\hat{\delta}^i, \hat{\delta}^j) + b_i (\hat{\delta}_i, \hat{\delta}^j) + \sum_{\ell=1}^{r-1} c_\ell (\hat{\sigma}_\ell, \hat{\delta}^j). \quad (3.72)$$

El lado izquierdo es 0 por la hipótesis sobre  $\delta$ , mientras que el lado derecho es igual a  $a_j$  por propiedades de la intersección de los ciclos  $\hat{\delta}^i$ ,  $\hat{\delta}_i$  y  $\hat{\sigma}_\ell$ . Por lo que  $a_j = 0$  para toda  $j$ . Del mismo modo, considerando el índice de intersección con  $\hat{\delta}_j$  se puede ver que  $b_j = 0$  para toda  $j$ . Por lo que, de la expresión (3.73) se tiene que

$$\delta = \sum_{\ell=1}^{r-1} c_\ell \hat{\sigma}_\ell. \quad (3.73)$$

De modo que,  $V_\infty$ , es generado por los ciclos  $\{\hat{\sigma}_\ell\}_{\ell=1}^{r-1}$ , y así  $\dim V_\infty = r - 1$ .  $\square$

**Corolario 3.6.2.** *Bajo las hipótesis del lema 3.6.1. El subespacio  $V_\infty$  coincide con el subespacio  $\langle \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle$  de ciclos definidos por la expresión (3.34) de la subsección 3.5.3.*

*Demostración.* Por el lema 3.5.1 los ciclos  $\sigma_\ell(z)$  definido en (3.34) son invariantes bajo monodromía por lo que  $\sigma_\ell(z) \in V_\infty$  para toda  $\ell$ .

Por otro lado, por la proposición 3.5.2 los ciclos  $\{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1}$  son linealmente independientes. Por lo tanto, como  $\langle \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle \subseteq V_\infty$  y  $\dim V_\infty = r - 1$  entonces  $V_\infty = \langle \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle$ .  $\square$

**Conjetura 3.6.1.**  $\sigma_j = \hat{\sigma}_j$ , donde  $\sigma_j(z)$  está definido como en la expresión (3.34) de la subsección 3.5.3.

Describiremos a los ciclos  $\hat{\sigma}_j(z)$  en las coordenadas locales dada por la proposición 3.6.1:

Por la proposición 3.6.1, en una vecindad del punto de indeterminación  $p_{1j}$  (que corresponde a la intersección de  $\bar{L}_z$  en la dirección  $f_{1j} = 0$ ), la superficie  $\bar{L}_z$  se escribe como

$$\tilde{x}^{n_j} + \tilde{y}^{k_j} = 0, \quad (3.74)$$

donde  $\{\tilde{y} = 0\} = \text{eje } \tilde{x}$  representa a la línea al infinito  $L_\infty$ , y el punto  $p_{1j}$  está en el origen.

Consideremos una curva  $l$  sobre el plano  $\tilde{y}$ , que rodee a  $\tilde{y} = 0$ ; i.e

$l(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 1]$ . Levantemos esta curva  $l$  sobre la superficie definida por la ecuación (3.74). Para esto, expresemos  $\tilde{y}$  en términos de  $\tilde{x}$ ; esto es,  $\tilde{y} = -\tilde{x}^{\frac{n_j}{k_j}}$ . Por lo que, el levantamiento de  $l$  en la superficie (3.74) es  $(e^{2\pi i\theta}, -e^{2\pi i\theta \frac{n_j}{k_j}})$ .

De esto, se sigue que para obtener una curva cerrada en la superficie (3.74), que rodee al origen, la curva  $l$  debe rodear al menos  $k_j$  veces al eje  $\tilde{y}$  (rodear  $k_j$  a  $\tilde{x} = 0$ ). Esto quiere decir que, en estas coordenadas locales,  $\hat{\sigma}_j(z)$  se escribe como  $(e^{2\pi i\theta k_j}, -e^{2\pi i\theta n_j})$ , con  $\theta \in [0, 1]$ .

Nótese que,  $\hat{\sigma}_j(z)$  rodea  $k_j$  veces a  $\{\tilde{x} = 0\}$ , y  $n_j$  veces a  $\{\tilde{y} = 0\} = L_\infty$ . Por cuestiones de cálculos, consideramos  $\sigma_j(z)$  recorrida en sentido negativo; i.e.,

$$\hat{\sigma}_j(z) = (e^{-2\pi i\theta k_j}, -e^{-2\pi i\theta n_j}), \text{ con } \theta \in [0, 1].$$

Ahora, consideraremos el subespacio  $V_\infty \subseteq H_1(F^{-1}(z))$ , con  $z$  varlor regular de  $F$ , generado por  $r - 1$  ciclos  $\hat{\sigma}_j(z)$ . Definiremos una base del dual a  $V_\infty$  en la cohomología de de Rham de  $F^{-1}(z)$ .

Cada ciclo  $\hat{\sigma}_j(z)$  rodea al punto de interminación  $p_{1j}$ , dado por la intersección de  $\bar{L}_z$  con  $L_\infty$  en la dirección de  $\{f_{1j} = 0\}$ , pero ya que  $f_j = f_{1j}^{n_j} + g_j$ , donde  $f_{1j}^{n_j}$  es su polinomio principal homogéneo, entonces el punto  $p_{1j}$  también resulta de la intersección de la compactificación proyectiva de  $\{f_j = 0\}$  con  $L_\infty$ . Consideremos las 1-formas logarítmicas dadas por  $\frac{df_j}{f_j}$  para  $1 \leq j \leq r - 1$ . Veremos que estas 1-formas son una base para el espacio dual de  $V_\infty$  en la 1-cohomología de de Rham de  $F^{-1}(z)$ :

Consideremos a los factores  $f_j = f_{1j}^{n_j} + g_j$ . Denotemos  $f_{1j} = a_{1j}x + b_{1j}y$  y  $g_j = g_{jk_j} + \dots + g_{j1}$ , con  $k_j < n_j$ , donde  $g_{ji}$  es un polinomio homogéneo de grado  $i$ . Supongamos que el punto de indeterminación  $p_{1j}$  puede expresarse en las cartas  $(x_2, y_2) = (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$  de  $\mathbb{CP}^2$ , donde  $\{y_2 = 0\}$  es la línea al infinito  $L_\infty$ . Expresemos  $f_j$  en coordenadas  $(x_2, y_2)$ ; esto es,

$$f_j\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) = (a_{ij}\frac{x_2}{y_2} + b_{ij}\frac{1}{y_2})^{n_j} + g_{jk_j}\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) + \dots + g_1\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right),$$

esto es

$$f_j\left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{1}{y_2}\right) = \frac{1}{y_2^{n_j}}(a_{ij}x_2 + b_{ij})^{n_j} + \frac{1}{y_2^{k_j}}g_{jk_j}(x_2, 1) + \dots + \frac{1}{y_2}g_1(x_2, 1),$$

esto significa que  $f_j$  tiene un polo de orden  $n_j$  en la línea al infinito  $L_\infty$ , descrita en estas coordenadas como  $\{y_2 = 0\}$ .

Calculemos el residuo de  $\frac{df_j}{f_j}$  en los puntos  $p_{1i}$  con  $i \neq j$  sobre la compactificación proyectiva de  $F^{-1}(z)$  (que denotamos  $\bar{L}_z$ ); i.e., la integral de  $\frac{df_j}{f_j}$  a lo largo de  $\hat{\sigma}_i(z)$  para  $i \neq j$ . Por un lado, como la línea al infinito  $L_\infty$  es un polo de orden  $n_j$  de  $f_j$  (expresado en coordenadas al infinito), entonces la integral de la 1-forma  $\frac{df_j}{f_j}$  al rodear una vez a la línea al infinito  $L_\infty$  es  $n_j$ . Y

por otro lado, sobre la superficie  $\bar{L}_z$  tenemos que, el ciclo  $\hat{\sigma}_i(z)$  que rodea al punto  $p_{1i}$ , rodea también  $n_i$  veces a la línea al infinito  $L_\infty$ . Por lo que para cada  $i$  el residuo de  $\frac{df_j}{f_j}$  en  $p_{1i}$  sobre la superficie compactificada de  $F^{-1}(z)$ , con  $z$  valor regular, es el producto (con signo negativo por la orientación que elegimos para los ciclos  $\hat{\sigma}_i(z)$ ) de  $n_j$  con  $n_i$ ;

$$Res_{p_{1i}} \frac{df_j}{f_j} = \int_{\hat{\sigma}_i(z)} \frac{df_j}{f_j} = -n_j n_i, \text{ para toda } i \neq j. \quad (3.75)$$

Notemos que  $\frac{df_j}{f_j}$ , restringida a la superficie compacta  $\bar{L}_z$  para  $z$  valor regular de  $F$ , sólo tiene polos en los puntos de indeterminación; i.e., en los puntos  $\{p_{1i}\}_{i=1}^r$ . Del *teorema del residuo*[12], se sigue que

$$\int_{\hat{\sigma}_i(z)} \frac{df_j}{f_j} + \sum_{i \neq j} \int_{\hat{\sigma}_i(z)} \frac{df_j}{f_j} = 0,$$

luego, despejando  $\int_{\hat{\sigma}_j(z)} \frac{df_j}{f_j}$ , y usando la igualdad (3.75), se obtiene el residuo de  $\frac{df_j}{f_j}$  en  $p_{1j}$  (donde  $p_{1j}$  es el cero de  $f_j$  en  $\bar{L}_z$ );

$$Res_{p_{1j}} \frac{df_j}{f_j} = \int_{\hat{\sigma}_j(z)} \frac{df_j}{f_j} = \sum_{i \neq j} n_j n_i. \quad (3.76)$$

Denotemos  $N_j = \sum_{i \neq j} n_i$ . De este modo, tenemos que

$$\int_{\hat{\sigma}_j(z)} \frac{df_j}{f_j} = n_j N_j. \quad (3.77)$$

Consideremos el *isomorfismo de de Rham*:

$$\begin{aligned} \int : H_1(F^{-1}(z)) &\rightarrow Hom(H_{dR}^1(F^{-1}(z))) \\ \gamma(z) &\mapsto \int_{\gamma(z)} : \omega \mapsto \int_{\gamma(z)} \omega. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Consideremos la siguiente matriz de  $(r-1) \times (r-1)$  entradas, donde  $r$  es el número de factores lineales de la parte principal homogénea de  $F$ ,

$$M = \left( \int_{\hat{\sigma}_i(z)} \frac{df_j}{f_j} \right)_{i,j=1,\dots,r-1}, \quad (3.79)$$

con  $i$  estamos denotando a las columnas y con  $j$  estamos denotando a las filas.

Por el isomorfismo de de Rham (3.78), se tiene que  $\{\frac{df_j}{f_j}\}_{j=1}^{r-1}$  forma una base del dual de  $V_\infty = \langle \{\hat{\sigma}_i(z)\}_{i=1}^{r-1} \rangle$  en la 1-cohomología de la fibra regular de  $F$ , si y sólo si,  $M$  tiene determinante distinto de cero.

Notemos que, por las igualdades, (3.75) y (3.77), la matriz  $M$  es igual a

$$|M| = \begin{vmatrix} n_1 N_1 & -n_1 n_2 & \cdots & -n_1 n_{r-1} \\ -n_2 n_1 & n_2 N_2 & \cdots & -n_2 n_{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_{r-1} n_1 & -n_{r-1} n_2 & \cdots & n_{r-1} N_{r-1} \end{vmatrix} \quad (3.80)$$

**Lema 3.6.2.** *La matriz  $M$  tiene determinante distinto de cero*<sup>8</sup>.

*Demostración.* Notemos que para cada  $i$ , la  $i$ -ésima columna de  $M$  es múltiplo de  $n_i$ . Sacando del determinante de  $M$  el factor  $n_i$  de cada  $i$ -ésima columna tenemos que

$$|M| = n_1 \cdots n_{r-1} \begin{vmatrix} N_1 & -n_1 & \cdots & -n_1 \\ -n_2 & N_2 & \cdots & -n_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_{r-1} & -n_{r-1} & \cdots & N_{r-1} \end{vmatrix} \quad (3.81)$$

donde  $N_j = n_1 + n_2 + \cdots + \hat{n}_j + \cdots + n_r$ , donde  $\hat{n}_j$  significa que el sumando  $n_j$  no es parte de la suma.

Probaremos que el determinante que multiplica al factor  $n_1 \cdots n_{r-1}$  es distinto de cero. Para esto, realizaremos operaciones lineales en las columnas de la matriz de ese determinante, que no alteren el determinante.

Denotaremos a la  $i$ -ésima columna como  $c_i$ :

1. Cambiaremos la columna  $c_1$  por  $c_1 + \frac{N_1}{n_1}c_{r-1}$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & -n_1 & \cdots & -n_1 & -n_1 \\ -n_2 - \frac{N_1}{n_1}n_2 & N_2 & \cdots & -n_2 & -n_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -n_{r-2} - \frac{N_1}{n_1}n_{r-2} & -n_{r-2} & \cdots & N_{r-2} & -n_{r-2} \\ -n_{r-1} + \frac{N_1}{n_1}N_{r-1} & -n_{r-1} & \cdots & -n_{r-1} & N_{r-1} \end{vmatrix}. \quad (3.82)$$

2. Cambiaremos cada columna  $c_i$ , con  $i = 2, \dots, r-2$ , por  $c_i - c_{r-1}$ . Esto anula a todos los términos  $n_i$  de cada columna, y cambia los términos  $N_i$  por  $N_i + n_i$ , salvo en la fila  $r-1$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n_1 \\ -n_2 - \frac{N_1}{n_1}n_2 & N_2 + n_2 & \cdots & 0 & -n_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -n_{r-2} - \frac{N_1}{n_1}n_{r-2} & 0 & \cdots & N_{r-2} + n_{r-2} & -n_{r-2} \\ -n_{r-1} + \frac{N_1}{n_1}N_{r-1} & -n_{r-1} - N_{r-1} & \cdots & -n_{r-1} - N_{r-1} & N_{r-1} \end{vmatrix}. \quad (3.83)$$

Resolviendo por cofactores de la primer fila obtenemos:

<sup>8</sup>Otra manera de demostrar esto es observando que si sumamos a la primera fila todas las filas que están por debajo de ella, en cada entrada de la primera fila se obtiene  $n_r$ . Factorizando  $n_r$  del determinante podemos usar la primera fila, que ahora tiene en cada entrada un 1, para simplificar el determinante reduciéndolo al cálculo del determinante de una matriz triangular.

$$(-1)^{r+1}n_1 \begin{vmatrix} -n_2 - \frac{N_1}{n_1}n_2 & N_2 + n_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_{r-2} - \frac{N_1}{n_1}n_{r-2} & 0 & \cdots & N_{r-2} + n_{r-2} \\ -n_{r-1} + \frac{N_1}{n_1}N_{r-1} & -n_{r-1} - N_{r-1} & \cdots & -n_{r-1} - N_{r-1} \end{vmatrix}_{(r-2) \times (r-2)} \quad (3.84)$$

Denotemos  $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ , i.e., la suma de todos los  $n_j$  sin eliminar ninguno. Notemos que  $N_j + n_j = N$  para toda  $j$ .

3. Ahora, factoricemos los elementos  $n_j - \frac{N_1}{n_1}n_j$  de la primer columna como  $-n_j(1 + \frac{N_1}{n_1})$ . Y cambiaremos cada  $N_j + n_j$  por  $N$ :

$$(-1)^{r+1}n_1 \begin{vmatrix} -n_2(1 + \frac{N_1}{n_1}) & N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_{r-2}(1 + \frac{N_1}{n_1}) & 0 & \cdots & N \\ -n_{r-1} + \frac{N_1}{n_1}N_{r-1} & -N & \cdots & -N \end{vmatrix}_{(r-2) \times (r-2)} \quad (3.85)$$

4. Ahora factorizaremos  $(1 + \frac{N_1}{n_1})$  de la primer columna, y el valor  $N$  de cada columna  $i = 2, \dots, r-2$ . Denotaremos como  $X$  al cociente de  $-n_{r-1} + \frac{N_1}{n_1}N_{r-1}$  con  $1 + \frac{N_1}{n_1}$ , esto es

$$X = \frac{-n_{r-1}n_1 + N_{r-1}N_1}{n_1 + N_1} \quad (3.86)$$

Así, obtenemos

$$(-1)^{r+1}n_1(1 + \frac{N_1}{n_1})N^{r-3} \begin{vmatrix} -n_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_{r-2} & 0 & \cdots & 1 \\ X & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \quad (3.87)$$

5. Cambiemos la columna  $c_1$  por  $c_1 + n_2c_2$ :

$$(-1)^{r+1}n_1(1 + \frac{N_1}{n_1})N^{r-3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -n_3 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_{r-2} & 0 & \cdots & 1 \\ X - n_2 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \quad (3.88)$$

Repetiremos este proceso de para cada eliminar cada elemento  $-n_j$  de la primer columna. Nótese que cuando se elimina el término  $-n_j$ , mediante

este procedimiento, se suma un  $-n_j$ , con  $j = 2, \dots, r-2$ , a la última entrada de la columna  $c_1$ . De este modo  $|M|$  es igual a

$$(-1)^{r+1} n_1 \left(1 + \frac{N_1}{n_1}\right) N^{r-3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ X - \sum_{j=2}^{r-2} n_j & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}, \quad (3.89)$$

Resolviendo por cofactores de la primer columna obtenemos:

$$(-1)^{r+1} n_1 \left(1 + \frac{N_1}{n_1}\right) N^{r-3} (-1)^{r-1} \left(X - \sum_{j=2}^{r-2} n_j\right) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(r-3) \times (r-3)}, \quad (3.90)$$

Por lo que

$$|M| = (n_1 \cdots n_{r-1}) n_1 \left(1 + \frac{N_1}{n_1}\right) N^{r-3} \left(X - \sum_{j=2}^{r-2} n_j\right). \quad (3.91)$$

Ahora desarrollemos  $X - \sum_{j=2}^{r-2} n_j$ :  
Sustituyendo  $X$  por la expresión (3.86) se tiene:

$$X - \sum_{j=2}^{r-2} n_j = \frac{-n_{r-1} n_1 + N_{r-1} N_1}{n_1 + N_1} - \sum_{j=2}^{r-2} n_j,$$

es decir,

$$X - \sum_{j=2}^{r-2} n_j = \frac{-n_{r-1} n_1 + N_{r-1} N_1 - (n_1 + N_1) \sum_{j=2}^{r-2} n_j}{n_1 + N_1}. \quad (3.92)$$

Consideremos el numerador de la expresión anterior,

$$-n_{r-1} n_1 + N_{r-1} N_1 - (n_1 + N_1) \sum_{j=2}^{r-2} n_j. \quad (3.93)$$

Sustituyamos  $N_{r-1} = n_1 + n_2 + \cdots + n_{r-2} + n_r$  en la expresión anterior, esto es:

$$-n_{r-1} n_1 + (n_1 + n_2 + \cdots + n_{r-2} + n_r) N_1 - (n_1 + N_1) \sum_{j=2}^{r-2} n_j,$$

multipliquemos  $(n_1 + N_1)$  por la suma  $\sum_{j=2}^{r-2} n_j = n_2 + \cdots + n_{r-2}$ ; esto es,

$$-n_{r-1} n_1 + (n_1 + n_2 + \cdots + n_{r-2} + n_r) N_1 - n_1 (n_2 + \cdots + n_{r-2}) - N_1 (n_2 + \cdots + n_{r-2}),$$

entonces los términos  $N_1(n_2 + \cdots + n_{r-2})$  se cancelan en la expresión anterior, quedando lo siguiente

$$-n_{r-1}n_1 + (n_1 + n_r)N_1 - n_1(n_2 + \cdots + n_{r-2}),$$

ahora sustituyamos  $N_1 = n_2 + \cdots + n_r$  y multipliquemos  $N_1$  por  $n_1 + n_r$ ; esto es,

$$-n_{r-1}n_1 + n_1(n_2 + \cdots + n_{r-2} + n_{r-1} + n_r) + n_r(n_2 + \cdots + n_r) - n_1(n_2 + \cdots + n_{r-2}),$$

por lo que los términos  $n_1(n_2 + \cdots + n_{r-2})$  se cancelan, quedando

$$-n_{r-1}n_1 + n_1(n_{r-1} + n_r) + n_r(n_2 + \cdots + n_r).$$

Por último notemos que también el término  $n_{r-1}n_1$  se cancela, por lo que (3.93) es igual a

$$n_1n_r + n_r(n_2 + \cdots + n_r) = n_r(n_1 + n_2 + \cdots + n_r) = n_rN.$$

Así, de (3.92) tenemos que

$$X = \frac{n_rN}{n_1 + N_1}.$$

Sustituyendo  $X$  en (3.91) tenemos que

$$\begin{aligned} |M| &= (n_1 \cdots n_{r-1})n_1 \left(1 + \frac{N_1}{n_1}\right) N^{r-3} \left(X - \sum_{j=2}^{r-2} n_j\right) \\ &= (n_1 \cdots n_{r-1})n_1 \left(\frac{n_1 + N_1}{n_1}\right) N^{r-3} \frac{n_rN}{n_1 + N_1} \end{aligned}$$

Cancelando los términos  $n_1 + N_1$  y  $n_1$ , y agrupando  $N^{r-3}$  con  $N$  y  $(n_1 \cdots n_{r-1})$  con  $n_r$ , se tiene que

$$|M| = (n_1 \cdots n_r)N^{r-2}.$$

Como  $n_j \geq 1$  para toda  $j = 1, \dots, r$  y  $N = \sum_{j=1}^r n_j$ , tenemos que  $|M|$  es estrictamente positivo, y en particular no puede ser cero.  $\square$

**Corolario 3.6.3.** *La matriz  $M$  tiene determinante igual a  $(n_1 \cdots n_r)(\sum_{j=1}^r n_j)^{r-2}$ .*

Denotemos por  $V_\infty^*$  al espacio dual a  $V_\infty$ , en la cohomología de de Rham de la fibra regular de  $F$ ;  $V_\infty^* \subseteq H_{dR}^1(F^{-1}(z))$ . De este modo, el lema 3.6.2 nos dice que el conjunto  $\{\frac{df_j}{f_j}\}_{j=1}^{r-1}$  forma una base de  $V_\infty^*$ . Por otro lado, notemos que para cualquier  $\gamma(z)$  en  $H_1(F^{-1}(z))$  se tiene que  $\int_{\gamma(z)} F \frac{df_j}{f_j} = z \int_{\gamma(z)} \frac{df_j}{f_j}$ . Esto significa que si en la matriz  $M$ , del lema 3.6.2, consideramos el conjunto  $\{F \frac{df_j}{f_j}\}_{j=1}^{r-1}$  en vez de  $\{\frac{df_j}{f_j}\}_{j=1}^{r-1}$  también obtendremos que el determinante es distinto de cero (para valores genéricos de  $z$ ). Entonces el conjunto  $\{F \frac{df_j}{f_j}\}_{j=1}^{r-1}$  también es base de  $V_\infty^*$ , con la ventaja de que las 1-formas  $F \frac{df_j}{f_j}$  son polinomiales, a saber  $F \frac{df_j}{f_j} = \prod_{i \neq j} f_i df_j$ . Esto se puntualiza en el siguiente lema:

**Lema 3.6.3.** *Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , entonces las 1-formas  $\{\eta_j := F \frac{df_j}{f_j}\}_{j=1}^{r-1}$ , forman una base de  $V_\infty^*$ .*



## Capítulo 4

# Problema de monodromía para particiones

En este capítulo estudiaremos la órbita por monodromía de ciclos evanescentes para dos subconjuntos de la familia de polinomios  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  que se definió en la subsección 3.6.2.

Recordemos que el problema de monodromía nos pide determinar qué tanto espacio, en la 1-homología de la fibra regular, genera la órbita por monodromía de un ciclo evanescente.

Para este problema consideraremos dos subconjuntos dentro de la familia de polinomios  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ :

- (a) Uno en el que supondremos que, para cualesquiera  $p_0$  y  $p_1$ , puntos críticos de  $F$  de tipo centro, con  $p_0 \neq p_1$ , se tiene que  $F(p_0) \neq F(p_1)$ ,
- (b) y otro en el que supondremos que  $F$  es invariante bajo la reflexión  $S(-x, y) = (x, y)$ , de tal manera que sólo los puntos críticos de  $F$  de tipo centro que son simétricos bajo  $S$  puedan tener el mismo valor crítico.

En cada uno de estos casos exhibiremos a la órbita por monodromía de los ciclos evanescentes correspondientes a puntos críticos de tipo centro. Esto a su vez servirá para expresar a la 1-homología de la fibra regular de  $F$  en términos de la órbita por monodromía de un ciclo evanescente y su complemento.

### 4.1. Base especial para la 1-homología

En esta sección formaremos una base para la 1-homología de la fibra regular de  $F$ , que nos servirá para conocer a los ciclos que generan a la órbita por monodromía de cada ciclo evanescente de  $F$ , tanto para el caso (a) como para el caso (b) establecidos arriba.

Al final de esta sección calcularemos la órbita por monodromía para el subconjunto (a) de  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ .

Denotaremos por  $n$  al número de puntos críticos de  $F$  de tipo centro (reales) y por  $k$  al número de puntos críticos de  $F$  de tipo silla (reales) (como se estableció en la sección 3.5.3). Usaremos también la notación de los ciclos de la subsección 3.5.3; esto es, denotamos como  $\delta_i$  a los ciclos evanescentes en puntos críticos de  $F$  de tipo centro, y denotamos como  $\gamma_j$  a los ciclos evanescentes en puntos críticos de  $F$  de tipo silla.

Por el teorema 3.2.3 tenemos que los ciclos  $\{\delta_i(z)\}_{i=1}^n \cup \{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k$  son linealmente independientes. En el caso en que  $F$  define una buena partición, se tiene, por la proposición 3.5.1, que los ciclos  $\{\delta_i(z)\}_{i=1}^n \cup \{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k$  forman una base de  $H_1(F^{-1}(z))$ .

Consideremos la familia de ciclos definida en (3.33); esto es,

$$\tilde{\gamma}_i(z) = \text{Var}_0(\delta_i(z)) \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Usaremos esta familia de ciclos y los ciclos  $\sigma_j(z)$  de la definición (3.34) (contenidos en el espacio  $V_\infty$ ) para formar (junto con los ciclos  $\delta_i(z)$ ) una base de  $H_1(F^{-1}(z))$ .

**Lema 4.1.1.** *Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , entonces*

$$\langle \{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^n \rangle \cap \langle \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle = \{0\}.$$

*Demostración.* Supongamos que tenemos

$$\sum_{i=1}^n m_i \tilde{\gamma}_i(z) = \sum_{i=1}^{r-1} \nu_i \sigma_i(z), \quad (4.1)$$

con  $m_i, \nu_i \in \mathbb{Z}$ .

Consideremos las 1-formas  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$  con  $j = 1, \dots, r-1$ . Integremos  $\eta_j$ , con  $j = 1, \dots, r-1$ , a lo largo del ciclo (4.1); esto es,

$$\sum_{i=1}^n m_i \int_{\tilde{\gamma}_i(z)} \eta_j = \sum_{i=1}^{r-1} \nu_i \int_{\sigma_i(z)} \eta_j. \quad (4.2)$$

Observemos lo siguiente: consideremos el ciclo  $\delta_i(z)$ , que denota a un ciclo evanescente en un punto crítico de  $F$  de tipo centro. Supongamos que  $z$  es un valor regular tal que  $\delta_i(z)$  está contenido en  $\mathbb{R}^2$ . Como  $\delta_i(z)$  no rodea a ningún cero de  $f_j$  para toda  $j = 1, \dots, r-1$ , entonces  $\int_{\delta_i(z)} \eta_j = 0$ . Como  $\text{Var}_0(\delta_i(z)) = \tilde{\gamma}_i(z)$ , se tiene que  $0 = \text{Var}_0(\int_{\delta_i(z)} \eta_j) = \int_{\tilde{\gamma}_i(z)} \eta_j$  para toda  $j = 1, \dots, r-1$ .

Así, el lado izquierdo de (4.2) es igual a cero.

Ahora, integremos  $r-1$  de las 1-formas  $\eta_j$  a lo largo del ciclo (4.1);

$$0 = \sum_{i=1}^{r-1} \nu_i \int_{\sigma_i(z)} \eta_j, \quad j = 1, \dots, r-1. \quad (4.3)$$

En su forma matricial esto es:

$$\begin{pmatrix} \int_{\sigma_1(z)} \eta_1 & \int_{\sigma_2(z)} \eta_1 & \cdots & \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_1 \\ \int_{\sigma_1(z)} \eta_2 & \int_{\sigma_2(z)} \eta_2 & \cdots & \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\sigma_1(z)} \eta_{r-1} & \int_{\sigma_2(z)} \eta_{r-1} & \cdots & \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_{r-1} \end{pmatrix} = \bar{0}. \quad (4.4)$$

Notemos que, por el corolario 3.6.2 los ciclos  $\{\sigma_j(z)\}_{j=1}^{r-1}$  son una base de  $V_\infty$ , y por el lema 3.6.3 las 1-formas  $\{\eta_j\}_{j=1}^{r-1}$  son una base del dual de  $V_\infty$  en la 1-cohomología de de Rham de la fibra regular  $F^{-1}(z)$ . Por lo tanto la matriz  $\left(\int_{\sigma_i(z)} \eta_j\right)_{j,i=1,\dots,r-1}$  tiene determinante distinto de cero. Por lo que, la única solución del sistema anterior es  $\nu_i = 0$  para toda  $i = 1, \dots, r-1$ .

De la expresión (4.1) esto significa que el único ciclo en  $\langle \{\sigma_j(z)\}_{j=1}^{r-1} \rangle$  que se puede expresar como combinación lineal de los ciclos  $\{\tilde{\gamma}_j(z)\}$  es el ciclo trivial, lo que prueba el resultado.  $\square$

De esta manera, para polinomios en  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , tenemos que el conjunto  $\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^n \cup \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1}$  es linealmente independiente. Por lo que

$$\dim \langle \{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^n \cup \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle = n + r - 1.$$

**Proposición 4.1.1.** *Supongamos que  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  define una partición de  $\mathcal{D}$ , con  $r$  ramas,  $k$  puntos críticos de tipo silla reales y  $n$  puntos críticos de tipo centro reales. Entonces*

$$r - 1 + n = k.$$

*Demostración.* Para hacer la demostración seguiremos un razonamiento similar al que utiliza A'Campo (ver [1]), lema 4). A saber denotaremos por  $\alpha(J)$  a la imagen de la partición definida por  $F$  en  $\mathcal{D}$ . Si las ramas de la partición no se intersectan entre ellas en  $\partial\mathcal{D}$  entonces

$$\chi(\mathcal{D} - \alpha(J), \partial\mathcal{D}) + \chi(\alpha(J)) = \chi(\mathcal{D})$$

donde  $\chi$  denota a la característica de Euler. Como

$$\chi(\mathcal{D} - \alpha(J), \partial\mathcal{D}) = \#\{\text{regiones de la partición}\} = n,$$

$\chi(\alpha(J)) = r - k$  y  $\chi(\mathcal{D}) = 1$ , tenemos que

$$n + r - k = 1.$$

Despejando  $k$  de la expresión anterior se tiene el resultado.

Por otro lado, si algunas ramas de la partición se intersectan entre ellas en  $\partial\mathcal{D}$ , entonces deformamos ligeramente  $\alpha(J)$  de modo que se eviten estas intersecciones en  $\partial\mathcal{D}$  pero se conserve el mismo número de puntos dobles

y regiones de la partición (puntos críticos de tipo silla y de tipo centro). Esto es posible por la estabilidad de la transversalidad en la intersección de ramas en  $\tilde{\mathcal{D}}$ . Luego aplicamos la prueba anterior usando esta deformación, que por conservar los número  $n$  y  $k$  también da el resultado de la proposición.  $\square$

Notemos que  $\langle \{\tilde{\gamma}_i(z), \sigma_\ell(z)\}_{i=1, \ell=1}^{n, r-1} \rangle \subseteq \langle \{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k \rangle$ . Además, asumiendo las hipótesis del lema 4.1.1 tenemos que  $\dim \langle \{\tilde{\gamma}_i(z), \sigma_\ell(z)\}_{i=1, \ell=1}^{n, r-1} \rangle = n + r - 1$ . De este modo, por la proposición anterior se tiene que

$$\langle \{\tilde{\gamma}_i(z), \sigma_\ell(z)\}_{i=1, \ell=1}^{n, r-1} \rangle = \langle \{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k \rangle. \quad (4.5)$$

Por otro lado, ya que  $F$  define una buena partición de  $\mathcal{D}$ , se tiene que los ciclos  $\{\delta_i(z)\}_{i=1}^n \cup \{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k$  forman una base para la 1-homología de la fibra regular de  $F$  (proposición 3.5.1). Por la igualdad (4.5), podemos sustituir los ciclos  $\{\gamma_j(z)\}_{j=1}^k$  de la base de  $H_1(F^{-1}(z))$ , por los ciclos  $\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^n \cup \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1}$ .

**Corolario 4.1.1.** *Para  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , los ciclos  $\{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=1}^n \cup \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1} \cup \{\delta_i(z)\}_{i=1}^n$  forman una base de  $H_1(F^{-1}(z))$ , con  $z$  valor regular de  $F$ .*

**Lema 4.1.2.** *Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , y asumamos también que para cualesquiera  $p_0$  y  $p_1$ , puntos críticos de  $F$  de tipo centro distintos,  $F(p_0) \neq F(p_1)$ . Entonces, para cualquier ciclo evanescente  $\delta(z) \in H_1(F^{-1}(z))$ , con  $z$  valor regular de  $F$ , la órbita por monodromía de  $\delta(z)$  es generada por los ciclos  $\{\delta(z), \tilde{\gamma}_i(z), \delta_i(z)\}_{i=1}^n$ ;*

$$\text{Orb}(\delta(z)) = \langle \{\delta(z), \tilde{\gamma}_i(z), \delta_i(z)\}_{i=1}^n \rangle.$$

En particular, si  $\delta(z)$  es un ciclo evanescente con respecto a un punto crítico de  $F$  de tipo centro (en nuestra notación esto significa que  $\delta = \delta_i$  para alguna  $i = 1, \dots, n$ ) se tiene que

$$\text{Orb}(\delta(z)) = \langle \{\tilde{\gamma}_i(z), \delta_i(z)\}_{i=1}^n \rangle,$$

y, en este segundo caso,  $\dim(\text{Orb}(\delta(z))) = \dim \langle \{\tilde{\gamma}_i(z), \delta_i(z)\}_{i=1}^n \rangle = 2n$ .

*Demostración.* Ya que cada punto crítico de tipo centro está en un nivel crítico distinto, la conexidad del diagrama de Dynkin implica que todos los ciclos evanescentes en puntos críticos de tipo centro,  $\delta_i(z)$  con  $i = 1, \dots, n$ , pertenecen a la órbita por monodromía de cualquier ciclo evanescente en  $H_1(F^{-1}(z))$ . Luego considerando la monodromía de los ciclos  $\delta_i(z)$  alrededor de  $z = 0$  obtenemos también a los ciclos  $\tilde{\gamma}_i(z)$  (que por definición son la variación en  $z = 0$  de cada  $\delta_i(z)$ ).  $\square$

De este modo, cuando  $\delta$  es un ciclo evanescente correspondiente a un punto crítico de  $F$  de tipo centro, ya que  $\text{Orb}(\delta(z)) = \langle \{\tilde{\gamma}_i(z), \delta_i(z)\}_{i=1}^n \rangle$ , y por el corolario 3.6.2  $V_\infty = \langle \{\sigma_j(z)\}_{j=1}^{r-1} \rangle$ , se tiene del corolario 4.1.1 el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $F$  como en el lema 4.1.2,  $z$  un valor regular de  $F$  y  $\delta(z)$  un ciclo evanescente en un punto crítico de  $F$  de tipo centro. Entonces*

$$H_1(F^{-1}(z)) = \text{Orb}(\delta(z)) \oplus V_\infty.$$

## 4.2. Caso con una simetría

Ahora, veremos la versión del lema 4.1.2 para el caso en que  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  es invariante bajo la reflexión  $S(x, y) = (-x, y)$  (como en la subsección 3.5.4), y asumiremos que únicamente los puntos críticos de tipo centro, que son simétricos bajo  $S$  pueden estar en el mismo nivel crítico.

Para este caso, usaremos la notación establecida en la subsección 3.5.4. Esto es, denotaremos como  $p_{-i}$ ,  $p_{+i}$  y  $p_i$  a los puntos críticos de  $F$  de tipo centro contenidos en el semiplano real  $\{x < 0\}$ , en el semiplano  $\{x > 0\}$  y en el eje  $y$  respectivamente; y denotamos como  $\delta_{-i}$ ,  $\delta_{+i}$  y  $\delta_i$  a los ciclos evanescentes correspondientes los puntos críticos  $p_{-i}$ ,  $p_{+i}$  y  $p_i$  respectivamente. Y denotamos, a los ciclos definidos por la variación alrededor del cero de los ciclos evanescentes en puntos críticos de tipo centro (igual que en (3.33)) como:  $\tilde{\gamma}_{-i} = \text{Var}_0(\delta_{-i})$ ,  $\tilde{\gamma}_{+i} = \text{Var}_0(\delta_{+i})$  y  $\tilde{\gamma}_i = \text{Var}_0(\delta_i)$ .

Denotaremos por  $s$  al número de puntos críticos  $p_{-i}$ , que por simetría es el mismo número de puntos críticos  $p_{+i}$ . Como también estamos denotando como  $n$  al número de puntos críticos de tipo centro, entonces tenemos  $n - 2s$  puntos críticos sobre el eje  $y$ , i.e., puntos críticos  $p_i$ . Indexamos los ciclos  $\tilde{\gamma}_{-i}$ ,  $\tilde{\gamma}_{+i}$  y  $\tilde{\gamma}_i$  como en (3.54); i.e.,

$$\{\tilde{\gamma}_{-i}(z)\}_{i=1}^s, \quad \{\tilde{\gamma}_{+i}(z)\}_{i=1}^s \text{ y } \{\tilde{\gamma}_i(z)\}_{i=2s+1}^n.$$

Ya que las hipótesis del corolario 4.1.1 no tienen restricciones en los valores críticos de  $F$  en puntos críticos de tipo centro, entonces en particular también es válido en el caso en que  $F$  tiene simetrías. En la notación que estamos utilizando esto es:

**Corolario 4.2.1.** *Los ciclos*

$$\{\tilde{\gamma}_{-i}(z), \tilde{\gamma}_{+i}(z), \delta_{-i}(z), \delta_{+i}(z)\}_{i=1}^s \cup \{\tilde{\gamma}_i(z), \delta_i(z)\}_{i=2s+1}^n \cup \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1},$$

forman una base para la 1-homología de la fibra regular de  $F$ .

Sin embargo, para el caso con simetrías es conveniente considerar otra base para la 1-homología. Para esto, definiremos los siguientes ciclos:

$$\delta_{*i}(z) := \delta_{+i}(z) + \delta_{-i}(z), \quad \gamma_{*i}(z) := \tilde{\gamma}_{+i}(z) + \tilde{\gamma}_{-i}(z). \quad (4.6)$$

y

$$\delta_{\pm i}(z) := \delta_{+i}(z) - \delta_{-i}(z), \quad \tilde{\gamma}_{\pm i}(z) := \tilde{\gamma}_{+i}(z) - \tilde{\gamma}_{-i}(z). \quad (4.7)$$

Notemos que, como  $\{\delta_{-i}(z), \delta_{+i}(z)\}_{i=1}^s$  y  $\{\tilde{\gamma}_{-i}(z), \tilde{\gamma}_{+i}(z)\}_{i=1}^s$  son conjuntos linealmente independientes, entonces  $\{\delta_{*i}(z), \delta_{\pm i}(z)\}_{i=1}^s$  y  $\{\tilde{\gamma}_{*i}(z), \tilde{\gamma}_{\pm i}(z)\}_{i=1}^s$  también son conjuntos linealmente independientes.

**Corolario 4.2.2.** *Los ciclos*

$$\{\delta_{*i}(z), \delta_{\pm i}(z), \tilde{\gamma}_{*i}(z), \tilde{\gamma}_{\pm i}(z)\}_{i=1}^s \cup \{\delta_j(z), \tilde{\gamma}_j(z)\}_{j=2s+1}^n \cup \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1},$$

son un base de  $H_1(F^{-1}(z))$ , para  $z$  valor regular de  $F$ .

Ahora, veremos cuál es la órbita por monodromía de un ciclo en este caso:

Para esto, recordemos que estamos denotando como  $C_{-i}$  a la región que contiene al punto crítico  $p_{-i}$ ,  $C_{+i}$  a la región que contiene al punto crítico  $p_{+i}$  y  $C_i$  a la regiones que contienen a críticos  $p_i$ , con  $p_i$  punto crítico sobre el eje  $y$ . Con  $F(p_i) = z_i$  y  $F(p_{-i}) = F(p_{+i}) = z_{\pm i}$ , donde  $z_i \neq z_j$  para toda  $i \neq j$  y  $z_i \neq z_{\pm j}$  para toda  $i$  y para toda  $j$ ; estos es que sólo los puntos críticos de tipo centro, que sean simétricos bajo  $S$ , pueden estar en el mismo nivel crítico.

Sea  $\delta(z)$  es un ciclo evanescente en un punto crítico de tipo centro. Supongamos que  $\delta(z) = \delta_j(z)$ , para alguna  $j = 2s + 1, \dots, n$ ; es decir es ciclo evanescente en un punto crítico de tipo centro sobre el eje  $y$ .

Consideremos la región  $C_j$ , la cual acota al ciclo  $\delta_j(z)$ .

Supongamos que  $\partial\overline{C}_j$  interseca a otra región  $C_i$ ,  $i \neq j$ . Por definición de *partición* 3.5.1, esta intersección es un segmento o un punto. Entonces, si  $\partial\overline{C}_j \cap \partial\overline{C}_i$  es un segmento. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $z_j > 0$  y  $z_i < 0$ . Por la tabla (2.2) se tiene que  $(\delta_j(z), \delta_i(z)) = 1$ . Esto implica que  $\delta_i(z) \in \text{Orb}(\delta_j(z))$ .

Por otro lado, si  $\partial\overline{C}_j \cap \partial\overline{C}_i$  es un punto  $q$  de tipo silla, y  $\gamma(z)$  es el ciclo evanescente en el este punto. Entonces como  $(\delta_j(z), \gamma(z)) = 1$ , esto significa que  $\gamma(z)$  es un sumando de  $\tilde{\gamma}_j(z) = \text{Var}_0(\delta_j(z))$ .

Luego, como  $(\delta_i(z), \gamma(z)) = -1$ , y  $\gamma(z)$  es el único sumando de  $\tilde{\gamma}_j(z)$  que interseca a  $\delta_i(z)$ , entonces  $(\delta_i(z), \tilde{\gamma}_j(z)) = -1$ . De este modo, tenemos que  $\text{Var}_{z_i}(\tilde{\gamma}_j(z)) = \delta_i(z)$ .

Por lo que, también se tiene que

$$\delta_i(z) \in \text{Orb}(\delta_j(z)), \text{ para toda } i = 2s + 1, \dots, n.$$

Como  $\text{Var}_0(\delta_i(z)) = \tilde{\gamma}_i(z)$ , también tenemos que

$$\tilde{\gamma}_i(z) \in \text{Orb}(\delta_j(z)), \text{ para toda } i = 2s + 1, \dots, n.$$

Ahora, supongamos que  $\partial\overline{C}_j$  interseca a  $C_{+i}$  para alguna  $i = 1, \dots, s$ . Nuevamente, por definición de *partición* 3.5.1, esto es un segmento o un punto.

Supongamos que  $\partial\overline{C}_j \cap \partial\overline{C}_{+i}$  es un segmento. Notemos que esto significa que el valor crítico  $z_i$  correspondiente a  $p_i$ , tiene signo opuesto al valor crítico  $z_{\pm i}$  correspondiente a  $p_{+i}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $z_i > 0$  y  $z_{\pm i} < 0$ . Por la tabla (2.2) se tiene que  $(\delta_j(z), \delta_{+i}(z)) = 1$ .

Ahora, notemos que, por la simetría, si  $\partial\overline{C}_j$  interseca a  $\partial\overline{C}_{+i}$  en un segmento, entonces también interseca a  $\partial\overline{C}_{-i}$  en un segmento (simétrico al de  $\partial\overline{C}_{+i}$ ). De este modo, también se tiene que  $(\delta_j(z), \delta_{-i}(z)) = 1$ .

Por la fórmula de Picard-Lefschetz (3.28), y ya que  $p_{-i}$  y  $p_{+i}$  tienen el mismo valor crítico  $z_{\pm i}$ , tenemos que

$$\text{Var}_{z_{\pm i}}(\delta(z)) = \delta_{+i}(z) + \delta_{-i}(z).$$

Si  $\partial\bar{C}_j \cap \partial\bar{C}_{+i}$  es un punto  $q_{+i}$ , entonces éste es un punto crítico de  $F$  de tipo silla. Por la simetría  $\partial\bar{C}_j \cap \partial\bar{C}_{-i}$  también es un punto crítico  $q_{-i}$  de  $F$  de tipo silla, con  $S(q_{-i}) = q_{+i}$ . Sea  $\gamma_{+i}(z)$  el ciclo evanescente en el punto  $q_{+i}$ , y  $\gamma_{-i}(z)$  el ciclo evanescente en el punto  $q_{-i}$ . Notemos que  $\gamma_{+i}(z)$  y  $\gamma_{-i}(z)$  son sumandos de  $\tilde{\gamma}_j$ , donde  $Var_0(\delta_j(z)) = \tilde{\gamma}_j(z)$ .

Ahora, consideremos la variación de  $z_{\pm i}$  de  $Var_0(\delta_j(z)) = \tilde{\gamma}_j(z)$ . Esto es

$$Var_0(\tilde{\gamma}_j(z)) = \delta_{+i}(z) + \delta_{-i}(z),$$

pues  $(\tilde{\gamma}_j(z), \delta_{+i}(z)) = 1$  y  $(\tilde{\gamma}_j(z), \delta_{-i}(z)) = 1$ , ya que  $\gamma_{+i}(z)$  y  $\gamma_{-i}(z)$  son sumandos de  $\tilde{\gamma}_j$ .

De este modo, cuando  $\partial\bar{C}_j \cap \partial\bar{C}_{+i} \neq \emptyset$ , tenemos que

$$\delta_{-i}(z) + \delta_{+i}(z) \in Orb(\delta_j(z)).$$

Consideremos ahora la monodromía del ciclo  $\delta_{-i}(z) + \delta_{+i}(z)$ . Notemos que, si la región  $C_{-i}$  interseca a otra región  $C_{-i'}$ , entonces  $C_{+i}$  interseca a la región  $C_{+i'}$ . Repitiendo los argumentos usados para la monodromía de  $\delta_j(z)$ , se puede verificar que

$$\delta_{-i'}(z) + \delta_{+i'}(z) \in Orb(\delta_{-i}(z) + \delta_{+i}(z)). \quad (4.8)$$

Ya que  $\delta_{-i}(z) + \delta_{+i}(z) \in Orb(\delta_j(z))$ , (4.8) significa que  $\delta_{-i'}(z) + \delta_{+i'}(z) \in Orb(\delta_j(z))$ .

De esta manera, por la conexidad<sup>1</sup> del *diagrama de Dynkin* (subsección 3.5.1) de la partición definida por  $F$ , tenemos que

$$\delta_{-i}(z) + \delta_{+i}(z) \in Orb(\delta_j(z)), \text{ para toda } i = 1, \dots, s.$$

Con la notación (4.6) esto es

$$\delta_{*i}(z) \in Orb(\delta_j(z)), \text{ para toda } i = 1, \dots, s.$$

Ahora, notemos que,

$$Var_0(\delta_{-i}(z) + \delta_{+i}(z)) = \tilde{\gamma}_{-i}(z) + \tilde{\gamma}_{+i}(z),$$

por lo que, también se tiene

$$\tilde{\gamma}_{-i}(z) + \tilde{\gamma}_{+i}(z) \in Orb(\delta_j(z)), \text{ para toda } i = 1, \dots, s.$$

Con la notación (4.6) esto es

$$\tilde{\gamma}_{*i}(z) \in Orb(\delta_j(z)), \text{ para toda } i = 1, \dots, s.$$

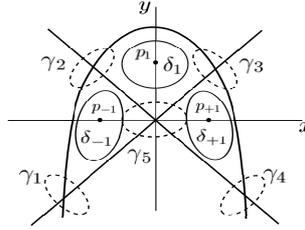
Por otro lado, notemos que si tomamos ahora  $\delta(z) = \delta_{-j}(z)$ , o  $\delta(z) = \delta_{+j}(z)$ , para alguna  $j = 1, \dots, s$ ; por monodromía, y por conexidad del diagrama de Dynkin, se puede verificar que  $\delta_i(z) \in Orb(\delta(z))$  para alguna  $i = 2s + 1, \dots, n$ . Por lo que, también tenemos que

$$\delta_\nu(z), \tilde{\gamma}_\nu(z), \delta_{*\tau}(z), \gamma_{*\tau}(z) \in Orb(\delta(z)),$$

para toda  $\nu = 2s + 1, \dots, n$ , y para toda  $\tau = 1, \dots, s$ .

<sup>1</sup>Que es una de las condiciones para definir una buena partición de  $\mathcal{D}$ .

**Ejemplo 4.2.1.** Consideremos el polinomio  $F = (x^2 + y - 1)(x - y)(x + y)$  que es invariante bajo la reflexión  $S(x, y) = (-x, y)$ . Éste tiene 3 puntos críticos de tipo centro y 5 puntos críticos de tipo silla. Con el cambio de coordenadas  $\tilde{x} = 2x - y$  y  $\tilde{y} = x$ , se tiene que la proyección en el eje  $\tilde{x}$  es suprayectiva y el discriminante de  $F$  respecto a  $\tilde{y}$  tiene grado en  $\tilde{x}$  igual a 11, y éste no depende de  $z$ , por lo que  $\rho(F) = 0$ . También se puede verificar que  $F$  satisface las condiciones (1), (2) y (4) de la definición 3.5.1.



Usando la fórmula de Picard-Lefschetz (3.28), tenemos que  $Mon_0(\delta_1(z)) = \delta_1(z) + \tilde{\gamma}_1(z) = \delta_1(z) + \gamma_2(z) + \gamma_3(z) + \gamma_5(z)$ . Por otro lado, ya que  $F(p_{-1}) = F(p_{+1}) = z_{\pm 1}$ , entonces  $Mon_{z_{\pm 1}}(\delta_1(z)) = \delta_1(z) + \delta_{-1}(z) + \delta_{+1}(z)$  y  $Mon_0(\delta_{-1}(z) + \delta_{+1}(z)) = \delta_{-1}(z) + \delta_{+1}(z) + \tilde{\gamma}_{-1}(z) + \tilde{\gamma}_{+1}(z)$ . De este modo, obtenemos que:

$$\begin{aligned} Orb(\delta_1(z)) &= \langle \{\delta_1(z), \tilde{\gamma}_1(z), \delta_{-1}(z) + \delta_{+1}(z), \tilde{\gamma}_{-1}(z) + \tilde{\gamma}_{+1}(z)\} \rangle \\ &= \langle \{\delta_1(z), \tilde{\gamma}_1(z), \delta_{*1}(z), \tilde{\gamma}_{*1}(z)\} \rangle . \end{aligned}$$

Del análisis anterior, se tiene el siguiente lema:

**Lema 4.2.1.** Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , tal que  $F$  es invariante bajo la reflexión  $S(x, y) = (-x, y)$ , y que sólo los puntos críticos de tipo centro que sean simétricos bajo  $S$  pueden tener el mismo valor crítico. Sea  $\delta(z) \in H_1(F^{-1}(z)) \setminus \langle \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1} \rangle$  un ciclo evanescente en un punto crítico de tipo centro de  $F$ , entonces:

1. Si  $\delta(z)$  es un ciclo evanescente, correspondiente a un punto crítico de tipo centro en el eje  $y$ ; en la numeración que usamos esto es  $\delta(z) = \delta_j(z)$ , para alguna  $j = 2s + 1, \dots, n$ , se tiene que

$$Orb(\delta(z)) = \langle \{\tilde{\gamma}_{*i}(z), \delta_{*i}(z)\}_{i=1}^s \cup \{\tilde{\gamma}_i(z), \delta_i(z)\}_{i=2s+1}^n \rangle,$$

y  $\dim Orb(\delta(z)) = 2s + 2(n - 2s) = 2n - 2s$ , donde  $s$  es el número de puntos críticos de  $F$  de tipo centro, en el semiplano  $\{x > 0\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

2. Si  $\delta(z) = \delta_{-i}(z)$ , o  $\delta(z) = \delta_{+i}(z)$ , para alguna  $i = 1, \dots, s$ ; i.e.,  $\delta(z)$  es un ciclo evanescente en un punto crítico de tipo centro ubicado en alguno de los semiplanos  $\{x > 0\}$  o  $\{x < 0\}$ , entonces los sumandos de los ciclos  $\tilde{\gamma}_{*i}(z) = \tilde{\gamma}_{-i}(z) + \tilde{\gamma}_{+i}(z)$  y  $\delta_{*i}(z) = \delta_{-i}(z) + \delta_{+i}(z)$  están en la órbita por monodromía de  $\delta(z)$ , así

$$Orb(\delta(z)) = \langle \{\tilde{\gamma}_{-i}(z), \tilde{\gamma}_{+i}(z), \delta_{-i}(z), \delta_{+i}(z)\}_{i=1}^s \cup \{\tilde{\gamma}_i(z), \delta_i(z)\}_{i=2s+1}^n \rangle,$$

$$y \dim \mathcal{O}rb(\delta(z)) = 4s + 2(n - 2s) = 2n.$$

Definamos  $V_S$  como el subespacio en  $H_1(F^{-1}(z))$ , generado por los ciclos  $\delta_{\pm i}(z)$  y  $\gamma_{\pm i}(z)$  (4.7):

$$V_S = \langle \{\delta_{\pm i}(z), \gamma_{\pm i}(z)\}_{i=1}^s \rangle.$$

Y retomemos el espacio  $V_\infty = \langle \{\sigma_j(z)\}_{j=1}^{r-1} \rangle$  (por el corolario 3.6.2).

Entonces, por el corolario 4.2.2 y por el lema 4.2.1, tenemos lo siguiente:

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  como en el lema 4.2.1, y sea  $\delta(z)$  un ciclo evanescente en un punto crítico de  $F$  de tipo centro. Entonces*

1. *Si  $\delta(z) = \delta_j(z)$ , para alguna  $j = 2s + 1, \dots, n$ ,*

$$H_1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z)) \oplus V_\infty \oplus V_S.$$

2. *Si  $\delta(z) = \delta_{-j}(z)$ , o  $\delta(z) = \delta_{+j}(z)$ , para alguna  $j = 1, \dots, s$ ,*

$$H_1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z)) \oplus V_\infty.$$

Los resultados de los teoremas 4.1.1 y 4.2.1 nos muestran que, dentro de la familia  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , la órbita por monodromía de un ciclo evanescente no necesariamente genera a toda la 1-homología de la fibra regular. Además, caracterizan a los ciclos que se encuentran en el complemento de la órbita por monodromía. Estos resultados son fundamentales en el siguiente capítulo para llegar a caracterizar a las 1-formas polinomiales cuya integral a lo largo de un ciclo evanescente sea idénticamente cero.



## Capítulo 5

# Problema tangencial del centro: dos casos no genéricos

En este capítulo abordaremos el problema tangencial del centro para dos subconjuntos en la familia de polinomios  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  (ver subsección 3.6.2).

Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , y  $\eta$  una 1-forma polinomial. Perturbemos la foliación hamiltoniana  $dF = 0$  de la siguiente manera:

$$dF + \varepsilon\eta = 0, \quad (5.1)$$

donde  $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$  es un parametro real suficientemente pequeño. Sea  $\delta(z)$ ,  $z \in (\mathbb{R}, z_0)$ , una familia continua de órbitas periódicas regulares. Como se vió en la sección 3.1, la primera variación de la función de desplazamiento respecto a la familia continua de ciclos  $\delta(z)$ , está dada por la integral abeliana  $\int_{\delta(z)} \eta$  (teorema 3.1.1). Además los ciclos límite de la perturbación (5.1) que se bifurcan de los ciclos<sup>1</sup>  $\delta(z)$  corresponden a los ceros aislados de la integral  $\int_{\delta(z)} \eta$ . Cuando la integral  $\int_{\delta(z)} \eta$  es idénticamente cero, entonces los ceros aislados de la siguiente variación de orden superior (en la función de desplazamiento) que no sea idénticamente cero<sup>2</sup> dan una cota superior del número límite que se bifurca de la familia de ciclos  $\delta(z)$  con  $z \in (\mathbb{R}, z_0)$  (proposición 3.1.1). El problema tangencial del centro nos pide dar las condiciones en los ciclos  $\delta(z)$ , el polinomio  $F$  y la 1-forma  $\eta$  para que la integral  $\int_{\delta(z)} \eta$  se anule idénticamente, para valores de  $z$  en la vecindad de algún valor regular  $z_0$ .

Como se hizo para el problema de monodromía (capítulo 4), daremos la solución de este problema para dos subconjuntos de polinomios en  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ ; uno conformado por polinomios en  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  tales que todos sus puntos críticos de tipo centro están en niveles críticos distintos; y el otro conformado de polinomios

---

<sup>1</sup>lejos de policiclos

<sup>2</sup>llamada función principal de Poincaré-Pontryaguin.

en  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  que son invariantes bajo la reflexión  $S(x, y) = (-x, y)$ , y tales que únicamente los puntos críticos de tipo centro que sean simétricos bajo  $S$  pueden estar en el mismo nivel crítico.

## 5.1. Perturbación de buenas particiones de $\mathbb{R}P^2$

En esta sección nos enfocaremos en demostrar el siguiente teorema<sup>3</sup>:

**Teorema 5.1.1.** *Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ . Asumamos que, para cualquier par de puntos críticos de  $F$  de tipo centro  $p_0 \neq p_1$ , se tiene que  $F(p_0) \neq F(p_1)$ .*

*Sea  $\eta$  una 1-forma polinomial en  $\mathbb{C}^2$ , y sea  $\delta(z) \in H_1(F^{-1}(z))$ , con  $z$  valor regular de  $F$ , un ciclo evanescente correspondiente a un punto crítico de  $F$  de tipo centro. Entonces  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , si y sólo si, existen  $b, q_j \in \mathbb{C}[F]$ , donde los ceros de  $b$  están contenidos en los valores críticos de  $F$ , y  $g, R \in \mathbb{C}[x, y]$ , tales que*

$$b(F)\eta = \sum_{j=1}^{r-1} q_j(F)\eta_j + g dF + dR,$$

donde  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$  para  $j = 1, \dots, r-1$ .

Para demostrar ese teorema, tomemos en cuenta lo siguiente:

Asumamos todas las hipótesis del enunciado del teorema 5.1.1. Sea  $z$  un valor regular de  $F$ . Denotamos por  $\mathcal{O}rb(\delta(z))^*$  y  $V_\infty^*$  a los espacios duales a  $\mathcal{O}rb(\delta(z))$  y  $V_\infty$ , respectivamente, en la 1-cohomología de de Rham de  $F^{-1}(z)$ .

Por otro lado, ya que se satisfacen las hipótesis del teorema 4.1.1, tenemos que

$$H_1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z)) \oplus V_\infty,$$

con  $\dim H_1(F^{-1}(z)) = k+n = \mu(F)$ , donde  $k$  es el número de puntos críticos de  $F$  de tipo silla, y  $n$  es el número de puntos críticos de  $F$  de tipo centro. Notemos que, por la proposición 4.1.1  $k = n+r-1$ , por lo que  $\dim H_1(F^{-1}(z)) = 2n+r-1$ . Además  $\dim \mathcal{O}rb(\delta(z)) = 2n$  y  $\dim V_\infty = r-1$ . Consideremos los espacios duales en la 1-cohomología de de Rham:

$$H_{dR}^1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z))^* \oplus V_\infty^*.$$

Por el teorema de de Rham algebraico [17], podemos tomar una base

$$\beta = \{\omega_i\}_{i=1}^{\mu(F)}, \tag{5.2}$$

de  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$ , con  $\omega_i$  1-formas polinomiales, para toda  $i = 1, \dots, \mu(F)$ . Indexamos esta base de modo que  $\{\omega_i\}_{i=1}^{r-1}$  sea base de  $V_\infty^*$ , y que  $\{\omega_i\}_{i=r}^{\mu(F)}$  sea base

<sup>3</sup>teorema 2.2.1 de la introducción.

de  $\text{Orb}(\delta(z))^*$ .

Denotamos (como en la sección 4.1 y en la subsección 3.6.2)

$$\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}, \quad j = 1, \dots, r-1. \quad (5.3)$$

Por el lema 3.6.3,  $\{\eta_j\}_{j=1}^{r-1}$  es una base de  $V_\infty^*$ .

**Lema 5.1.1.** *Consideremos la base  $\beta$ . Entonces, las integrales abelianas  $\int_{\delta(z)} \omega_i$ , con  $i = r, \dots, \mu(F)$ , forman una base del  $\mathbb{C}(z)$  espacio vectorial  $\mathcal{P}_{\delta(z)}$ .*

*Demostración.* Consideremos las formas  $\{\eta_j\}_{j=1}^{r-1}$  como en (5.3), las cuales son base de  $V_\infty^*$ .

Expresemos cada  $\omega_i$ , para  $i = 1, \dots, r-1$ , como combinación lineal de los elementos  $\{\eta_j\}_{j=1}^{r-1}$ :

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{r-1} c_{ij} \eta_j, \quad (5.4)$$

con  $c_{ij}$  funciones complejas que dependen de  $z$ .

Sea  $\eta$  una 1-forma polinomial, y consideremos su restricción a la fibra regular  $F^{-1}(z)$ ;  $\eta|_{F^{-1}(z)}$ . Entonces la clase de  $\eta|_{F^{-1}(z)}$  en  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$  puede expresarse en términos de la base  $\beta$ ;

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{i=1}^{\mu(F)} a_i \omega_i,$$

con  $a_i$  funciones racionales en  $\mathbb{C}$  ([26] p.534, [2]). Utilizando la expresión (5.4), esto se reescribe como

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{i=1}^{r-1} a_i \sum_{j=1}^{r-1} c_{ij} \eta_j + \sum_{i=r}^{\mu(F)} a_i \omega_i. \quad (5.5)$$

Ahora, consideremos la integral de  $\eta$  en el ciclo  $\delta(z)$ . Notemos que, como  $\delta(z)$  está contenido en la fibra regular  $F^{-1}(z)$ , esto es lo mismo que integral la 1-forma  $\eta$  restringida a  $F^{-1}(z)$ . Así,

$$\int_{\delta(z)} \eta = \int_{\delta(z)} \eta|_{F^{-1}(z)} = \int_{\delta(z)} \sum_{i=1}^{r-1} a_i \sum_{j=1}^{r-1} c_{ij} \eta_j + \sum_{i=r}^{\mu(F)} a_i \omega_i. \quad (5.6)$$

Como  $\delta(z)$  no rodea a las ceros de  $f_j$  para ninguna  $j = 1, \dots, r$ , tenemos que  $\int_{\delta(z)} \eta_j = 0$  para toda  $j = 1, \dots, r-1$ .

De este modo, la integral (5.6) es igual a

$$\int_{\delta(z)} \eta = \sum_{i=r}^{\mu(F)} a_i \int_{\delta(z)} \omega_i, \quad (5.7)$$

Como la expresión (5.7) es válida para cualquier 1-forma polinomial  $\eta$ , tenemos que el  $\mathbb{C}(z)$  espacio vectorial  $\mathcal{P}_{\delta(z)}$  en  $\delta(z)$  es generado por las integrales abelianas  $\{\int_{\delta(z)} \omega_i\}_{i=r}^{\mu(F)}$ .

Ahora, notemos que  $\#\{\int_{\delta(z)} \omega_i\}_{i=r}^{\mu(F)} = \mu(F) - r + 1$  es igual a la dimensión de  $\mathcal{O}rb(\delta(z))$ , ya que  $\{\omega_i\}_{i=r}^{\mu(F)}$  es base del dual de  $\mathcal{O}rb(\delta(z))$  en la 1-cohomología de de Rham (por definición de la base  $\beta$  (5.2)).

Por otro lado, por la proposición 3.3.1, tenemos que  $\dim \mathcal{O}rb(\delta(z)) \leq \dim \mathcal{P}_{\delta(z)}$ .

Como  $\mathcal{P}_{\delta(z)}$  es generado por las integrales abelianas  $\{\int_{\delta(z)} \omega_i\}_{i=r}^{\mu(F)}$ , entonces el conjunto  $\{\int_{\delta(z)} \omega_i\}_{i=1}^{\mu(F)}$  tiene que ser linealmente independiente. De otra manera, la dimensión de  $\mathcal{O}rb(\delta(z))$  sería mayor que la dimensión de  $\mathcal{P}_{\delta(z)}$ . De este modo, se tiene que  $\dim \mathcal{O}rb(\delta(z)) = \dim \mathcal{P}_{\delta(z)}$ , y las integrales abelianas  $\{\int_{\delta(z)} \omega_i\}_{i=r}^{\mu(F)}$  forman una base de  $\mathcal{P}_{\delta(z)}$ .  $\square$

Notemos que la expresión (5.5), también se puede escribir como:

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j \eta_j + \sum_{i=r}^{\mu(F)} a_i \omega_i, \quad (5.8)$$

con  $p_j$  y  $a_i$  funciones racionales en  $\mathbb{C}$  definidas en  $z$ .

**Lema 5.1.2.** Si  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , entonces  $a_i \equiv 0$  para toda  $i = r, \dots, \mu(F)$ , y la clase de  $\eta|_{F^{-1}(z)}$  en  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$  está dada por  $\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \eta_j$ .

*Demostración.* Consideremos la expresión (5.8), e integremos  $\eta$  en  $\delta(z)$ :

$$\int_{\delta(z)} \eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \int_{\delta(z)} \eta_j + \sum_{i=r}^{\mu(F)} a_i(z) \int_{\delta(z)} \omega_i.$$

Como  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$  y  $\int_{\delta(z)} \eta_j \equiv 0$ , para toda  $j = 1, \dots, r-1$ , se tiene

$$0 \equiv \sum_{i=r}^{\mu(F)} a_i(z) \int_{\delta(z)} \omega_i.$$

Como los elementos de  $\{\int_{\delta(z)} \omega_i\}_{i=r}^{\mu(F)}$  son linealmente independientes (por el lema anterior), se tiene que  $a_i \equiv 0$  para toda  $i = r, \dots, \mu(F)$ .

Por lo que,

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \eta_j, \quad \text{en } H_{dR}^1(F^{-1}(z)). \quad (5.9)$$

$\square$

Ahora, daremos la expresión explícita de los coeficientes  $p_j$ . Para esto, consideremos el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\int_{\sigma_j(z)} \eta = \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \int_{\sigma_j(z)} \eta_j, \text{ con } j = 1, \dots, r-1.$$

Este es un sistema de  $r-1$  ecuaciones con  $r-1$  incógnitas  $p_j(z)$ :

$$\begin{pmatrix} \int_{\sigma_1(z)} \eta_1 & \cdots & \int_{\sigma_1(z)} \eta_{r-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_1 & \cdots & \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(z) \\ \vdots \\ p_{r-1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\sigma_1(z)} \eta \\ \vdots \\ \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Denotemos como  $N$  a la matriz

$$\begin{pmatrix} \int_{\sigma_1(z)} \eta_1 & \cdots & \int_{\sigma_1(z)} \eta_{r-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_1 & \cdots & \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_{r-1} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

y denotemos  $N_j$  a la matriz que se obtiene de sustituir la columna  $j$ -ésima columna de  $N$  por el vector  $(\int_{\sigma_1(z)} \eta, \dots, \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta)$ ; esto es,

$$\begin{pmatrix} \int_{\sigma_1(z)} \eta_1 & \cdots & \int_{\sigma_1(z)} \eta_{j-1} & \int_{\sigma_1(z)} \eta & \int_{\sigma_1(z)} \eta_{j+1} & \cdots & \int_{\sigma_1(z)} \eta_{r-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_1 & \cdots & \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_{j-1} & \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta & \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_{j+1} & \cdots & \int_{\sigma_{r-1}(z)} \eta_{r-1} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Por la *regla de Cramer* se tiene que

$$p_j(z) = \frac{\det N_j}{\det N} \quad (5.13)$$

Notemos que  $\det N \neq 0$  ya que  $\{\eta_j\}_{j=1}^{r-1}$  es base de  $V_\infty^*$  (por el lema 3.6.3), y  $\{\sigma_j(z)\}_{j=1}^{r-1}$  es base de  $V_\infty$  (por el corolario 3.6.2).

**Lema 5.1.3.** *Los coeficientes  $p_j$  son funciones racionales en  $\mathbb{C}$  con a lo más polos en  $\Sigma_F$ .*

*Demostración.* Por el lema 3.5.1 los ciclos  $\sigma_j(z)$  son invariantes por monodromía. Por lo tanto, los determinantes  $\det N$  y  $\det N_j$  son funciones univaluadas en  $\mathbb{C} - \Sigma_F$ , donde  $\Sigma_F$  es el conjunto de valores críticos de  $F$ . Por la expresión (5.13) esto significa que  $p_j$  también es una función univaluada en  $\mathbb{C} - \Sigma_F$ .

Por otro lado, cada integral abeliana en  $\det N$  y  $\det N_j$  tienen crecimiento acotado por un polinomio en  $|z|$  por sectores en  $\mathbb{C}$  ([26], p.533; [2], p.276). Por lo que,  $\det N$  y  $\det N_j$  son funciones polinomiales.

Notemos también que,  $\det N$  y  $\det N_j$  se pueden anular en los valores críticos de  $F$ , pues la dimensión de la 1-homología de la fibra crítica de  $F$  es menor que la dimensión de la 1-homología de la fibra regular de  $F$  (se pierde dimensión debido a que  $H_1(F^{-1}(z))$  tiene una base de ciclos evanescentes, y al tomar  $z$  valores críticos, algunos de los ciclos evanescentes se contraen en puntos críticos), de este modo, cuando  $z$  toma algún valor  $z_i \in \Sigma_F$ , los ciclos  $\{\sigma_j(z_i)\}_{j=1}^{r-1}$  ya no necesariamente son linealmente independientes. De este modo, se tiene que  $p_j$  es una función racional en  $\mathbb{C}$ , con a lo más polos en  $\Sigma_F$ .  $\square$

Ya que  $z$  denota a los valores de  $F$ , el lema anterior significa que  $p_j(F)$  es una función racional en  $F$ , i.e.,  $p_j \in \mathbb{C}(F)$ , con a lo más polos en los valores  $F = z_i$  con  $z_i \in \Sigma_F$ .

Con esto ya tenemos los elementos para probar el teorema 5.1.1 como sigue:

*Demostración.* Teorema 5.1.1

Definamos

$$\tilde{\eta} = \eta - \sum_{j=1}^{r-1} p_j(F) \eta_j,$$

donde  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$  y las funciones  $p_j$  satisfacen la expresión (5.9) para  $\eta$ . Por el lema anterior, las funciones  $p_j$  son funciones racionales en  $F$  con a lo más polos en los valores  $F = z_i$ , para  $z_i \in \Sigma_F$ .

Denotemos  $\alpha_i = \max_j \{\text{ord}_{z_i} p_j\}$ , donde  $\text{ord}_{z_i} p_j$  denota el orden del polo  $z_j$  de  $p_j$ . Sea  $b(F) = \prod_{z_i \in \Sigma_F} (F - z_i)^{\alpha_i}$ . De modo que,  $b(F)p_j(F)$  es polinomial, para toda  $j$ .

Ahora, multipliquemos  $\tilde{\eta}$  por  $b(F)$ ;

$$b(F)\tilde{\eta} = b(F)\eta - b(F) \sum_{j=1}^{r-1} p_j(F) \eta_j,$$

así,  $b(F)\tilde{\eta}$  es una 1-forma polinomial en  $\mathbb{C}^2$ .

La integral de  $b(F)\tilde{\eta}$  a lo largo de cualquier ciclo  $\gamma(z)$  en  $H_1(F^{-1}(z))$  es:

$$b(z) \int_{\gamma(z)} \tilde{\eta} = b(z) \int_{\gamma(z)} \eta - \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \eta_j$$

Por otro lado, por la expresión (5.9), se tiene que

$$\int_{\gamma(z)} \eta - \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \eta_j \equiv 0,$$

para cualquier  $\gamma(z) \in H_1(F^{-1}(z))$ . Es decir,  $b(F)\tilde{\eta}$  es una 1-forma polinomial que satisface que  $\int_{\gamma(z)} b(F)\tilde{\eta} \equiv 0$ , para toda  $\gamma(z) \in H_1(F^{-1}(z))$ .

Ahora, definiremos una función, que denotaremos como  $R$  de la siguiente manera:

Sin pérdida de generalidad, supongamos que para todo valor  $c \in \mathbb{C}$ ,  $F^{-1}(c)$  interseca al eje  $y$  en  $d = \deg F$  puntos contados con multiplicidad. Denotemos a estos punto como  $y_i$ , con  $i = 1, \dots, d$ .

Para cualquier punto regular  $(x, y)$  en  $\mathbb{C}^2$ , consideremos la superficie  $F^{-1}(z)$  que lo contiene; es decir,  $z = F(x, y)$ .

Como  $F$  es un *polinomio bueno* (sección 3.4), i.e.,  $\rho(F) = 0$ , se tiene que  $F^{-1}(z)$  es conexa [15]. Sea  $l_i(x, y)$  una trayectoria contenida en  $F^{-1}(z)$ , que une al punto  $(x, y)$  con el punto  $(0, y_i)$ .

Definamos  $R(x, y) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \int_{l_i(x, y)} b(F)\tilde{\eta}$ . Como  $\int_{\gamma(z)} b(F)\tilde{\eta} \equiv 0$  para toda  $\gamma(z) \in H_1(F^{-1}(z))$ , tenemos que  $R$  está bien definida. Además, pueden elegir las trayectorias  $l_i(x, y)$  de manera que dependan analíticamente de  $(x, y)$ . Para esto, consideremos la proyección de  $F^{-1}(z)$  en el eje  $x$ ;  $\pi_1 : F^{-1}(z) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\pi_1(x, y) = x$ , y tomemos una curva en el eje  $x$  que conecte el punto  $x$  con el origen, y que no pase por puntos de ramificación de esa proyección. El levantamiento de esa curva define una curva  $l_i(x, y)$ , que depende analíticamente de  $x$  y de  $y$ .

Denotemos por  $S$  al conjunto de fibras de  $F$ , que tienen tangencias con el eje  $y$ ; esto es un número finito de fibras, pues por el teorema de Bézout [13]  $\#\{\frac{\partial F}{\partial y} = 0\}$  interseca a  $\{x = 0\}$  en un número finito de puntos. De este modo,  $R$  es una función analítica en  $\mathbb{C}^2 \setminus \{L_{z_i}\}_{z_i \in \Sigma_F} \cup S$ , donde  $L_{z_i} = F^{-1}(z_i)$ .

Como  $b(F)\tilde{\eta}$  es polinomial se tiene que  $R(x, y) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \int_{l_i(x, y)} b(F)\tilde{\eta}$  tiene crecimiento acotado por un polinomio en  $|(x, y)|$ . Luego como  $\{L_{z_i}\}_{z_i \in \Sigma_F} \cup S$  es un conjunto algebraico, del teorema de extensión de Riemann [19] se sigue que  $R$  se extiende analíticamente en  $\mathbb{C}^2$ . Por lo que  $R$  es un polinomio.

Además, por definición se satisface que  $b(F)\tilde{\eta} - dR$  se anula en todos los vectores tangentes a las superficies de nivel de  $F$ . Por lo que, existe una función  $g$  tal que

$$b(F)\tilde{\eta} - dR = gdF, \quad (5.14)$$

con  $g$  analítica en  $\mathbb{C}^2 \setminus \{\text{puntos críticos de } F\}$ .

Pero,  $F$  tiene una cantidad finita de puntos críticos, por lo que, por el teorema de extensión de Hartogs [19],  $g$  se extiende analíticamente en  $\mathbb{C}^2$ . Luego, como  $b(F)\tilde{\eta}$ ,  $R$  y  $F$  son polinomiales, de la expresión (5.14) se sigue que  $g$  es también un polinomio.

Sustituyendo  $b(F)\tilde{\eta} = b(F)\eta - b(F) \sum_{j=1}^{r-1} p_j(F)\eta_j$ , en la expresión (5.14), se tiene que

$$b(F)\eta - b(F) \sum_{j=1}^{r-1} p_j(F)\eta_j - dR = gdF.$$

Denotemos  $q_j(F) = b(F)p_j(F)$ , que es un polinomio en  $F$  por pues  $b(F)$  cancela a los posibles polos de  $p_j$ .

Finalmente, despejando  $b(F)\eta$  se tiene,

$$b(F)\eta = \sum_{j=1}^{r-1} q_j(F)\eta_j + gdF + dR.$$

donde  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$ ,  $q_j \in \mathbb{C}[F]$  y  $g, R \in \mathbb{C}[x, y]$ . □

## 5.2. Caso con una simetría

En esta sección resolveremos el problema tangencial del centro para el subconjunto de  $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$  constituido por polinomios que son invariante bajo la reflexión  $S(x, y) = (-x, y)$ , y tales que únicamente los puntos críticos de tipo centro que sean simétricos bajo  $S$  pueden estar en el mismo nivel crítico.

Denotamos<sup>4</sup> por  $p_i$  a los puntos críticos de tipo centro sobre el eje  $y$ , i.e.,  $p_i = (0, y_i)$ ; y denotaremos por  $p_{-i}$  y  $p_{+i}$  a puntos críticos de tipo centro tales que  $S(p_{-i}) = p_{+i}$ , donde  $p_{-i}$  está contenido en el semiplano real  $\{x < 0\}$  y  $p_{+i}$  está contenido en el semiplano real  $\{x > 0\}$ . Denotamos por  $\delta_i(z)$ ,  $\delta_{-i}(z)$  y  $\delta_{+i}(z)$  a los ciclos evanescentes correspondientes a los puntos críticos  $p_i$ ,  $p_{-i}$  y  $p_{+i}$ , respectivamente.

Notamos que  $F(p_{-i}) = F(p_{+i})$  ya que  $F(S) = F$ . Denotemos al valor crítico de  $p_{-i}$  y  $p_{+i}$  como  $z_{\pm i}$ , y denotamos al valor crítico de  $p_i$  como  $z_i$ .

Denotamos como  $s$  al número de puntos críticos  $p_{-i}$ , que por simetría es igual al número de puntos críticos  $p_{+i}$ .

Consideremos la complejificación de  $S$ , que denotamos también como  $S$ . Y consideramos el operador  $S_* : H_1(F^{-1}(z)) \rightarrow H_1(F^{-1}(z))$ , con  $z$  valor regular de  $F$ , dado por  $S_*(\gamma(z)) = S(\gamma(z))$ , donde  $\gamma(z)$  y  $S(\gamma(z))$  son representantes de clases en  $H_1(F^{-1}(z))$ .

Usaremos la base de  $H_1(F^{-1}(z))$ , con  $z$  valor regular, dada por el corolario 4.2.2;

$$\{\delta_{*i}(z), \delta_{\pm i}(z), \tilde{\gamma}_{*i}(z), \tilde{\gamma}_{\pm i}(z)\}_{i=1}^s \cup \{\delta_j(z), \tilde{\gamma}_j(z)\}_{j=2s+1}^n \cup \{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1},$$

donde  $\delta_{\pm i}(z) = \delta_{+i}(z) - \delta_{-i}(z)$ ,  $\tilde{\gamma}_{\pm i}(z) = \tilde{\gamma}_{+i}(z) - \tilde{\gamma}_{-i}(z)$ ,  $\delta_{*i}(z) = \delta_{+i} + \delta_{-i}$  y  $\tilde{\gamma}_{*i}(z) = \tilde{\gamma}_{+i}(z) + \tilde{\gamma}_{-i}(z)$ ; y consideramos el subespacio

$$V_S = \langle \{\delta_{\pm i}(z), \tilde{\gamma}_{\pm i}(z)\}_{i=1}^s \rangle,$$

con  $\dim V_S = 2s$ .

Denotemos por  $V_S^*$  al espacio dual a  $V_S$  en la 1-cohomología de de Rham:

<sup>4</sup>Usando la misma notación que en la subsección 3.5.4 y la sección 4.2.

$$V_S^* \subseteq H_{dR}^1(F^{-1}(z)).$$

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema<sup>5</sup>:

**Teorema 5.2.1.** *Sea  $F \in \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$ , tal que  $F$  es invariante bajo la reflexión  $S(x, y) = (-x, y)$ , y que  $z_{\pm i} \neq z_{\pm j}$  para  $i \neq j$ , que  $z_i \neq z_j$  para  $i \neq j$ , y que  $z_{\pm i} \neq z_j$  para toda  $i$  y para toda  $j$ . Sea  $\eta$  una 1-forma polinomial en  $\mathbb{C}^2$ , sea  $\delta(z) \in H_1(F^{-1}(z))$  un ciclo evanescente correspondiente a un punto crítico de  $F$  de tipo centro, entonces*

- (1) *Si  $\delta(z) = \delta_j(z)$ , para alguna  $j$ , i.e.,  $S_*(\delta(z)) = -\delta(z)$ ,  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , si y sólo si, existen  $b, b_i, q_j \in \mathbb{C}[F]$ , donde el conjunto de ceros de  $b$  puede contener valores críticos de  $F$ , y  $g, R \in \mathbb{C}[x, y]$ , tales que*

$$b(F)\eta = \sum_{i=1}^{2s} b_i(F)\tilde{\eta}_i + \sum_{j=1}^{r-1} q_j(F)\eta_j + g dF + dR,$$

donde  $\{\tilde{\eta}_i\}_{i=1}^{2s}$  son 1-formas polinomiales en  $\mathbb{C}^2$  tales que  $S^*(\tilde{\eta}_i) = \tilde{\eta}_i$ , y  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$  para toda  $j = 1, \dots, r-1$ .

- (2) *Si  $\delta(z) = \delta_{-j}(z)$ , o  $\delta(z) = \delta_{+j}(z)$ , para alguna  $j$ , entonces  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , si y sólo si, existen  $b, q_j \in \mathbb{C}[F]$ , donde el conjunto de ceros de  $b$  puede contener valores críticos de  $F$ , y  $g, R \in \mathbb{C}[x, y]$ , tales que*

$$b(F)\eta = \sum_{j=1}^{r-1} q_j(F)\eta_j + g dF + dR,$$

donde  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$  para toda  $j = 1, \dots, r-1$ .

Antes de pasar a la demostración de este teorema, tomemos en cuenta lo siguiente:

Por la expresión (3.53) y la linealidad de  $S_*$ , se tiene:

$$S_*(\delta_{+i}(z) - \delta_{-i}(z)) = -\delta_{-i}(z) + \delta_{+i}(z). \quad (5.15)$$

En la notación (4.7), esto es

$$S_*(\delta_{\pm i}(z)) = \delta_{\pm i}(z).$$

Por otro lado, notemos que

$$\text{Var}_0(S_*(\delta_{-i}(z))) = S_*(\text{Var}_0(\delta_{-i}(z))), \quad (5.16)$$

donde  $S_*(\delta_{-i}(z)) = -\delta_{+i}(z)$ , por la propiedad (3.53).

Por lo que

$$\text{Var}_0(S_*(\delta_{-i}(z))) = \text{Var}_0(-\delta_{+i}(z)) = -\tilde{\gamma}_{+i}(z).$$

<sup>5</sup>teorema 2.2.2 de la introducción.

Mientras que, para el lado derecho de (5.16), se tiene que

$$S_*(Var_0(\delta_{-i}(z))) = S_*(\tilde{\gamma}_{-i}(z)).$$

De este modo, de la expresión (3.53) se tiene que

$$-\tilde{\gamma}_{+i}(z) = S_*(\tilde{\gamma}_{-i}(z)).$$

Análogamente, también se tiene que

$$S_*(\tilde{\gamma}_{+i}(z)) = -\tilde{\gamma}_{-i}(z).$$

Por lo que,

$$S_*(\tilde{\gamma}_{+i}(z) - \tilde{\gamma}_{-i}(z)) = -\tilde{\gamma}_{-i}(z) + \tilde{\gamma}_{+i}(z). \quad (5.17)$$

En la notación (4.7), esto es

$$S_*(\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)) = \tilde{\gamma}_{\pm i}(z).$$

Por otro lado, por las expresiones (3.53) y (5.17), de manera análoga se tiene que

$$S_*(\delta_{+i}(z) + \delta_{-i}(z)) = -\delta_{-i}(z) - \delta_{+i}(z)$$

y

$$S_*(\tilde{\gamma}_{+i}(z) + \tilde{\gamma}_{-i}(z)) = -\tilde{\gamma}_{-i}(z) - \tilde{\gamma}_{+i}(z)$$

En la notación (4.6) esto es

$$S_*(\delta_{*i}(z)) = -\delta_{*i}(z)$$

y

$$S_*(\tilde{\gamma}_{*i}(z)) = -\tilde{\gamma}_{*i}(z).$$

Por lo que, diremos que los ciclos  $\delta_{\pm i}(z)$  y  $\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)$  son simétricos respecto a  $S$ , mientras que los ciclos  $\delta_{*i}(z)$  y  $\tilde{\gamma}_{*i}(z)$  son antisimétricos respecto a  $S$ .

De este modo, como los ciclos  $\delta_{\pm i}$  y  $\tilde{\gamma}_{\pm i}$ , que generan al espacio  $V_S$ , son invariantes bajo  $S$ , entonces todos los ciclos en  $V_S$  son también invariantes bajo  $S$ .

Sea  $\tilde{V}_S$  el subespacio de  $H_1(F^{-1}(z))$  generado por todos los ciclos invariantes bajo  $S$ . En particular  $V_S \subseteq \tilde{V}_S$ . Y denotemos como  $\tilde{V}_S^*$  al dual de  $\tilde{V}_S$  en la 1-cohomología de de Rham de  $F^{-1}(z)$ . Entonces, tenemos el siguiente lema:

**Lema 5.2.1.** *Si  $\eta \in \tilde{V}_S^*$ , entonces  $S^*(\eta) = \eta$ .*

*Demostración.* Denotemos  $m = \dim(\tilde{V}_S)$  y  $\mu = \dim(H_1(F^{-1}(z)))$ . Sea  $\{\gamma_i(z)\}_{i=1}^m$  una base de  $\tilde{V}_S$ , y  $\{\tilde{\eta}_i(z)\}_{i=1}^m$  la base dual correspondiente de  $\tilde{V}_S^*$ . Extendemos este conjunto a una base  $\beta = \{\gamma_1(z), \dots, \gamma_m(z), \gamma_{m+1}(z), \dots, \gamma_\mu(z)\}$  de  $H_1(F^{-1}(z), \mathbb{C})$ .

Sea  $\beta^* = \{\tilde{\eta}_i(z)\}_{i=1}^\mu$  la base dual correspondiente de  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$ ; que verifica

$$\int_{\gamma_i(z)} \tilde{\eta}_i = 1, \text{ y } \int_{\gamma_i(z)} \tilde{\eta}_j = 0, \text{ if } i \neq j. \quad (5.18)$$

Para probar el lema, basta probar que  $S^*(\tilde{\eta}_j) = \tilde{\eta}_j$  para toda  $j = 1, \dots, m$ . Veamos primero que  $S^*(\tilde{\eta}_1) = \tilde{\eta}_1$ :

Consideremos el homomorfismo inducido por  $S$  en la 1-cohomología  $S^* : H_{dR}^1(F^{-1}(z)) \rightarrow H_{dR}^1(F^{-1}(z))$ . Expresemos a la 1-forma dada por  $S^*(\tilde{\eta}_1)$  en términos de la base  $\beta^*$ :

$$S^*(\tilde{\eta}_1) = c_1 \tilde{\eta}_1 + c_2 \tilde{\eta}_2 + \dots + c_\mu \tilde{\eta}_\mu, \text{ con } c_j \in \mathbb{C}. \quad (5.19)$$

Tomemos la integral de (5.19) a lo largo del ciclo  $\gamma_1(z)$ ,

$$\int_{\gamma_1(z)} S^*(\tilde{\eta}_1) = c_1 \int_{\gamma_1(z)} \tilde{\eta}_1 + c_2 \int_{\gamma_1(z)} \tilde{\eta}_2 + \dots + c_\mu \int_{\gamma_1(z)} \tilde{\eta}_\mu. \quad (5.20)$$

Por (5.18) el lado derecho de la expresión anterior es igual a  $c_1$ .

Por otro lado, ya que  $\gamma_1(z) \in \tilde{V}_S$ , tenemos que  $S(\gamma_1(z)) = \gamma_1(z)$ . Usando la propiedad (3.51)<sup>6</sup> de la subsección 3.5.4, tenemos que

$$\int_{\gamma_1(z)} \tilde{\eta}_1 = \int_{S(\gamma_1(z))} \tilde{\eta}_1 = \int_{\gamma_1(z)} S^*(\tilde{\eta}_1). \quad (5.21)$$

Entonces, ya que  $\int_{\gamma_1(z)} \tilde{\eta}_1 = 1$  por (5.18), y  $\int_{\gamma_1(z)} S^*(\tilde{\eta}_1) = c_1$  por la expresión (5.20), la igualdad (5.21) implica que

$$1 = \int_{\gamma_1(z)} \tilde{\eta}_1 = \int_{\gamma_1(z)} S^*(\tilde{\eta}_1) = c_1.$$

Análogamente, tomando la integral de (5.19) a lo largo del ciclo  $\gamma_i(z)$  con  $i = 2, \dots, \mu$ , obtenemos que

$$0 = \int_{\gamma_i(z)} \tilde{\eta}_1 = \int_{\gamma_i(z)} S^*(\tilde{\eta}_1) = c_i.$$

Así, tenemos que  $c_i = 0$  para toda  $i = 2, \dots, \mu$  y  $c_1 = 1$ . Por lo que, de la expresión (5.19) se tiene que  $S^*(\tilde{\eta}_1) = \tilde{\eta}_1$ .

De la misma manera se puede probar que  $S^*(\tilde{\eta}_j) = \tilde{\eta}_j$  para toda  $j = 1, \dots, m$ . Notemos que, esto no necesariamente se cumple para  $\tilde{\eta}_j$  con  $j = m+1, \dots, \mu$ , pues los ciclos  $\gamma_j(z)$ , con  $j = m+1, \dots, \mu$ , no necesariamente verifican la relación (5.21).  $\square$

<sup>6</sup>Teorema de cambio de variable para integrales.

**Corolario 5.2.1.** *Para toda  $\omega \in V_S^*$  se tiene que  $S^*(\omega) = \omega$ .*

*Demostración.* Se sigue del hecho de que  $V_S \subseteq \tilde{V}_S$ . □

**Lema 5.2.2.** *Sea  $\gamma(z) \in H_1(F^{-1}(z))$  un ciclo tal que  $S_*(\gamma(z)) = -\gamma(z)$ , y sea  $\eta \in H_{dR}^1(F^{-1}(z))$  tal que  $S^*(\eta) = \eta$ , entonces  $\int_{\gamma(z)} \eta \equiv 0$ .*

*Demostración.* Por la propiedad (3.51) de la subsección 3.5.4, por un lado tenemos que

$$\int_{\gamma(z)} S^*(\eta) = \int_{S_*(\gamma(z))} \eta. \quad (5.22)$$

El lado izquierdo de la expresión anterior es igual a

$$\int_{S_*(\gamma(z))} \eta = \int_{-\gamma(z)} \eta = - \int_{\gamma(z)} \eta,$$

pues  $S_*(\gamma(z)) = -\gamma(z)$ . Mientras que el lado izquierdo de (5.22) es igual a

$$\int_{\gamma(z)} \eta = \int_{\gamma(z)} S^*(\eta),$$

pues  $S^*(\eta) = \eta$ . Por lo tanto,

$$\int_{\gamma(z)} \eta = - \int_{\gamma(z)} \eta,$$

de donde se tiene el resultado. □

**Corolario 5.2.2.** *Para toda  $\omega \in V_S^*$ , y para todo ciclo  $\gamma(z) \in H_1(F^{-1}(z))$  tal que  $S^*(\gamma(z)) = -\gamma(z)$ , se tiene que  $\int_{\gamma(z)} \omega \equiv 0$ .*

Ahora consideremos lo siguiente:

Por el teorema 4.2.1, tenemos que

$$H_1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z)) \oplus V_\infty \oplus V_S,$$

para el caso (1) del enunciado del teorema 5.2.1, i.e., cuando  $\delta(z) = \delta_j(z)$ , para alguna  $j = 2s + 1, \dots, n$ .

Mientras que

$$H_1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z)) \oplus V_\infty,$$

para el caso (2) del teorema 5.2.1, i.e., cuando  $\delta(z) = \delta_{-j}(z)$ , o  $\delta(z) = \delta_{+j}(z)$ , para alguna  $j = 1, \dots, s$ .

El caso (2) se resuelve de manera análoga al teorema 5.1.1. Por lo que sólo nos enfocaremos en demostrar el caso (1).

Ya que  $F$  define una buena partición se tiene que  $\dim H_1(F^{-1}(z)) = \mu(F) = k + n$ , donde por la proposición 4.1.1  $k = n + r - 1$ , es decir  $\dim H_1(F^{-1}(z)) = 2n + r - 1$ . Además como  $F$  tiene buena multiplicidad al infinito se tiene  $\dim V_\infty = r - 1$ . Por otro lado, por el lema 4.2.1

$\dim \mathcal{O}rb(\delta(z)) = 2n - 2s$  y  $\dim V_S = 2s$ , donde  $n$  es el número de puntos críticos de  $F$  de tipo centro, y  $s$  es el número de centros en el semiplano  $\{x > 0\}$ , o  $\{x < 0\}$ .

Ahora consideremos los espacios duales en la 1-cohomología de de Rham:

$$H_{dR}^1(F^{-1}(z)) = \mathcal{O}rb(\delta(z))^* \oplus V_\infty^* \oplus V_S^*,$$

Por el *teorema de Rham algebraico* [17],  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$  tiene una base  $\beta = \{\omega_i\}_{i=1}^{\mu(F)}$  de 1-formas  $\omega_i$  polinomiales, para toda  $i = 1, \dots, \mu(F)$ ; indexamos los elementos de  $\beta$  de modo que  $\{\omega_i\}_{i=1}^{r-1}$  es base de  $V_\infty^*$ ,  $\{\omega_i\}_{i=r}^{2n-2s+r-1}$  es base de  $\mathcal{O}rb(\delta(z))^*$  y  $\{\omega_i\}_{i=2n-2s+r}^{\mu(F)}$  base de  $V_S^*$ , donde  $\mu(F) = 2n + r - 1$ .

**Lema 5.2.3.** *Consideremos la base  $\beta$ . Sea  $\delta(z) \in H_1(F^{-1}(z))$ , donde  $\delta = \delta_j$  para alguna  $j = 2s + 1, \dots, n$ . Entonces, las integrales Abelianas  $\int_{\delta(z)} \omega_i$ , con  $i = r, \dots, 2n - 2s + r - 1$ , forman una base del  $\mathbb{C}(z)$  espacio vectorial  $\mathcal{P}_{\delta(z)}$ .*

*Demostración.* Sea  $\eta$  una forma polinomial en  $\mathbb{C}^2$ . Consideremos la restricción de  $\eta$  a la superficie  $F^{-1}(z)$ . Expresmos  $\eta|_{F^{-1}(z)}$  en término de la base  $\beta$ :

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{i=1}^{\mu(F)} a_i \omega_i, \quad (5.23)$$

con  $a_i$  funciones racionales en  $\mathbb{C}$  definidas en  $z$ .

Consideramos la integral de la expresión anterior en el ciclo  $\delta(z)$ :

$$\int_{\delta(z)} \eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{i=1}^{\mu(F)} a_i \int_{\delta(z)} \omega_i.$$

Notemos que, por el lema 5.2.2, y ya que  $S_*(\delta(z)) = -\delta(z)$ , se tiene que  $\int_{\delta(z)} \omega_i \equiv 0$ , para toda  $\omega_i \in V_S$ . Por lo que

$$\int_{\delta(z)} \eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{i=1}^{r-1} a_i \int_{\delta(z)} \omega_i + \sum_{i=r}^{2n-2s+r-1} a_i \int_{\delta(z)} \omega_i.$$

A partir de este paso la prueba se sigue de manera análoga a la prueba del lema 5.1.1.  $\square$

Para el subespacio  $V_\infty^*$ , en vez de la base  $\{\omega_i\}_{i=1}^{r-1}$ , usaremos la base dada por las 1-formas  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$  (lema 3.6.3). Como  $V_\infty^*$  está en suma directa con los subespacios  $\mathcal{O}rb(\delta(z))^*$  y  $V_S^*$ , podemos cambiar la base de  $V_\infty^*$  sin afectar a la base de los otros espacios. De este modo, usando la base  $\{\eta_j\}_{j=1}^{r-1}$  para  $V_\infty^*$ ,  $\{\omega_i\}_{i=r}^{2n-2s+r-1}$  para  $\mathcal{O}rb(\delta(z))^*$  y  $\{\omega_i\}_{i=2n-2s+r}^{\mu(F)}$  para  $V_S^*$ , entonces la clase de  $\eta|_{F^{-1}(z)}$  en  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$  se puede escribir como:

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j \eta_j + \sum_{i=r}^{2n-2s+r-1} a_i \omega_i + \sum_{i=2n-2s+r}^{\mu(F)} a_i \omega_i, \quad (5.24)$$

con  $p_j$  y  $a_i$  funciones racionales en  $\mathbb{C}$  definidas en  $z$ .

**Lema 5.2.4.** Si  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , con  $\delta = \delta_j$  para alguna  $j = 2s + 1, \dots, n$ , entonces  $a_i \equiv 0$  para toda  $i = r, \dots, 2n - 2s + r - 1$ , y

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \eta_j + \sum_{i=2n-2s+r}^{\mu(F)} a_i(z) \omega_i, \quad (5.25)$$

donde  $\eta_j = F \frac{df_j}{f_j}$ , y  $\{\omega_i\}_{i=2n-2s+r}^{\mu(F)}$  es base de  $V_S^*$ , con  $\omega_i$  1-formas polinomiales.

*Demostración.* Consideremos la expresión (5.24), e integremos  $\eta$  en  $\delta(z)$ :

$$\int_{\delta(z)} \eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \int_{\delta(z)} \eta_j + \sum_{i=r}^{2n-2s+r-1} a_i \int_{\delta(z)} \omega_i + \sum_{i=2n-2s+r}^{\mu(F)} a_i(z) \int_{\delta(z)} \omega_i.$$

Pero, sabemos que  $\int_{\delta(z)} \eta_j \equiv 0$ , para  $j = 1, \dots, r - 1$ , y también que  $\int_{\delta(z)} \omega_i \equiv 0$ , para  $i = 2n - 2s + r, \dots, \mu(F)$  (por el corolario 5.2.2). Por lo que, si  $\int_{\delta(z)} \eta \equiv 0$ , se tiene

$$0 \equiv \sum_{i=r}^{2n-2s+r-1} a_i \int_{\delta(z)} \omega_i.$$

Pero por el lema anterior sabemos que  $\{\int_{\delta(z)} \omega_i\}_{i=r}^{2n-2s+r-1}$  es un conjunto linealmente independiente, por lo que  $a_i \equiv 0$  para toda  $i = r, \dots, 2n - 2s + r - 1$ .

Así,

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \eta_j + \sum_{i=2n-2s+r}^{\mu(F)} a_i(z) \int_{\delta(z)} \omega_i, \quad (5.26)$$

en  $H_{dR}^1(F^{-1}(z))$ . □

Renombremos a las 1-formas polinomiales  $\{\omega_i\}_{i=2n-2s+r}^{\mu(F)}$ , que forman una base de  $V_S^*$ , como  $\{\tilde{\eta}_j\}_{j=1}^{2s}$ . De modo que,

$$V_S^* = \langle \{\tilde{\eta}_j\}_{j=1}^{2s} \rangle,$$

donde  $\{\tilde{\eta}_j\}_{j=1}^{2s} = \{\omega_i\}_{i=2n-2s+r}^{\mu(F)}$ .

Así, la expresión (5.26) se reescribe como:

$$\eta|_{F^{-1}(z)} = \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z) \eta_j + \sum_{i=1}^{2s} a_i \tilde{\eta}_i. \quad (5.27)$$

De manera análoga al teorema 5.1.1, daremos explícitamente los coeficientes  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, r - 1$ , y  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 2s$ , por medio de un sistema lineal de ecuaciones. Este sistema lo conseguimos integrando la expresión (5.27) de  $\eta$  en los ciclos  $\{\sigma_\ell(z)\}_{\ell=1}^{r-1}$ ,  $\{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z), \delta_{\pm i}(z)\}_{i=1}^s$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r-1} p_j \int_{\sigma_\ell(z)} \eta_j + \sum_{j=1}^{2s} a_j \int_{\sigma_\ell(z)} \tilde{\eta}_j &= \int_{\sigma_\ell(z)} \eta, \\ \sum_{j=1}^{r-1} p_j \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \eta_j + \sum_{j=1}^{2s} a_j \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_j &= \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \eta, \\ \sum_{j=1}^{r-1} p_j \int_{\delta_{\pm i}(z)} \eta_j + \sum_{j=1}^{2s} a_j \int_{\delta_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_j &= \int_{\delta_{\pm i}(z)} \eta, \end{aligned} \quad (5.28)$$

con  $\ell = 1, \dots, r-1$  e  $i = 1, \dots, s$ .

Denotemos como  $\tilde{N}$  a siguiente la matriz:

$$\left( \begin{array}{cccccc} \int_{\sigma_\ell(z)} \eta_1 & \cdots & \int_{\sigma_\ell(z)} \eta_{r-1} & \int_{\sigma_\ell(z)} \tilde{\eta}_1 & \cdots & \int_{\sigma_\ell(z)} \tilde{\eta}_{2s} \\ \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \eta_1 & \cdots & \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \eta_{r-1} & \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_1 & \cdots & \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_{2s} \\ \int_{\delta_{\pm i}(z)} \eta_1 & \cdots & \int_{\delta_{\pm i}(z)} \eta_{r-1} & \int_{\delta_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_1 & \cdots & \int_{\delta_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_{2s} \end{array} \right)_{\ell=1, i=1}^{r-1, s} \quad (5.29)$$

Denotemos como  $\nu$  al vector  $(p_1, \dots, p_{r-1}, a_1, \dots, a_{2s})$ , y denotemos como  $v$  al vector  $(\int_{\sigma_\ell(z)} \eta, \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \eta, \int_{\delta_{\pm i}(z)} \eta)_{\ell=1, i=1}^{r-1, s}$ . Entonces, en notación matricial, el sistema (5.28), se escribe como el sistema lineal de  $(2s + r - 1) \times (2s + r - 1)$  entradas dado por

$$\tilde{N}\nu = v.$$

Denotemos  $\tilde{N}_j$  a la matriz que se obtiene de sustituir la columna  $j$ -ésima columna de  $N$  por el vector

$$\left( \int_{\tilde{\sigma}_1(z)} \eta, \dots, \int_{\tilde{\sigma}_{r-1}(z)} \eta, \int_{\tilde{\gamma}_{\pm 1}(z)} \eta, \dots, \int_{\tilde{\gamma}_{\pm s}(z)} \eta, \int_{\delta_{\pm 1}(z)} \eta, \dots, \int_{\delta_{\pm s}(z)} \eta \right)$$

De este modo, por la *regla de Cramer* se tiene que

$$p_j(z) = \frac{\det \tilde{N}_j}{\det \tilde{N}} \text{ para } j = 1, \dots, r-1. \quad (5.30)$$

y

$$a_i(z) = \frac{\det \tilde{N}_{i+r-1}}{\det \tilde{N}} \text{ con } i = 1, \dots, 2s. \quad (5.31)$$

Nótese que  $\det \tilde{N} \neq 0$  ya que las formas  $\{\eta_j\}_{j=1}^{r-1}$  son base de  $V_\infty^*$  con  $\{\sigma_j(z)\}_{j=1}^{r-1}$  base de  $V_\infty$ ; y  $\{\tilde{\eta}_i\}_{i=1}^{2s}$  son base de  $V_S^*$  con  $\{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z), \delta_{\pm i}(z)\}_{i=1}^s$  base de  $V_S$ .

**Lema 5.2.5.**  $p_j(z)$  y  $a_i(z)$  son funciones univaluadas.

*Demostración.* Denotamos como  $C_{-i}$ ,  $C_{+i}$  y  $C_i$  a las regiones de la partición definida por  $F$  (subsección 3.5.4).

Observemos que si  $\overline{C}_{-i} \cap \overline{C}_{-j} \neq \emptyset$ , o  $\overline{C}_{+i} \cap \overline{C}_{+j} \neq \emptyset$ , entonces

$$\text{Mon}_{z_{\pm j}}(\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)) = \tilde{\gamma}_{\pm i}(z) + K(\delta_{\pm j}(z)),$$

Con  $K$  igual al número de vértices que comparten las regiones  $C_{-i}$  y  $C_{-j}$  (notemos que por simetría esto es lo mismo para  $C_{+i}$  con  $C_{+j}$ ).

Mientras que

$$\text{Mon}_{z_{\pm j}}(\delta_{\pm i}(z)) = \delta_{\pm i}(z) - \delta_{\pm j}(z),$$

si  $\overline{C}_{-i} \cap \overline{C}_{-j}$  es un segmento (simétrico al segmento obtenido por  $\overline{C}_{+i} \cap \overline{C}_{+j}$ ). Esto significa que la monodromía de  $N$  alrededor del valor  $z_{\pm j}$ , cambia la fila

$$\left( \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \eta_{\tau}, \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_{\nu} \right)_{\tau=1, \nu=1}^{r-1, 2s} \quad (5.32)$$

por la fila

$$\left( \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \eta_{\tau} + K \int_{\delta_{\pm j}(z)} \eta_{\tau}, \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_{\nu} + K \int_{\delta_{\pm j}(z)} \tilde{\eta}_{\nu} \right)_{\tau=1, \nu=1}^{r-1, 2s}, \quad (5.33)$$

y cambia la fila

$$\left( \int_{\delta_{\pm i}(z)} \eta_{\tau}, \int_{\delta_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_{\nu} \right)_{\tau=1, \nu=1}^{r-1, 2s} \quad (5.34)$$

$$\left( \int_{\delta_{\pm i}(z)} \eta_{\tau} - \int_{\delta_{\pm j}(z)} \eta_{\tau}, \int_{\delta_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_{\nu} - \int_{\delta_{\pm j}(z)} \tilde{\eta}_{\nu} \right)_{\tau=1, \nu=1}^{r-1, 2s}, \quad (5.35)$$

y mantiene a las otras filas invariantes.

A su vez, como

$$Mon_0(\delta_{\pm i}(z)) = \delta_{\pm i}(z) + \tilde{\gamma}_{\pm i}(z),$$

y

$$Mon_0(\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)) = 0,$$

Entonces la monodromía de  $N$  alrededor de  $z = 0$  cambia la fila

$$\left( \int_{\delta_{\pm i}(z)} \eta_{\tau}, \int_{\delta_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_{\nu} \right)_{\tau=1, \nu=1}^{r-1, 2s} \quad (5.36)$$

por la fila

$$\left( \int_{\delta_{\pm i}(z)} \eta_{\tau} + \int_{\tilde{\gamma}_{\pm j}(z)} \eta_{\tau}, \int_{\delta_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_{\nu} + \int_{\tilde{\gamma}_{\pm j}(z)} \tilde{\eta}_{\nu} \right)_{\tau=1, \nu=1}^{r-1, 2s}, \quad (5.37)$$

mientras mantiene invariantes a las otras filas.

Ahora consideramos la monodromía alrededor del valor  $z_j$ , para alguna  $j$ , i.e., el valor crítico correspondiente a un punto crítico de tipo centro sobre el eje  $y$ . Si  $\overline{C}_{-i} \cap \overline{C}_j \neq \emptyset$ , o  $\overline{C}_{+i} \cap \overline{C}_j \neq \emptyset$ , entonces

$$Mon_{z_j}(\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)) = \tilde{\gamma}_{\pm i}(z) + K(\delta_{\pm j}(z)),$$

Con  $K$  igual al número de vértices que comparten las regiones  $C_{-i}$  y  $C_j$  (por simetría es lo mismo para  $C_{+i}$  y  $C_j$ ). Y

$$Mon_{z_j}(\delta_{\pm i}(z)) = \delta_{\pm i}(z) - \delta_{\pm j}(z),$$

si  $\overline{C}_{-i} \cap \overline{C}_j$  es un segmento.

De modo que la monodromía de  $N$  alrededor de  $z_j$ , cambia la fila (5.32) por

$$\left( \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \eta_\tau + K \int_{\delta_j(z)} \eta_\tau, \int_{\tilde{\gamma}_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_\nu + K \int_{\delta_j(z)} \tilde{\eta}_\nu \right)_{\tau=1, \nu=1}^{r-1, 2s},$$

y la fila (5.34) por la fila

$$\left( \int_{\delta_{\pm i}(z)} \eta_\tau - \int_{\delta_j(z)} \eta_\tau, \int_{\delta_{\pm i}(z)} \tilde{\eta}_\nu - \int_{\delta_j(z)} \tilde{\eta}_\nu \right)_{\tau=1, \nu=1}^{r-1, 2s}.$$

Sin embargo, sabemos que  $\int_{\delta_j(z)} \eta_\tau \equiv 0$  para todo  $\tau$  pues  $\delta_j(z)$  no rodea a los ceros de  $f_j$ , para toda  $j = 1, \dots, r$ . Por otro lado, también sabemos por el corolario 5.2.2, que  $\int_{\delta_j(z)} \tilde{\eta}_\nu \equiv 0$ , para toda  $\nu$ .

Por lo que, la monodromía del determinante de  $\tilde{N}$ , alrededor de cualquier punto crítico de  $F$ , se mantiene invariante. Análogamente para  $\tilde{N}_j$ .

Por lo tanto  $p_j(z)$  y  $a_i(z)$  son funciones univaluadas.  $\square$

**Lema 5.2.6.** *Los coeficientes  $p_j(z)$  y  $a_i(z)$  son funciones racionales.*

*Demostración.* Al igual que el lema 5.1.3, esto se debe a que las integrales abelianas que forman las entradas en  $\tilde{N}_j$  y  $\tilde{N}$  tienen crecimiento acotado por un polinomio en  $|z|$ .  $\square$

Nota: Claramente los valores críticos de  $F$  son polos de  $p_j(z)$  y  $a_i(z)$ . Sin embargo en este caso no se puede asegurar que  $\det \tilde{N}_j$  y  $\det \tilde{N}$  no se anulen también en algún valor regular de  $F$ . Eso depende de la elección de la base polinomial de la cohomología de  $F^{-1}(z)$ , que en este caso afecta a los términos  $\tilde{\eta}_j$  que se utilizan en las definiciones de  $\det \tilde{N}_j$  y  $\det \tilde{N}$ . Nótese que en el caso del lema 5.1.3 la elección de la base no afecta a los polos de las funciones  $p_j$  ya que éstas se calculan sólo con los términos  $\eta_j := F \frac{df_j}{f_j}$ .

Ahora probaremos el teorema 5.2.1:

*Demostración.* (Teorema 5.2.1 caso (1)<sup>7</sup>)

Usando la expresión (5.27), definamos

$$\tilde{\eta} = \eta - \sum_{j=1}^{r-1} p_j(F) \eta_j + \sum_{i=1}^{2s} a_i(F) \tilde{\eta}_i.$$

Sea  $b(F)$  el polinomio en  $F$  de menor grado tal que  $b(F)p_\ell(F)$  y  $b(F)a_i(F)$  son polinomiales, para toda  $\ell$  y para toda  $i$ .

<sup>7</sup>El caso (2) es análogo a la demostración del teorema 5.1.1

Ahora, multipliquemos  $\tilde{\eta}$  por  $b(F)$ :

$$b(F)\tilde{\eta} = b(F)\left(\eta - \sum_{j=1}^{r-1} p_j(F)\eta_j - \sum_{i=1}^{2s} a_i(F)\tilde{\eta}_i\right).$$

Notemos que, por el lema 5.2.4, se tiene que la integral de

$$b(F)\left(\eta - \sum_{j=1}^{r-1} p_j(F)\eta_j - \sum_{i=1}^{2s} a_i(F)\tilde{\eta}_i\right),$$

en  $\gamma(z) \subset F^{-1}(z)$ , es igual a

$$b(z)\left(\int_{\gamma(z)} \eta|_{F^{-1}(z)} - \sum_{j=1}^{r-1} p_j(z)\eta_j - \sum_{i=1}^{2s} a_i(z)\tilde{\eta}_i\right) \equiv 0,$$

es decir, la 1-forma polinomial  $b(F)\tilde{\eta}$  satisface que

$$\int_{\gamma(z)} b(F)\tilde{\eta} \equiv 0,$$

para toda  $\gamma(z) \in H_1(F^{-1}(z))$ .

El resto de la prueba se sigue de manera análoga a la prueba del teorema 5.1.1.  $\square$

## Capítulo 6

# Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se realizó un estudio de los aspectos generales entorno al problema tangencial del centro y el problema de la monodromía, y se dio la solución de esos problemas dentro de una familia de ecuaciones hamiltonianas no genéricas. A saber, nos enfocamos en ecuaciones hamiltonianas cuya integral primera es un polinomio real  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ , que satisface ciertas condiciones que llamamos *tener buena multiplicidad al infinito y definir una buena partición en  $\mathbb{R}P^2$*  (ver definiciones 3.6.2 y 3.5.1). Una de las condiciones que pedimos en la definición de *buena partición* es que todos los puntos críticos de  $F$  sean reales. Esa condición nos sirve para poder visualizar la ubicación de todos los ciclos evanescentes desde el plano real. Por otro lado, que  $F^{-1}(0)$  defina una buena partición también nos permite conocer los números de intersección entre los ciclos evanescentes, lo cual facilita calcular la órbita por monodromía de cualquiera de esos ciclos. Sin embargo, nuestra perspectiva para trabajos futuros es que podamos quitar la condición de que todos los puntos críticos sean reales. La idea es poder hacer una extensión de los resultados utilizando una fibración “grande” del espacio  $\{\text{polinomios de grado } d\} \times \mathbb{C}^2$  que conecte los hamiltonianos  $F = \prod f_j$  con el mismo grado en  $f_j$ , pero variando sus coeficientes. Esto para poder transportar la información de los números de intersección entre ciclos evanescentes de los hamiltonianos que tengan la misma estructura. Una vez realizado esto, todos los argumentos se seguirían de manera análoga, pero sin la restricción de que todos los puntos críticos sean reales.

Por otro lado, una de las motivaciones iniciales de esta tesis fue el estudio de casos no genéricos para foliaciones integrables con integral primera de Darboux, en particular para el caso en que la función de Darboux presenta alguna simetría. Una de las principales dificultades para el caso de Darboux, es que el grupo de homología puede tener dimensión infinita, y que es posible que las 1-formas, que deban agregarse a la expresión de la 1-forma  $\eta$ , presenten alguna multivaluación. Para entender mejor cuáles son las 1-formas que hay que agregar para la expresión de la 1-forma  $\eta$  en este caso no genérico de Darboux, es que recurrimos a tratar de entender primero lo que ocurre en el

caso hamiltoniano. Para trabajos futuros, esperamos poder adaptar lo que se estudió aquí para casos no genéricos con integral primera de Darboux.

## Apéndice A

# Orientación de A'Campo

Este capítulo realizaremos un estudio local en un punto de tipo silla, para determinar la orientación, con respecto al plano real, que deben tener los ciclos evanescentes cuando están contenidos en el plano real, de modo que satisfagan que su índice de intesercción es 1 o -1 (según la tabla (3.32)).

Sea  $F$  un polinomio con coeficientes reales,  $F \in \mathbb{R}[x, y]$ , y supongamos que  $F$  tiene un punto crítico de Morse en el origen, de tipo silla. También supogamos que  $F$  tiene 4 puntos críticos de tipo centro,  $p_2, p_3, p_4$  y  $p_5$  tales que  $F(p_3) > 0$ ,  $F(p_5) > 0$ ,  $F(p_2) < 0$  y  $F(p_4) < 0$ , como en el siguiente dibujo:

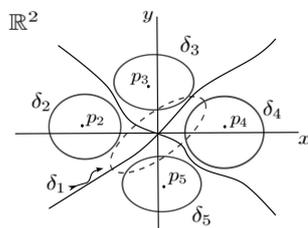


Figura A.1:  $dF = 0$

Denotamos como  $\delta_1$  al ciclo evanescente correspondiente al punto crítico de tipo silla en el origen. Lo dibujamos con líneas punteadas, ya que este ciclo no se puede ver en el plano real, pero sí se puede ver en las superficies de nivel de la complejificación de  $F$ . Denotamos como  $\delta_2, \delta_3, \delta_4$  y  $\delta_5$  a los ciclos evanescentes correspondientes a los puntos críticos de tipo centro  $p_2, p_3, p_4$  y  $p_5$ , respectivamente. Como  $F(p_3) > 0$  y  $F(p_5) > 0$ , entonces los ciclos  $\delta_3$  y  $\delta_5$  pueden verse en  $\mathbb{R}^2$  únicamente cuando las curvas de nivel de  $F$  toman valores regulares positivos. Mientras que, como  $F(p_2) < 0$  y  $F(p_4) < 0$ , entonces los ciclos  $\delta_2$  y  $\delta_4$  pueden verse en  $\mathbb{R}^2$  únicamente cuando las curvas de nivel de  $F$  toman valores regulares negativos. Sin embargo, todos los ciclos pueden verse en la superficie de nivel de la complejificación de  $F$ , para cualquier valor

regular.

Ahora, estudiaremos el índice de intersección de los ciclos  $\delta_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ , en la vecindad del punto singular de tipo silla. Y determinaremos la orientación que deben tener para que satisfagan tener el índice de intersección como en la tabla (3.32) de la subsección 3.5.1.

Como  $(0, 0)$  es de Morse  $F$  se puede escribir en coordenadas locales como  $F(x, y) = y^2 - x^2$  en una vecindad del origen. Consideremos la complejificación de  $F$  en coordenadas locales, y las superficies de nivel locales  $y^2 - x^2 = c$  con  $c \in \mathbb{C}$ . Despejando  $y$  de la expresión  $y^2 - x^2 = c$ , podemos ver a la superficie local como gráfica de la función  $y(x) = \pm\sqrt{c + x^2}$ , con puntos de ramificación en  $x = \pm\sqrt{-c}$ .

Empecemos tomando a  $c$  como un número real positivo;  $c > 0$ . Entonces,  $y(x) = \pm\sqrt{c + x^2}$  tienen puntos de ramificación en  $x = \pm\sqrt{-c} = \pm i\sqrt{c}$ . Denotemos  $x_+ = i\sqrt{c}$  y  $x_- = -i\sqrt{c}$ . Esta superficie local es homeomorfa a un cilindro, y su generador de la 1-homología es el ciclo evanescente  $\delta_1$ . Pero los ciclos  $\delta_j$  con  $j = 2, 3, 4, 5$ , definen ciclos relativos, dados por la intersección de estos ciclos con la superficie local en la vecindad del origen. Como  $c$  es positivo, los ciclos  $\delta_3$  y  $\delta_5$  definen ciclos relativos contenidos en el eje real de las ramas de la función  $y(x)$  (ya que como se mencionó arriba, para valores positivos de  $c$ , los ciclos  $\delta_3$  y  $\delta_5$  se ven en la foliación real  $dF = 0$ ), como se ve en el siguiente dibujo:

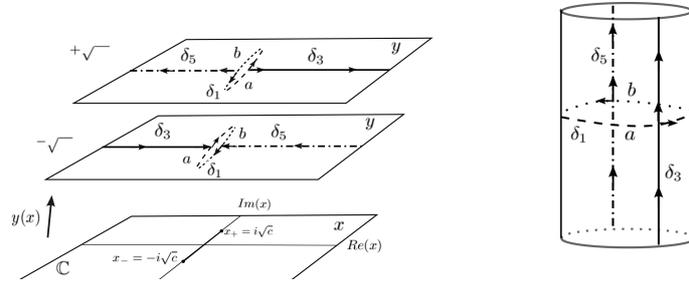
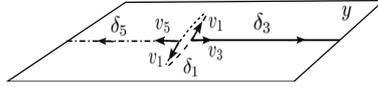


Figura A.2: Fibra local con  $c > 0$

Orientamos a la superficie local  $y^2 - x^2 = c$  con la orientación de cada rama de la función  $y(x)$ . Cada una de estas ramas es dada por la imagen del plano complejo bajo la función  $y(x) = \pm\sqrt{c + x^2}$ ; una rama corresponde al signo positivo y la otra al negativo. Orientamos a estas ramas con la orientación del plano real  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ , dada por la base canónica  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ . Orientamos los ciclos  $\delta_1$ ,  $\delta_3$  y  $\delta_5$  como en la figura (A.2). Calculemos el índice de intersección entre estos ciclos con esta orientación. Para esto, denotaremos como  $v_1$  al vector tangente a  $\delta_1$ . en los puntos de intersección con los ciclos  $\delta_3$  y  $\delta_5$ . Denotemos como  $v_3$  y  $v_5$  a los vectores tangentes a  $\delta_3$  y  $\delta_5$ , respectivamente, en sus puntos

de intersección con el ciclo  $\delta_1$ , como en la siguiente figura:



Los vectores  $v_i$ , tangentes al ciclo  $\delta_i$ , están orientados por la orientación del ciclo  $\delta_i$ . Tomaremos a los vectores  $v_i$  con norma 1. El índice de intersección (o número de intersección) de  $\delta_i$  con  $\delta_j$  en un punto  $p$ , se define como  $+1$  si la matriz  $(v_i, v_j)$  (formada por los vectores tangentes en el punto  $p$ ) tiene determinante positivo, y  $-1$  si tiene determinante negativo ([18], p. 112). Es decir, es  $+1$  si la base  $(v_i, v_j)$  es equivalente a la base canónica  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ , y  $-1$  si no. El índice de intersección entre dos curvas es la suma de sus índices de intersección en todos los puntos donde se intersectan ambas curvas.

Así, verificamos que  $(\delta_5, \delta_1) = 1$ , pues en su punto de intersección el vector  $v_1$ , normalizado, es igual al vector  $(0, -1)$ , mientras que el vector  $v_5$  es igual a  $(-1, 0)$ . Por lo que la matriz  $(v_5, v_1)$  tiene determinante positivo, igual a 1.

Del mismo modo, verificamos que  $(\delta_3, \delta_1) = 1$ , pues en el punto de intersección entre  $\delta_3$  y  $\delta_1$  se tiene  $v_3 = (1, 0)$  y  $v_1 = (0, 1)$ , por lo que la matriz  $(v_3, v_1)$  tiene determinante positivo, igual a 1.

Ahora veamos a qué orientación corresponde esta orientación que tomamos para los ciclos  $\delta_3$  y  $\delta_5$  en las ramas de la superficie local, cuando los ciclos están contenidos en el plano real (lo que ocurre para curvas de nivel de  $F$  en valores positivos) como en la figura (A.1). Para esto consideremos los símbolos  $*_0, *_1$  y  $*_2$  en  $\delta_3$ , y  $|_0, |_1$  y  $|_2$  para  $\delta_5$  como en la siguiente figura:

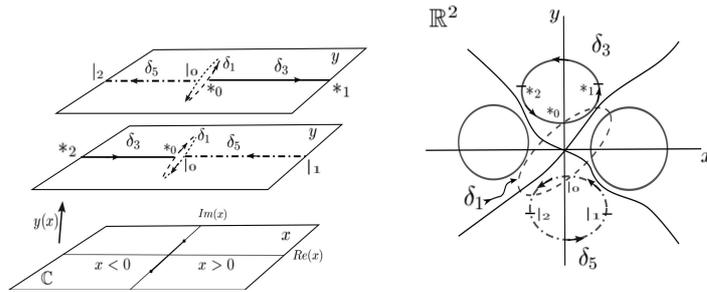


Figura A.3: Orientación

El punto  $*_0$  es la intersección de  $\delta_3$  con  $\delta_1$ , y  $|_0$  es la intersección de  $\delta_5$  con  $\delta_1$ . En el lado izquierdo de la figura (A.3), el segmento de  $\delta_3$  de  $*_2$  a  $*_0$  corresponde a la imagen de valores negativos del plano  $x$ . Al pasar por el punto  $*_0$ ,  $\delta_3$  cambia de rama en  $y(x)$ , y ahora el segmento de  $\delta_3$  de  $*_0$  a  $*_1$

está contenido en la imagen de valores positivos del plano  $x$ . Del mismo modo para el ciclo  $\delta_5$ , el segmento de  $|_1$  a  $|_0$  pasa por los valores positivos de  $x$  hasta llegar al ciclo  $\delta_1$ . Luego cambia de rama, y segmento de  $|_0$  a  $|_2$  pasa por valores negativos de  $x$ . El segmento (orientado) de  $*_2$  a  $*_1$  de  $\delta_3$ , es el segmento de  $\delta_3$  que se puede ver en la superficie local  $y^2 - x^2 = c$ , es decir, cerca del origen (lado izquierdo de la figura (A.3)). Y el segmento (orientado) de  $|_1$  a  $|_2$  de  $\delta_5$ , es el segmento de  $\delta_5$  que se puede ver en la superficie local  $y^2 - x^2 = c$  (cerca del origen).

Esto significa que  $\delta_3$  y  $\delta_5$ , como ciclos contenidos en  $\mathbb{R}^2$ , están orientados como en el lado derecho de la figura (A.3).

Ahora consideremos la superficie local para  $c < 0$ .

Esto es  $y(x) = \pm\sqrt{c+x^2}$ , con puntos de ramificación en  $\sqrt{-c}$  y  $-\sqrt{-c}$ . Como  $c < 0$ , estos puntos de ramificación son reales. Orientamos a  $\delta_1$  con la misma orientación que en la superficie para  $c > 0$  (figura (A.2)). Como  $c < 0$  entonces los ciclos  $\delta_2$  y  $\delta_4$  corresponden a la imagen del eje real del plano  $x$  bajo la función  $y(x)$ . Orientamos estos ciclos como en la siguiente figura:

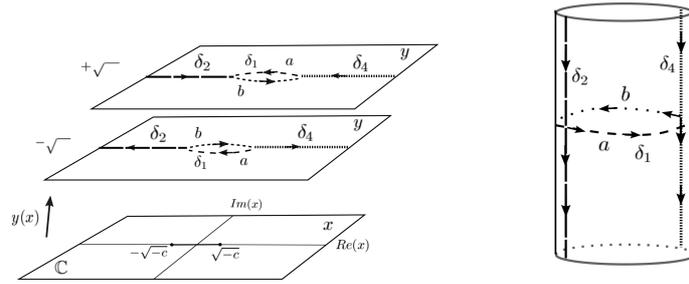
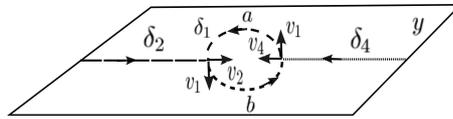


Figura A.4:  $c < 0$

Denotemos como  $v_1$  al vector tangente a  $\delta_1$  en su intersección con  $\delta_2$ , y también lo denotamos como  $v_1$  en su intersección con  $\delta_4$ . Denotamos como  $v_2$  y  $v_4$  al vector tangente a  $\delta_2$  y  $\delta_4$  en su punto de intersección con  $\delta_1$ , respectivamente. Tomamos estos vectores con norma 1.



Verificamos que con esta orientación se tiene que, el índice de intersección de  $\delta_1$  con  $\delta_2$  es  $+1$ , pues en la intersección de  $\delta_1$  con  $\delta_2$  tenemos  $v_1 = (0, -1)$  y  $v_2 = (1, 0)$ , por lo que la matriz  $(v_1, v_2)$  tiene determinante positivo, igual a 1. Para la intersección de  $\delta_1$  con  $\delta_4$  se tiene  $v_1 = (0, 1)$  y  $v_4 = (-1, 0)$ , por lo que la matriz  $(v_1, v_4)$  tiene determinante positivo, igual a 1. Así, el índice

de intersección de  $\delta_1$  con  $\delta_4$  (en ese orden) es 1. Además, se puede verificar que con esta orientación para  $\delta_2$  y  $\delta_4$  en la superficie local, se tiene que ambos tiene orientación negativa como ciclos contenido de la foliación real definida por  $dF = 0$ :

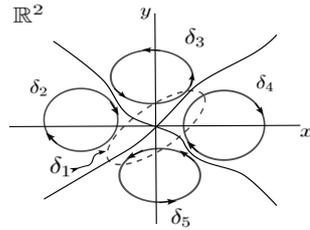


Figura A.5:  $dF = 0$

Para verificar que  $(\delta_i, \delta_j) = 1$ , para  $i = 3, 5$  y  $j = 2, 4$  no basta con un estudio local en el punto crítico de tipo silla, pues allí todos los ciclos  $\delta_i$ , con  $i = 2, 3, 4, 5$  son ciclos reativos, y entre ciclos reativos el índice de intersección no está bien definido. En ese caso, se deben transportar estos ciclos a otra superficie regular en la que al menos uno de los ciclos en  $\delta_i$  o  $\delta_j$  en  $(\delta_i, \delta_j)$  sea un ciclo absoluto (como lo es  $\delta_1$  en las intersecciones que verificamos arriba). Los detalles de estos cálculos se pueden verificar en [1].

# Índice alfabético

- algebraicamente      relativamente exacta, 49
- centro, 13
- centro tangencial, 27
- ciclicidad, 24
- ciclo evanescente, 31–33
- ciclo relativo, 31, 35
- Ciclos de tipo Alien, 16
- Continuación analítica de integrales abelianas, 47
- Definición
  - 3.5.5, buena partición, 62
  - 3.5.1, partición en curvas, 57
- Diagrama de Dynkin, 59
- distancia de Hausdorff, 24
- Ejemplo de Broughton 3.2.1, 46
- fibra regular local, 29
- Fibración de Milnor
  - global, 37
  - local, 29
- foco, 13
- foliación por curvas, 12
- función de desplazamiento, 23
- funciones de Poincaré-Pontryagin, 23
  - función principal, 23
- grupo de monodromía, 39
- Integrabilidad, 13
  - Hamiltoniano, 14
  - Integrabilidad de Darboux, 14
- Integral primera, 13
- integral abeliana, 26
- integral de Poincaré-Pontryagin, 16, 26
- Lema de Morse, 32
- Monodromía, 30
  - de integrales abelianas, 48
- número de Milnor, 32, 36, 38
- número de Milnor total, 36, 38
- operador de monodromía, 39
- órbita generadora de ciclos límite, 24
- Órbita por monodromía de un ciclo, 47
- Partición, 57
  - definida por un polinomio, 58
  - buena, 11, 62
  - en coeficientes, 68
  - signada, 59
- polinomio bueno, 56
- polinomio de Morse, 49
- Problema
  - 16 de Hilbert, 15
  - del centro, 13
  - de monodromía, 49
  - infinitesimal 16 de Hilbert, 16
  - tangencial 16 de Hilbert, 16
  - tangencial del centro, 17, 27
- Proposición de Broughton 3.2.1, 40
- punto crítico de Morse, 32
- punto crítico degenerado, 35

- Simetría algebraica, 14
- Sistema lineal de coeficientes, 69
- Teorema
  - Broughton 3.2.3, 42
  - Dulac, 14
  - Grobman-Hartman, 12
  - Ilyashenko, 50
  - Mattei-Moussu, 14
  - Poincaré-Lyapunov, 14
  - Poincaré-Pontryagin, 25
- transformación
  - de monodromía, 31
  - de variación, 31
- transformación de primer retorno,
  - 23
- transversalidad al infinito, 49
- valores
  - atípicos, 38
  - regulares, 38
- Variación, 35
  - de integrales abelianas, 48



# Bibliografía

- [1] N. A'Campo. *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I*, Math. Ann. 213, 1-32 (1975).
- [2] V.I. Arnold; S.M. Gusein-Zade; A.N. Varchenko. *Singularities of Differentiable Maps. Volume II*. Birkhäuser, Boston. Basel. Berlin. 1988.
- [3] S. A. Broughton, *Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces*, Invent. math. 92, 217-241 (1988).
- [4] S. A. Broughton, *On the topology of polynomial Hypersurfaces*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 40, (1983), Part 1.
- [5] M. Caubergh, F. Dumortier, R. Roussarie, *Alien limit cycles near a Hamiltonian 2-saddle cycle*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005)587-592.
- [6] C. Christopher, C. Li, *Limit Cycles of Differential Equations*. Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007, viii+171 pp., ISBN 978-3-7643-8409-8
- [7] C. Christopher; P. Mardesic. *Darboux relative exactness and pseudo-Abelian integrals*. Por publicar.
- [8] C. Christopher, P. Mardesic. *Monodromy and Tangential Center Problems*. Functional Analysis and Its Applications, vol. 44, no. 1, pp. 22-35, 2010
- [9] H. Dulac, *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre*, Bull. Sci. Math., 32 (2) (1908), pp.230-252.
- [10] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, Paris, 1992. MR 97f:58104
- [11] G. Fischer, *Plane Algebraic Curves*, Student mathematical library, Vol. 15, AMS.
- [12] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer Verlag, New York, 1991.

- [13] W. Fulton, *Algebraic curves, an introduction to algebraic geometry*. Addison-Wesley Pub. Co., Advanced Book Program, 1989.
- [14] L. Gavrilov. *Petrov modules and zeros of Abelian integrals*. Bull. Sci. Math. 122(1998), no. 8, 571-584. MR 99m:32043.
- [15] L. Gavrilov. *On the topology of polynomials in two complex variables*. Laboratoire de Topologie et Géométrie, U.R.A. C.N.R.S. 1408 Toulouse.
- [16] P. Griffiths, J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-interscience publications, 1978.
- [17] A. Grothendieck. *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publication Mathématiques de l'I.H.É.S., tome 29 (1966), p. 95-103.
- [18] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey, 1974.
- [19] R. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
- [20] Ha Hui Vui; Pham Tien Son. *Critical values of singularities at infinity of complex polynomials*. Vietnam Journal of Mathematics 36:1 (2008) 1-38.
- [21] Ha Huy Vui; Nguyen Thi Thao. *Atypical values at infinity of polynomial and rational functions on an algebraic surface in  $\mathbb{R}^n$* , Acta Mathematica Vietnamica, Vol. 36, No. 2, 2011, pp. 537-553.
- [22] Ha Huy Vui; Lê Anh Nguyễn, *Le comportement géométrique à l'infini des polynômes de deux variables complexes*, C. R. Acad. Sci., Paris, Série I 309 (3) (1989), 183-186.
- [23] H. V. Hà and D. T. Lê, *Sur la topologie des polynômes complexes*, Acta Math. Vietnam. 9 (1984), 21-32.
- [24] Yu. S. Ilyashenko. *Appearance of limit cycles by perturbation of the equation  $\frac{dw}{dz} = -\frac{R_z}{R_w}$ , where  $R(z, w)$  is a polynomial*. Mat. Sbornik (New Series) 78 (120)(1969), no.3,360-373.
- [25] Yu. S. Ilyashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. MR 92k:58221
- [26] Ilyashenko, Y.; Yakovenko, S. *Lecture on Analytic Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, Providence, RI, 2008, xiv+625p, ISBN 978-0-8218-3667-5
- [27] A. Jebrane; P. Mardesic; M. Pelletier. *A generalization of Françoise's algorithm for calculating higher order Melnikov functions*. Bull. Sci. Math., 126 (2002), pp. 705-732

- [28] A. Jebrane; P. Mardesic; M. Pelletier. *A note on a generalization of Françoise's algorithm for calculating higher order Melnikov functions*. Bull. Sci. Math., 128 (2004), pp. 749-760.
- [29] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University press, 1963.
- [30] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Stud. vol. 61, Princeton University Press, 1968.
- [31] K. Murasugi, *Knot theory and its applications*, Birkhäuser, 1996.
- [32] M. Pelletier; M. Uribe. *Principal Poincaré Pontryagin function associated to some families of Morse real polynomials*. Nonlinearity Vol.27, no. 2, 257.
- [33] H. Poincaré, *Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, 1882.
- [34] Palamadov, V.P. *Multiplicity of holomorphic mapping*, Funtional Analysis and its Applications, 1967, pp. 218-266.
- [35] J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*. Graduate texts in Mathematics, Springer, 1988
- [36] R. Roussarie, *Bifurcation of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem*. Birhauser-Verlag, Basel, 1998.
- [37] Software <http://www.singular.uni-kl.de/index.php>
- [38] R. Thom. *Ensembles et morphismes stratifié*, Bull. Amer. Math. Soc, 75 (1969) 249-312.
- [39] M. Uribe. *Principal Poincaré-Pontryagin function associated to polynomial perturbations of a product of  $(d+1)$  straight lines*. Journal of Differential Equations, vol. 246, issue 4 (2009), pp. 1313-1341.
- [40] M. Uribe, *Sur la partie principale des déformations de champs de vecteurs hamiltoniens*, Thèse de doctorat, Université de Bourgogne, 2005.
- [41] H. Zoladek. *The monodromy group*, Birkhäuser, Vol. 67, 2006.



## Abstract

In the generic case Yu. S. Ilyashenko gave a solution of the tangential center problem and the monodromy problem. However, a solution for all non-generic cases is not known. In this thesis we study a family of non-generic Hamiltonians, whose Hamiltonian is a product of real polynomials of degree equal or bigger than 1. We study this family with the idea that a good understanding of this Hamiltonian model could help us to understand other non-generic cases later. In this family the genericity assumption of transversality at infinity fails and the coincidence of the critical values for different critical points is allowed. We consider some geometric conditions on the Hamiltonians of this family that we call *good divide of the real projective plane* and *good multiplicity at infinity*. These conditions help us to compute the orbit under monodromy of vanishing cycles. We give a solution of the monodromy problem of two sub-families in this family. One of them satisfying that all the center critical points are at different critical levels, and the other satisfying that the Hamiltonian is invariant under the reflection with respect to the  $y$ -axis. Using the solution of the monodromy problem we also provide a solution of the tangential center problem for those families.

**Key-words:** Monodromy, Abelian integrals, Milnor fibration.

## Résumé

Dans le cas générique Yu. S. Ilyashenko a donné une solution pour le problème de centre tangentiel et le problème de la monodromie. Néanmoins, on ne connaît pas la solution pour tous les cas non-génériques. Dans cette thèse on étudie une famille des équations hamiltoniennes non-génériques dont l'hamiltonien est un produit de polynômes réels irréductibles de degré supérieur ou égal à 1. On étudie cette famille dans le but d'avoir un modèle d'équation hamiltonienne qui nous permette de comprendre d'autres cas non-génériques. Cette famille ne satisfait pas nécessairement les conditions de généricité de transversalité à l'infini et n'a pas nécessairement tous les points singuliers aux niveaux distincts. Nous considérons quelques conditions géométriques sur les hamiltoniens qu'on appelle *bon partage du plan projective réel* et *bonne multiplicité à l'infini*. Ces conditions nous servent pour calculer l'orbite par monodromie des cycles évanescents. On résout le problème de la monodromie pour deux sous-familles dans cette famille d'hamiltoniennes. Une d'elles satisfait que tous les points critiques de type centre sont à des niveaux critiques distincts, et l'autre satisfait que l'hamiltonien est invariant par la réflexion par rapport à l'axe des  $y$ . En utilisant la solution du problème de la monodromie on résout aussi le problème tangentiel du centre pour ces familles.

**Mot-clés:** Monodromie, intégral abélienne, fibration de Milnor.