

## Thèse pour l'obtention du doctorat de sciences économiques

Préparée à l'Ecole doctorale DGEP

Droit, gestion, économie et politique

---

### INTERACTIONS STRATÉGIQUES SUR LES MARCHÉS DIFFÉRENCIÉS ET POLITIQUES PUBLIQUES : UNE ANALYSE EN ÉQUILIBRE GÉNÉRAL

---

Présentée et soutenue publiquement par

**ELEGBEDE Bio Cyrinus**

Le 22 Novembre 2017

Jury

**Rapporteurs :**

**Giulio Codognato**

Professeur à l'université d'Udine, Département d'économie  
et de statistique, Italie

**Monsieur Fabrice Tricou**

MCF, HDR à l'université Paris Nanterre, Economix-UMR 7235

**Directeurs de thèse : Monsieur Ludovic Julien**

Professeur à l'université Paris Nanterre, EconomiX-UMR 7235

**Monsieur Louis de Mesnard**

Professeur à l'université de Bourgogne, CREGO-EA 7317



UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE - FRANCHE-COMTE  
UFR DROIT, SCIENCES ÉCONOMIQUE ET POLITIQUE

## **THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'Université de Bourgogne Franche-Comte**

Discipline : **Sciences Économiques**

préparée au

**Centre de Recherche en Gestion des Organisations (CREGO)**

**EA 7317**

dans le cadre de l'**École Doctorale DGEP**

présentée et soutenue publiquement par

**Bio Cyrinus ELEGBEDE**

22 Novembre 2017

Titre :

**Interactions sur les marchés différenciés et politiques publiques :  
une analyse en Equilibre Général**

### **Directeurs de thèse**

M. **Ludovic Julien**, professeur des universités, EconomiX, Université de Paris Nanterre

M. **Louis de Mesnard**, professeur des universités, CREGO, Université de Bourgogne

### **Jury**

M. **Giulio Codognato**, professeur, Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche,  
Università degli Studi di Udine, Italia

M. **Fabrice Tricou**, MCF, HDR, EconomiX, Université de Paris Nanterre, France

©

« L'université n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs. »

**La vie n'est pas toujours facile - Maxalexis**

*Libre de penser, de rire et d'aimer,  
Profiter des secondes de bonheur,  
De paix, de joie et savoir décider,  
Sans aucune crainte et sans peur :  
Savoir dire non, oser et choisi  
Construire, entreprendre et bâtir.*

*Il suffit de si peu de chose,  
Un peu de courage si j'ose.  
La vie n'est pas toujours facile,  
Mais il suffit de redresser la tête,  
D'affronter certaines adversités,  
Avec beaucoup de sincérité...*



---

## REMERCIEMENTS

---

Toute œuvre en proie à la réussite est souvent le travail de structures et de personnes souvent reléguées en arrière plan, mais qui ont le même mérite que la personne mise en avant. Je n'aurai pas cru qu'à la fin de ce manuscrit, il me serait difficile de rendre hommage à certaines personnes sans qui ce travail n'aurait pu être possible. Même s'il m'est difficile de remercier tout le monde tant l'émotion est grande, recevez tous à travers ces lignes ma reconnaissance et mes respects.

Je tiens à remercier en tout premier lieu les professeurs Ludovic Julien et Louis de Mesnard qui m'ont proposé ce sujet de thèse et qui ont consacré énormément de leur temps à le diriger. Votre disponibilité, votre encadrement, votre rigueur au travail m'ont permis de mener à bien ce projet. Je vous suis reconnaissant pour le soutien sans faille et la confiance accordée qui ont su me garantir la liberté nécessaire dans mes travaux recherches. La pertinence de vos conseils et les relectures éclairantes tout au long de ce travail m'ont énormément forgé. À vous mes deux chefs de bords, encore merci et mille fois merci d'avoir été et de continuer à être pour moi une source intarissable.

Je mesure également l'honneur que me font les professeurs Giulio Codognato et Fabrice Tricou d'avoir consenti à rapporter cette thèse. Je vous remercie d'avoir accepté de siéger dans ce jury mais aussi pour l'intérêt que vous portez à ce travail.

Je tiens à remercier le Centre de Recherche en Gestion des Organisations (CREGO) à travers son directeur le professeur Marc Filser qui m'a accueilli en son sein et n'a pas lésiné sur les moyens tant humains que matériels pour que je réalise cette thèse dans de très bonnes conditions.

Je n'oublie pas l'université de Bourgogne et l'UFR de droit, sciences économiques et politiques pour m'avoir octroyé le contrat doctoral du ministère et m'avoir renouvelé pour deux années d'ATER. Merci.

Une pensée va à l'endroit du personnel du Pôle d'Économie Gestion, de la Maison des Sciences de l'Homme et de l'Ecole Doctorale DGEP qui m'ont fait me sentir chez moi à chaque fois que je me rendais dans ces lieux.

Tant de personnes qui se reconnaîtront dont je ne voudrais pas mentionner les noms m'ont porté dans ce voyage. C'est le moment de vous remercier tant vos apports ont été importants.

Je ne pourrai terminer sans m'adresser à ceux qui ont depuis toujours dû se sacrifier afin que je reçoive la meilleure éducation. Je dédie ce travail à mes parents, ma sœur, mes frères et à toute ma famille pour leur soutien permanent et indispensable dans l'accomplissement de ce travail. Cette thèse est tout d'abord la vôtre.

Je finis mes remerciements en dédiant ces dernières lignes à Kimberly Ivanah *Mon Adorable et Précieux bébé* qui m'inspire et, pour mon plus grand bonheur, partage ma vie. Je n'oublie pas évidemment sa mère, ma compagne, la *Tendre* Antonie qui a supporté durant cette fin de thèse mes humeurs surtout les plus désagréables. Elle m'a énormément soutenu et a su m'encourager jusqu'au bout.

---

## Sommaire

---

|                                                     |           |
|-----------------------------------------------------|-----------|
| Remerciements                                       | iv        |
| Sommaire                                            | vii       |
| Résumé                                              | viii      |
| Abstract                                            | x         |
| Introduction générale                               | 1         |
| <b>1 Revue de la littérature</b>                    | <b>10</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .                          | 11        |
| 1.2 Les mécanismes de prix dans les JSM . . . . .   | 13        |
| 1.3 Les modèles de différenciation . . . . .        | 35        |
| 1.4 Le modèle de Dixit et Stiglitz (1977) . . . . . | 40        |
| 1.5 Le modèle de Julien et Tricou (2005) . . . . .  | 47        |
| 1.6 Conclusion . . . . .                            | 53        |
| 1.7 Annexes : Le modèle de Julien (2013) . . . . .  | 55        |
| <b>2 L’ECWS-PD</b>                                  | <b>63</b> |

---

|          |                                                           |            |
|----------|-----------------------------------------------------------|------------|
| 2.1      | Introduction . . . . .                                    | 64         |
| 2.2      | L'équilibre Cournot-Walras . . . . .                      | 67         |
| 2.3      | Modèle avec un oligopoleur par bien différencié . . . . . | 74         |
| 2.4      | Modèle à $n$ oligopoleurs . . . . .                       | 81         |
| 2.5      | Etude des propriétés de l'équilibre . . . . .             | 88         |
| 2.6      | Comparaison du modèle . . . . .                           | 96         |
| 2.7      | Discussion . . . . .                                      | 96         |
| 2.8      | Annexes . . . . .                                         | 99         |
| <b>3</b> | <b>Les Politiques publiques</b>                           | <b>107</b> |
| 3.1      | Les politiques fiscales . . . . .                         | 108        |
| 3.2      | Une note . . . . .                                        | 128        |
| <b>4</b> | <b>Modélisation avec un continuum d'agents</b>            | <b>158</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                    | 159        |
| 4.2      | Le modèle . . . . .                                       | 161        |
| 4.3      | Exemples . . . . .                                        | 164        |
| 4.4      | Conclusion . . . . .                                      | 172        |
|          | <b>Conclusion Générale</b>                                | <b>174</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                      | <b>181</b> |
|          | <b>Table des matières</b>                                 | <b>193</b> |



## Résumé

En économie, l'analyse de la concurrence entre les firmes est d'une importance capitale. Cette thèse examine les interactions stratégiques sur les marchés différenciés en équilibre général tout en proposant les politiques publiques à mettre en œuvre afin de réduire les distorsions dues aux comportements imparfaits des firmes. La thèse prend en compte la différenciation des produits afin d'aboutir à de nouvelles conclusions ou d'étendre celles existantes et mises en avant dans la littérature. Elle vise ainsi, principalement deux objectifs. En premier lieu, la construction d'un modèle de concurrence imparfaite sur les marchés différenciés et ceci dans un cadre d'analyse en équilibre général. En second lieu, l'évaluation des conséquences du modèle en termes de politiques économiques. Les travaux ont débuté par une revue de littérature où sont abordés successivement les mécanismes de prix dans les jeux stratégiques de marché, les concepts de différenciation des produits et les modèles de théorie des jeux traitant des interactions stratégiques en équilibre général afin de modéliser les comportements imparfaitement concurrentiels. Le chapitre 2 a ainsi conduit au concept d'équilibre Cournot-Walras symétrique sur les marchés différenciés. Pour prendre en compte la différenciation des produits, il est affecté à chaque agent économique un vecteur fini de coefficients de différenciation qui exprime la préférence de l'agent pour la diversité. A la suite du modèle de différenciation, le chapitre 3 propose des

mécanismes de politiques fiscales afin de réguler les pertes dues aux comportements imparfaits des firmes. Des exemples illustrent que le modèle de différenciation admet un équilibre trivial qui est *nice* et les prix et les allocations de l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié, sous certaines conditions, convergent vers l'équilibre walrasien.

**Mots clés :** Equilibre général, différenciation des produits, concurrence oligopolistique, bien-être, concurrence imparfaite, taxes, jeux non-coopératifs.

## Abstract

In economy, the competition analysis among firms have a significance importance because of the complexity of some elements. This thesis examines the strategic interactions on differentiated markets in general equilibrium while proposing the public policies to reduce the distortions due to the imperfect behaviors. This thesis takes into account the differentiation of products in order to obtain the new conclusions and/or to extend those existing. We thus pursues two objectives. Fisrt, the construction of a model of imperfect competition on differentiated markets in a general equilibrium framework. Second, the evaluation of the consequences of the model in terms of economic policies. At beginning, we use literature review to tackle successively price mechanisms in strategic market games, product differentiation concepts and game theory models dealing with strategic interactions in order to model imperfect behaviors. This led in chapter 2 to the symmetric Cournot-Walras equilibrium concept on differentiated markets where we assign to each economic agent a finite vector of differentiation coefficients which expresses the agent's love for diversity. Following the differentiation model, chapter 3 offers tax policy mechanisms to control losses due to perfect behavior of firms. From the analysis, it appears that some examples illustrate that the differentiation model admits a trivial equilibrium which is *nice* and the price and allocations of symmetrical Cournot-Walras equilibrium on differentiated

product, under certain conditions, converge towards the Walrasian ones.

**Keywords :** General equilibrium, products differentiation, oligopolistic competition, welfare, imperfect competition, taxes, noncooperative games.

---

## Table des figures

---

|     |                                                                                                    |     |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1 | Schéma des grandes familles de modèles différenciés . . . . .                                      | 36  |
| 2.1 | Lien entre $\tilde{e}_{\alpha k}^{\text{Cobb}}$ et $\tilde{e}_{\alpha k}^{\text{Quasi}}$ . . . . . | 87  |
| 3.1 | Famille de courbes $\psi(\bar{\alpha}_i)$ . . . . .                                                | 123 |

### Contexte et objet de la thèse

L'approche d'équilibre général prend en compte tous les biens de l'économie, de même que l'ensemble des interdépendances contrairement à l'approche d'équilibre partiel. L'intérêt de modéliser les interactions stratégiques en équilibre général est de souligner les pouvoirs de marché à l'œuvre entre acheteurs et/ou vendeurs. Cette thèse s'intéresse aux interactions stratégiques et à la politique publique à mettre en œuvre pour résorber les distorsions dues aux interactions. Le choix de l'approche d'équilibre général s'explique par le fait que l'approche partielle bien qu'elle soit précise ne permet pas d'obtenir des résultats contre-intuitifs. De même, dans le cadre d'analyse utilisé, la demande est fondée de manière endogène mais aussi les marchés sont liés entre eux dans une réalité complexe. La théorie des jeux permet dans ce cas de prendre en compte ces interactions et analyse la manière dont les individus rationnelles agissent dans des situations conflictuelles, où le comportement d'un individu affecte la satisfaction d'autres individus.

Dans cette thèse, nous proposons d'étudier les interactions stratégiques avec différenciation des produits dans les modèles développés d'une part, par Codognato et Gabszewicz (1991) et Julien et Tricou (2005), et d'autre part, par Sahi et Yao (1989) dans

un contexte d'oligopole bilatéral (Gabszewicz et Michel (1997), Bloch et Ferrer (2001b), Codognato et al. (2015), parmi d'autres). Il existe en équilibre général deux approches qui modélisent les interactions stratégiques. Il s'agit notamment des jeux stratégiques de marché (JSM par la suite) et de l'approche Cournot-Walras qui est très présente dans les modèles de Gabszewicz et Vial (1972), Codognato et Gabszewicz (1991) et Julien et Tricou (2005). L'approche Cournot-Walras associe concomitamment deux côtés de marché. Un côté où les agents agissent de manière concurrentielle (*à la Walras*) et un second où le comportement des agents est stratégique (*à la Cournot*). Cette approche, qui attire notre attention tout au long de la thèse, est introduite pour la première fois par Gabszewicz et Vial (1972). Il s'agit d'une approche *Cournot-Walras* asymétrique dans une économie avec production. Les auteurs analysent les comportements asymétriques du côté producteur et consommateur de l'économie.

L'approche *Cournot-Walras* se justifie par le fait qu'elle se situe dans une économie avec une partie du marché où des firmes (des oligopoles) peu nombreuses influencent les prix *via* une compétition en quantités et du point de vue de l'équilibre, une partie concurrentielle avec un nombre élevé d'agents économiques qui n'ont pas d'influence sur les prix. Dans l'analyse de Gabszewicz et Vial (1972), la notion de production soulève deux problèmes : la maximisation du profit et la règle de normalisation des prix. La maximisation du profit peut ne pas être perçue comme un critère de décision rationnel pour des firmes capables de manipuler les prix, car elle conduirait à négliger les stratégies alternatives qui permettraient d'atteindre des niveaux d'utilité plus élevés pour les actionnaires. Aussi, l'équilibre Cournot-Walras obtenu dépendrait de la règle de normalisation des prix. Puisque la production devient problématique, d'autres modèles émergent dans la même veine que Gabszewicz et Vial (1972), mais pour une économie d'échanges purs (Codognato et Gabszewicz, 1991, 1993). La dimension symétrique de l'équilibre *Cournot-Walras* est proposée pour la première fois par Julien et Tricou (2005). Cette approche s'inscrit dans la lignée des modèles de Codognato et Gabszewicz (1991) et Gabszewicz et Michel (1997). L'approche *Cournot-Walras* symétrique est importante pour trois principales raisons selon ces auteurs : (i) il respecte la symétrie entre les agents et entre les marchés ; (ii) il conduit à un comportement différencié pour chaque *trader* ; (iii) il fournit des dotations en coin pour les *traders*. L'ensemble de ces modèles dans leur résolution analytique utilise des mé-

canismes de prix bien précis (voir la section 1 du chapitre 1). Dans la littérature, il y a une seconde ligne de recherche qui modélise les interactions stratégiques entre les individus dans les jeux stratégiques de marché. Cette approche est introduite par Shapley et Shubik (1977) et Shapley (1977).

Comme toute concurrence imparfaite qui génère des distorsions, la construction du modèle de différenciation conduit à l'évaluation des conséquences en termes de politiques publiques. Cette recherche formule des propositions aux firmes dans la recherche de l'amélioration de leurs gains et des mesures à mettre en œuvre par l'autorité publique pour contrôler et limiter les effets parfois pervers de la concurrence sur les consommateurs. Il s'agit donc de proposer des stratégies à l'ensemble des acteurs dans un but de ré-allouer efficacement les ressources qui sont rares.

## Problématique

L'intérêt de l'approche d'équilibre général pour étudier les interactions stratégiques réside dans la richesse des interactions présentes entre vendeurs et acheteurs, mais également au niveau de chacune de ces deux catégories d'agents. Il s'agit d'étudier le rôle joué par les préférences dans la détermination de l'équilibre (ce que ne fait pas l'analyse en équilibre partiel). L'apport de cette recherche est d'introduire aux modèles précédents en équilibre général une dimension supplémentaire qui est celle de la différenciation entre les produits proposés pour l'échange. En effet, l'hypothèse d'homogénéité du produit est une hypothèse très forte et ne rend pas compte de la réalité économique. Les firmes différencient leur bien de leurs concurrents afin de capter plus de parts de marché, mais également pour pouvoir manipuler les prix *via* la quantité offerte et faire ainsi plus de profit. Ces parts de marché sont fonction de la substituabilité ou pas du bien. Elles détiennent ainsi des pouvoirs de marché qui représentent leur capacité à fixer des prix supérieurs au coût marginal afin d'infléchir les prix en faveur de leur propre intérêt. La différenciation concerne ici un univers marchand avec un nombre fini de biens<sup>1</sup> et augmente les disparités en faveur des firmes par rapport aux modèles précédents. Cette thèse est une tentative pour modéliser

---

1. Pour un modèle avec infinité de biens, le lecteur peut se référer à Codognato et al. (2015) et Tonin (2013, 2015).



la différenciation des produits dans un contexte d'équilibre général stratégique. Des travaux antérieurs se sont intéressés à la question de différenciation dans un univers avec un continuum de biens dans un cadre coopératif (Gabszewicz, 1968) et dans un cadre non-coopératif (Tonin, 2013)<sup>2</sup>. La modélisation proposée traite aussi bien de la différenciation verticale, où la qualité du produit est pris en compte, que celle horizontale où quelques caractéristiques basiques du bien sont modifiées. Il est conçu un modèle de différenciation des produits en équilibre général dans un cadre d'interactions stratégiques qui est un univers de concurrence non monopolistique<sup>3</sup>. L'approche proposée est une extension de l'approche symétrique de Julien et Tricou (2005) dans la lignée des modèles de type Codognato et Gabszewicz (1991) et Gabszewicz et Michel (1997). Il est donc proposé un équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié. Comme tout comportement imparfait, ce nouvel équilibre génère des distorsions.

## L'objectif général et les objectifs spécifiques de la thèse

### Objectif général

L'objectif général de cette thèse est de *traiter les interactions stratégiques sur les marchés différenciés en équilibre général et les politiques publiques*. Cet objectif peut se décliner en cinq principaux objectifs spécifiques.

### Objectifs spécifiques

Il s'agit spécifiquement dans cette thèse de :

- Définir un modèle de différenciation des produits en équilibre général ;
- Proposer deux exemples d'économies d'échange : une économie Cobb-Douglas et quasi-linéaire/Cobb-Douglas ;

---

2. Tonin (2013) propose un exemple de jeu stratégique de marché où l'équilibre Cournot-Nash converge vers l'équilibre walrasien avec un nombre infini de biens. L'originalité de son travail se retrouve dans l'approche proposée avec un nombre infini de biens.

3. Il ne s'agit donc pas d'un modèle de type Dixit et Stiglitz (1977)

- Analyser les implications du modèle du point de vue de certaines caractéristiques (pouvoir d'achat, prix, allocations et bien-être des agents économiques) ;
- Dédire les implications en termes de politiques économiques ;
- Étudier les effets d'une taxe que l'autorité publique met en œuvre à des fins correcteurs dans une économie différenciée.

## Limites

Les limites de notre recherche se situe à trois niveaux. Premièrement, on peut noter l'absence de l'analyse de l'existence de l'équilibre Cournot-Walras avec produit différencié. Dans cette thèse, il n'est pas traité la question de l'existence de l'équilibre Cournot-Walras avec produit différencié compte tenu de la complexité de l'analyse. L'existence de l'équilibre fera l'objet de recherches futures. Ainsi, nous avons choisi des propriétés particulières aux préférences, aux dotations et aux stratégies des agents qui assurent l'unicité de la solution de notre modèle. Deuxièmement, la modélisation aurait pu intégrer une étape préalable, celle de la production. Enfin, l'analyse aurait pu considérer une compétition à la *Stackelberg* entre les firmes.

## Apports de la thèse

Les apports de chacun des chapitres de la thèse sont d'ordre divers mais complémentaires. La contribution du **chapitre 1** est de type méthodologique. Il présente trois principaux mécanismes de prix en mettant principalement l'accent sur le mécanisme de prix de Sahi et Yao (1989) qui a été utile dans une version modifiée lors de la modélisation. Ce chapitre présente également les facettes utiles dans le modèle de Julien et Tricou (2005) socle de l'analyse proposée.

Après une succincte présentation de la littérature, le **chapitre 2** est consacré à l'extension du modèle de Julien et Tricou (2005). Ce chapitre modélise la différenciation des produits dans un cadre non-coopératif en équilibre général, en proposant un prototype d'équilibre Cournot-Walras qui permet de la traiter. Dans la modélisation proposée, les

oligopoleurs ont des comportements stratégiques et ne consomment que deux biens : leur propre bien mais aussi le bien concurrentiel. En l'absence d'une telle hypothèse, l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié coïncide avec l'équilibre Cournot-Walras de Julien et Tricou (2005). Les agents concurrentiels quant à eux consomment tous les biens de l'économie. Ainsi, il leur est attribué un vecteur fini de coefficients de différenciation qui expriment leur préférence pour la diversité et mesurent leur degré de différenciation, c'est-à-dire le poids qu'ils accordent à consommer un type donné de bien différencié. Ces coefficients sont modélisés dans l'esprit de Singh et Vives (1984) et le bien du concurrent est perçu comme un substitut de leur bien. L'analyse est computationnelle et a donc nécessité le choix de deux types d'économie. Une économie Cobb-Douglas où les agents économiques ont des préférences Cobb-Douglas et une économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas qui introduit une hétérogénéité dans le comportement des deux types d'agents économiques du modèle. Le chapitre 2 fournit ainsi les propriétés de l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié en considérant ces deux économies.

A la suite du modèle de différenciation, le **chapitre 3** analyse les implications du modèle en termes de politiques publiques. Les apports de ce chapitre sont de deux ordres. Dans une première section, il est proposé l'évaluation des mesures correctives à mettre en œuvre afin d'atténuer les distorsions dues à l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié. Cette première section découle de l'analyse computationnelle des deux économies choisies dans le chapitre 2. Dans une dernière section, il est proposé une généralisation du modèle de taxation de Gabszewicz et Grazzini (2001, 1999) et Grazzini (2006). Cette généralisation se fait en considérant à la fois des préférences CES pour l'ensemble des agents économiques et trois sortes de politiques de taxation que sont : une taxation des transactions, une taxation unitaire et une taxation des dotations initiales. Cette manière de procéder permet d'évaluer l'impact sur le bien-être des agents économiques et de déterminer quelle taxe il faudrait mettre en place afin de corriger les distorsions du marché. L'objectif de cette section s'inscrit dans une vision future de suggérer une analyse générale de la différenciation des produits avec des préférences des agents économiques qui ont une forme plus générale (fonction d'utilité CES).

Le **chapitre 4** est contrairement aux autres parties de la thèse une analyse avec un cadre stratégique mixte. Ce chapitre analyse l'équilibre Cournot-Walras symétrique avec un

continuum d'agents. Dans cette thèse, il vient légitimer l'utilisation d'une partie supposée concurrentielle dans le modèle de différenciation.

Les apports des différentes parties de la thèse débouchent sur les résultats qui sont présentés brièvement par la suite.

## Résultats obtenus

### Chapitre 2 : Le modèle de différenciation

Le chapitre 2 modélise ainsi l'équilibre Cournot-Walras symétrique en échanges purs sur les marchés différenciés dans un cadre qui s'inspire de Julien et Tricou (2005). Dans l'économie proposée, tous les oligopoleurs offrent leur bien au marché et demandent uniquement le bien concurrentiel. Deux principaux résultats découlent de cette analyse. Avec les économies Cobb-Douglas et quasi-linéaire/Cobb-Douglas, nous montrons premièrement que l'équilibre trivial est la solution du modèle avec un oligopoleur par type de bien différencié. Enfin dans un cas de réplcation, l'équilibre Cournot-Walras sur produit différencié, sous certaines conditions, converge vers l'équilibre walrasien.

### Chapitre 3 : Les politiques publiques

La première section du chapitre 3 analyse la taxation en économie d'échange pur sur les marchés différenciés dans un cadre de modèles d'équilibre général. Il s'appuie sur l'équilibre Cournot-Walras symétrique avec produit différencié qui est proposé dans le chapitre 2. Le but étant de taxer soit les transactions soit les dotations initiales, cette approche est sans transfert aux agents concurrentiels et les revenus issus de la taxation sont versés à un agent neutre qui peut être ici en l'occurrence l'autorité publique. Les principaux résultats obtenus sont : (a) une taxation des transactions conduit à une invariance des allocations des oligopoleurs, mais à une augmentation du prix des biens différenciés et donc à une baisse des allocations des agents concurrentiels ; (b) une taxation des dotations initiales des oligopoleurs pour l'économie Cobb-Douglas détruit le bien-être des agents concurrentiels comparée au cas de non taxation, mais les revenus de l'Etat augmentent.

La seconde section qui aborde les politiques fiscales en échange stratégique multilatéral généralise les approches de Gabszewicz et Grazzini (1998) et Grazzini (2006). Ces modèles analysent l'efficacité et les implications en termes de bien-être de différentes politiques fiscales dans un échange multilatéral où les préférences des agents sont des fonctions d'utilité quasi-linéaire et Cobb-Douglas. L'approche adoptée généralise ces modèles en supposant que les préférences des agents sont de type CES. Il est considéré dans le modèle principalement trois catégories de taxes que sont : la taxation *ad valorem*, la taxation unitaire et la taxation sur les dotations initiales. Il ressort que les politiques fiscales sans transferts entre oligopoleurs conduisent à un bien-être optimal quand les biens sont des compléments. Le résultat issu de la taxation est un optimum de premier rang lorsque les biens sont des (parfaits) compléments.

## Chapitre 4 : Modèle avec un continuum d'agents

Ce chapitre se présente comme une ouverture de la thèse vers de futures recherches. Dans ce chapitre, il est considéré une partie atomique avec un nombre fini d'agents (des atomes) et une partie non atomique, des petits agents, qui sont représentés dans un continuum, ce qui signifie que les agents sont considérés comme petits et aucun agent dans le continuum n'a de pouvoir sur un autre. Dans cette approche mixte, tous les agents se comportent stratégiquement (Busetto et al. (2011) notamment). Des analyses, il vient que le comportement concurrentiel des agents admis dans la modélisation au chapitre 2 émerge de manière endogène. Ce qui renforce les analyses faites tout au long des chapitres 2 et 3 de la thèse. Aussi, l'équilibre Cournot-Walras sur produit différencié coïncide avec l'équilibre Walrasien à la limite.

Le travail de recherche proposé se structure donc en quatre parties avec deux objectifs primordiaux. Ces objectifs en lien avec les objectifs de la thèse sont de modéliser les interactions sur les marchés différenciés et proposer des politiques publiques qui peuvent découler de cette analyse. Les prochaines lignes du document présentent successivement le chapitre 1 qui se penche sur la littérature nécessaire pour ce travail de recherche, le chapitre 2 qui cristallise tous les efforts de modélisation, le chapitre 3 qui par ses deux sections est

dédié aux politiques fiscales, le chapitre 4 qui reste une perspective pour les recherches futures et enfin la conclusion qui récapitule et discute les apports théoriques de cette thèse doctorale ainsi que des limites et voies de recherches qui s'ouvrent.

# CHAPITRE 1

---

## Revue de la littérature

---

## 1.1 Introduction

La théorie de l'équilibre général présente une description du fonctionnement du système de prix qui est essentiellement statique et non stratégique<sup>1</sup>. Le premier modèle qui introduit les interactions stratégiques en équilibre général est celui de Gabszewicz et Vial (1972). Il s'agit d'une économie dans une économie avec production. Cette approche est intéressante car elle mixte une partie de marché où les agents moins nombreux et se comportent stratégiquement avec une seconde partie de marché où les agents ont un comportement concurrentiel. L'équilibre obtenu est appelé l'équilibre Cournot-Walras. Dans cette approche, la production pose problème pour deux principales raisons. Ces problèmes sont relatifs à la maximisation du profit et à la normalisation des prix. Le critère de maximisation du profit ne peut être optimal du point de vue des actionnaires. Aussi, la règle de normalisation des prix fait varier l'équilibre oligopolistique. Ainsi, une autre classe de modèles analogue à celle précédente émerge, mais pour une économie d'échanges purs (Cognato et Gabszewicz, 1991, 1993). Il existe une seconde ligne de recherche qui modélise les interactions stratégiques entre les individus. Il s'agit des jeux stratégiques de marché introduit par Shapley et Shubik (1977) et Shapley (1977).

La théorie des jeux stratégiques de marché propose des mécanismes de détermination des prix en équilibre général avec interactions stratégiques. Les jeux stratégiques de marché analysent donc les interactions entre les individus dans une économie en vue d'une réallocation stratégique et optimale des ressources qui a, bien évidemment, des impacts sur les variables macroéconomiques (Giraud, 2003). Ainsi, de ces jeux stratégiques de marché, ressortent l'influence sur le prix, les échanges, la redistribution du revenu, l'importance de la monnaie dans les processus d'échange, le chômage, l'inflation etc., tout en optimisant le bien-être de la majorité. Le but des jeux stratégiques de marché est de mettre en lumière les actions non coordonnées des agents économiques sur le marché qui conduisent à un optimum social dans l'esprit de la « main invisible » d'Adam Smith.

Les applications des jeux stratégiques de marché arrivent à résorber les frontières qui pourraient exister entre les analyses macroéconomiques et microéconomiques. La parti-

---

1. Il s'agit dans cette thèse de la stratégie sur les quantités : c'est de l'analyse de Cournot généralisée.



cularité de l'analyse des jeux stratégiques de marché proposée par Shubik (1972), Shapley (1977), Shapley et Shubik (1977) est l'introduction d'un bien-monnaie comme moyen de paiement dans les échanges. Depuis ce début historique, il apparaît dans la littérature, plusieurs mécanismes de prix qui rendent compte des échanges sur les marchés. Dans le cadre de cette thèse, trois principaux mécanismes des prix sont présentés : le mécanisme séminal à la Shapley et Shubik (1977) qualifié de TP-mécanisme, le mécanisme de prix Amir et al. (1990) et le mécanisme à la Sahi et Yao (1989) qualifié de W-mécanisme et parfois appelé G-mécanisme (Weyers (2003)). Mertens (2003) démontre que le G-mécanisme est un cas particulier du W-mécanisme. Ainsi, tout système de prix s'approchant du W-mécanisme convient pour mieux décrire un jeu stratégique de marché.

En microéconomie, la notion de différenciation, quant à elle, fait appel à deux grandes familles de modèles. Les modèles de localisation et ceux de non-localisation. Dans la première approche, celle de localisation, les agents économiques ne consomment qu'une seule marque. La différenciation se fait par la localisation des agents oligopoleurs qui se traduit par des coûts de transport (Hotelling (1929) et Salop (1979)). Dans la seconde approche, la préférence des agents économiques pour la diversité est mise en exergue. Les agents économiques sont disposés à consommer, selon cette approche, une part disponible de chaque marque dans la branche (Dixit et Stiglitz (1977), Singh et Vives (1984), Eaton et Lipsey (1989), etc.).

En équilibre général, traiter de la question de la différenciation nous renvoie à mixer le critère de différenciation que nous adoptons, à des modèles développées dans les travaux tels que ceux de Gabszewicz et Vial (1972), Shitovitz (1973), Codognato et Gabszewicz (1991, 1993), Gabszewicz et Michel (1997) entre autres. La modélisation des interactions stratégiques sur les marchés différenciés utilise des techniques similaires à ces différents modèles, mais s'inspire en grande partie du modèle de Julien et Tricou (2005). Le but de ce chapitre est de déterminer *via* une revue de littérature, la règle de prix qui sera utilisée dans notre modélisation des interactions stratégiques sur les marchés différenciés et identifier quel critère de différenciation choisir afin de traiter notre problème. La présentation se consacre principalement aux modèles en équilibre général avec un nombre fini de biens et d'agents. Dans le développement de ce chapitre, nous présentons successivement :

- Dans une première section, l'évolution chronologique de trois grandes familles de mécanismes de prix tout en présentant leurs avantages, leurs inconvénients et les différentes extensions ;
- Dans une seconde section, nous présentons les grandes familles de modèles différenciés, tout en explicitant celle adoptée pour cette thèse ;
- Enfin, dans la dernière section, une analyse succincte de l'article de Julien et Tricou (2005) sera faite afin de rendre compte des techniques essentielles issues des modèles de cette famille.

## 1.2 Les mécanismes de prix dans les jeux stratégiques de marché

Cette section expose trois principales familles de mécanismes de prix avec leurs forces et faiblesses. Il s'agit notamment des modèles de Shapley et Shubik (1977), Amir et al. (1990), Sahi et Yao (1989).

### 1.2.1 Les jeux à la Shapley-Shubik

Les prémices de formulation des jeux stratégiques de marché ont été introduites par Shapley et Shubik (1977). Nous retrouvons néanmoins ses variantes dans les articles de Shubik (1972), Shapley (1977). Shapley et Shubik (1977) dans leurs travaux devenus célèbres pour les jeux stratégiques de marché ont présenté les règles de prix utilisant un bien comme intermédiaire des échanges. Ils visualisent les effets qualitatifs d'un commerce monétisé sur des aspects tels que la formation des prix, la faisabilité, la Pareto-optimalité et l'équilibre. Leur modèle, dans ses différentes variantes, est traité comme un jeu non-coopératif, dans l'esprit de Cournot et Nash. L'idée qui justifie l'introduction de la monnaie dans leur modèle est, selon les auteurs la réduction du nombre de transactions, les coûts de transactions et l'asymétrie d'information dans les échanges. Cette partie est basée sur un modèle multi-produits au travers d'un jeu sous une forme stratégique. À ce modèle, le concept de solution non-coopératif de Nash peut être appliqué.

La monnaie est par ailleurs traitée comme un élément de stratégie au sens de la théorie des jeux. Une fonction d'utilité additivement séparable (équation 1.1) est adoptée par les auteurs :

$$U_i = u_i(x_1^i, \dots, x_m^i) + \lambda_i x_{m+1}^i \quad (1.1)$$

dans laquelle le bien  $(m + 1)$  peut être considéré comme un type d'utilité transférable représentant ainsi la « monnaie ». Les auteurs ne supposent pas dans leur approche que l'utilité du bien qui sert de paiement soit additivement séparable. Considérant la fonction d'utilité transcrite dans l'équation (1.1), après les échanges, un déficit de la monnaie détériore l'utilité du consommateur tandis qu'un surplus du bien-monnaie ne l'améliore pas. Les approches de Shapley et Shubik exigent que tous les échanges se fassent en présence de ce bien-monnaie. Ainsi, quand les joueurs prennent leurs décisions individuelles, les prix sur les marchés et les transferts de biens sont complètement déterminés. Les auteurs préfèrent cette forme de jeu stratégique par opposition au jeu de coalition, car ce dernier échoue à capter la dynamique de la formation des prix qui nous intéresse particulièrement dans cette thèse.

### Le modèle de Shubik (1972)

Shubik (1972) recherche la raison pour laquelle il n'est pas évident d'explicitier un jeu statique symétrique non-coopératif comme une représentation d'un système oligopolistique ouvert <sup>2</sup>. L'auteur lie étroitement cette situation au rôle de la monnaie dans l'économie et cette dernière permet une liaison entre l'analyse statique et dynamique. En considérant un modèle beaucoup plus général avec  $n$  *traders* et  $m$  biens, il démontre qu'il existe un système de prix qui apure les marchés, de sorte à ce que chaque *trader* maximise son bien-être, les quantités échangées étant toutes en équilibre. L'équilibre obtenu est Pareto optimal. En prenant l'un des prix comme numéraire, les autres prix exprimés en termes relatifs sont indépendants et l'équilibre général est non stratégique dans le sens où les individus maximisent leur bien-être suivant ces prix et ceci sans l'influence du marché. Les solutions issues de la théorie des jeux confèrent, aux agents sur les marchés, la liberté

---

2. Il s'agit d'un modèle oligopolistique avec libre entrée dans le temps et utilisation de la monnaie.

de stratégie et d'influence. Les solutions coopératives sont seulement implicites dans la description mathématique formelle, tandis que la solution non-coopérative est explicitement stratégique.

Depuis Cournot (1838), il importe de savoir, d'une part, si une solution d'équilibre non-coopératif peut être appliquée dans un cadre de monopole bilatéral, et d'autre part, si le modèle de duopole est intrinsèquement symétrique dans le rôle des deux firmes. Shubik (1972) se trouve dans l'incapacité de formuler un modèle monopolistique bilatéral satisfaisant où les *traders* échangent uniquement deux biens, comme un jeu symétrique non coopératif avec le prix comme variable stratégique pour chaque *trader*. Dans un modèle fermé, c'est-à-dire sans libre entrée et libre sortie du marché, lorsque le prix d'un bien est considéré comme numéraire, cela détruit la symétrie du modèle et prive le monopole de son action stratégique sur ce bien. L'absence d'un numéraire implique qu'il faut choisir « *le plus grand* » prix, car il ne doit y avoir réellement qu'un seul prix sur le marché. De la même façon, l'auteur n'est pas en mesure de formuler un modèle bilatéral monopolistique et symétrique avec deux biens en utilisant la quantité à offrir au marché comme variable stratégique. Selon lui, chaque monopoleur donne une quantité de son bien et quand le marché est apuré, le seul équilibre est l'équilibre trivial  $(0, 0)$ <sup>3</sup>.

Lorsque l'économie comporte deux *traders* de chaque type, chacun offre une quantité de son bien sur le marché et le prix est déterminé par :

$$\frac{1}{p} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \quad (1.2)$$

Où  $x_1, x_2$  désignent respectivement la quantité de bien proposé au marché par le *trader* 1 et 2, et  $y_1, y_2$  désignent respectivement la quantité de monnaie nécessaire pour acquérir le bien du trader 1 et 2.

Le *trader* reçoit en retour pour la quantité  $x_1$  donnée au marché, le montant

$$p.x_1 = \frac{(y_1 + y_2) \times x_1}{x_1 + x_2}$$

Au-delà de deux biens, il n'est plus évident de décrire comme ci-dessus le marché. Afin de résoudre ce problème, pour  $m$  biens, on pourrait considérer  $m(m-1)/2$  postes

---

3. Au sens de Cordella et Gabszewicz (1998)

d'échanges ou marchés et ceci pour chaque type de bien. Ce type de résultat implique l'impossibilité de définir un jeu non-coopératif du fait de l'existence de la double coïncidence des besoins des agents économiques. Il serait alors judicieux de considérer une autre approche où il est pris en compte l'ensemble des  $m$  biens plutôt que  $m(m-1)/2$  postes d'échanges. Cela implique l'utilisation de certains biens dans le but de se procurer tous les autres et justifie ainsi l'utilisation d'un « bien-monnaie ». Pour des raisons conventionnelles, l'auteur préconise de considérer le bien  $(m+1)$  comme « bien-monnaie ». Il n'y a donc aucune raison que les agents économiques acceptent un bien sans utilité sauf si celui-ci a une valeur de « *commodity money* ». Les modèles avec « *commodity money* » sont des modèles où la monnaie est une marchandise qui possède sa propre utilité. Ce bien-monnaie est un objet qui sert à compter. Il s'agit donc dans certains modèles d'un bien servant de numéraire qui n'est pas une monnaie fiduciaire.

Considérons à cet effet,  $n$  *traders* dont chacun a un comportement stratégique sur le bien qu'il possède. La dotation initiale pour ce bien est égale à l'unité et la quantité de monnaie détenue par l'agent économique est  $M_i$ . On désigne par  $d_{i,j}$  la quantité de monnaie consacrée par le *trader*  $i$  pour acquérir le bien  $j$  et  $q_{i,j}$  la quantité de bien  $j$  qu'il se procure sur le marché.

La stratégie du trader  $i$  est d'offrir une certaine quantité  $q_{i,i}$  de sa dotation initiale au marché. Sa stratégie est donc  $0 \leq q_{i,i} \leq 1$  afin d'obtenir la quantité  $q_{i,j}$  du bien  $j$  avec  $\sum_{j \neq i} d_{i,j} \leq M_i$ .

Et donc, le prix du bien  $j$  est donné par :

$$p_j = \frac{\sum_{i \neq j} d_{i,j}}{q_{j,j}} \quad (1.3)$$

avec  $p_{n+1} = 1$  représentant le prix du « bien-monnaie » qui sert de numéraire<sup>4</sup>.

La quantité du  $j^{\text{ème}}$  bien obtenu par le *trader*  $i$  à la fin des échanges est :

$$x_{i,j} = \frac{d_{i,j} q_{j,j}}{\sum_{h \neq j} d_{h,j}} \quad \text{pour } j = 1, \dots, n \quad \text{et } j \neq i$$

---

4. L'équation (1.3) traduit dans une certaine mesure la théorie quantitative de la monnaie avec une vitesse de circulation caractéristique qui est relativement constante dans le temps.

où  $\sum_{h \neq j} d_{h,j}$  représente les quantités de tous les autres biens pour obtenir le bien  $j$ .

Shubik (1972) note que l'équilibre non-coopératif sera influencé par deux éléments très importants. D'une part, la quantité du « bien-monnaie » dans l'économie qui doit être assez importante. Cela pourrait impliquer des facilités de crédit qui sont plus intéressantes et contrôlables dans une petite région ou encore dans le cas d'une nation plutôt que dans le cadre du commerce international. De plus, il faut introduire dans ce cadre un mécanisme extérieur qualifiée de « *Shadow Bank* » de sorte à financer le commerce des *traders* en manque du « bien-monnaie ». Il souligne l'importance de laisser chaque *trader* emprunter autant qu'il le souhaite. Il est juste important selon lui de fixer un ensemble de règles à la fois rigides, de sorte qu'un trader ne puisse pas emprunter énormément au marché et le conduire vers une situation de faillite, mais aussi souples, pour ne pas décourager les emprunts. D'où la nécessité d'une base axiomatique qui dans la réalité n'est pas réalisable du point de vue de l'auteur. D'autre part, le système mis en place devra être basé sur la croyance et la rationalité des agents et n'est donc pas évident à obtenir.

### **Le modèle de Shapley et Shubik (1977)**

L'idée maitresse dans ce modèle est donc d'utiliser comme suggéré précédemment au cours des échanges un bien spécifique comme un moyen de paiement. Il met en exergue le processus de formation des prix en environnement stratégique. Le modèle de Shapley et Shubik (1977) considère  $L$  biens, le dernier (le bien  $L$ ) étant numéraire (« *commodity money* »). Ils considèrent un poste d'échange pour chaque bien ( $k = 1, \dots, L - 1$ ) sauf pour le bien qui sert de monnaie dans les échanges. À chaque poste d'échange, les biens sont négociés contre le « bien-monnaie ». Le modèle d'équilibre général classique est parfait pour établir l'existence des prix (souvent non unique) à l'équilibre.

Plusieurs types de mécanisme de formation des prix pourraient être considérés tout en plaçant des restrictions différentes sur les possibilités stratégiques. Ainsi, les *traders* doivent juste contrôler les quantités offertes ou demandées. Ils peuvent aussi désigner les prix de réservation, les gammes de prix et même leurs demandes pour des transactions particulières. Il est adopté dans ce modèle une généralisation de l'approche originale de

Cournot. En effet, dans le mécanisme de formation des prix, les variables ne sont pas les prix, mais plutôt les quantités.

Comme principales hypothèses pour leur modèle, les auteurs considèrent  $n$  traders, avec  $(m + 1)$  biens. Le bien  $(m + 1)$ , de par son addition à la fonction d'utilité offre une possible utilité dans la consommation. Lorsque l'individu n'arrive pas à rembourser son crédit dans un système, il subit une désutilité. Dans le cas contraire, il n'y a pas une d'augmentation de son utilité. Les auteurs attribuent à chaque *trader* un panier initial de biens :  $a_i = (a_1^i, \dots, a_m^i, a_{m+1}^i)$ .

La fonction d'utilité  $u_i(u_1^i, \dots, u_m^i, u_{m+1}^i)$  est supposée concave (dans un souci d'existence de solution). Les auteurs soulignent que l'utilité des individus dépend de la quantité de monnaie :  $x_{m+1}^i$ . La possibilité d'une monnaie fiduciaire n'est pas exclue. Dans la procédure générale, chaque *trader* soumet ses dotations initiales de biens au marché et les rachètent grâce au « bien-monnaie ». Les prix sont ainsi déterminés par le mécanisme d'offre et de demande sur le marché et le *trader* peut ne pas consacrer tout son bien-monnaie pour le rachat d'un lot de biens initiaux. Les prix d'équilibre sont déterminés en égalisant l'offre à la demande de biens initiaux avec le  $(m + 1)^{\text{ème}}$  bien qui joue le rôle d'intermédiaire des échanges.

### Mécanismes de formation des prix

Considérons les dotations initiales des individus  $\omega_k^i = (\omega_1^i, \dots, \omega_2^i, \omega_L^i)$ . Désignons par  $q_k^i = (q_1^i, \dots, q_{L-1}^i)$  les quantités de bien  $k$  que le *trader* offre au marché pour la vente et  $b_k^i = (b_1^i, \dots, b_{L-1}^i)$ , la quantité de monnaie qu'il est prêt à dépenser pour acheter le bien  $k$ . Les prix qui apurent ces différents marchés sont désignés par :

$$p_k = \frac{B_k}{Q_k} \quad (1.4)$$

où les quantités  $B_k$  et  $Q_k$  sont respectivement les quantités agrégées de monnaie prêtes à être dépensées et de bien  $k$  offert au marché du bien  $k$ .

Après les échanges, l'allocation de l'agent  $i$  pour le bien  $k$  est :

$$x_k^i = \omega_k^i - q_k^i + \frac{b_k^i}{p_k} \quad (1.5)$$

La quantité de monnaie de chaque individu  $i$  est :

$$x_L^i = \omega_L^i - \sum_{k=1}^{L-1} b_k^i - q_k^i p_k \quad (1.6)$$

La quantité  $x_k^i$  de bien  $k$  demandée par l'individu  $i$  est égale à toute sa dotation initiale en bien  $k$  offerte au marché à laquelle est retranchée la quantité qu'il offre pour la vente et à laquelle il est rajouté la quantité qu'il arrive à acheter à l'aide du « bien-monnaie » dont il dispose au prix  $k$ .

La conséquence qui en résulte est que la valeur des demandes sur le marché par l'agent économique ne doit pas excéder la quantité de monnaie détenue par ce dernier. L'offre précède les prix et elle émerge dans un cadre naturel, comme le résultat d'offres simultanées de tous les vendeurs.

### 1.2.2 Le modèle d'Amir et al. (1990)

Amir et al. (1990) montrent que l'introduction d'un bien monnaie dans l'économie, proposée initialement par Shapley et Shubik (1977), ne permet pas un commerce efficient. Ils justifient cette situation par le fait que l'économie ne dispose pas d'assez de liquidité même en utilisant tous les biens comme « *commodity money* » pour satisfaire les échanges. Dans leur modèle, les auteurs considèrent un poste d'échange par paire de biens, avec chaque poste opérant à la Shapley et Shubik (1977). Lorsqu'il est considéré par exemple, deux biens  $k$  et  $l$ , le prix est déterminé par rapport aux actions essentiellement sur le poste d'échange  $(k, l)$ . Ainsi, les auteurs prouvent tout comme dans Dubey et Shubik (1978a), que les prix (en termes monétaire) sont obtenus pour le bien  $j$  en divisant la quantité de monnaie qui sert à l'achat du bien  $j$  par la quantité de bien  $j$  disponible sur le marché pour la vente. Au sens de Dubey et Shubik (1978a), les prix sont donc :

$$p_j = \begin{cases} \frac{\sum_{\alpha=1}^n b_j^\alpha}{\sum_{\alpha=1}^n q_j^\alpha} & \text{si } \sum_{\alpha=1}^n q_j^\alpha \neq 0 \\ 0 & \text{si } \sum_{\alpha=1}^n q_j^\alpha = 0 \end{cases}$$



Avec  $b_j^\alpha$  qui représente la quantité de monnaie provenant du *trader*  $\alpha$  pour obtenir le bien  $j$  et  $q_j^\alpha$  la quantité de bien  $j$  offerte à la vente par le même *trader*  $\alpha$ .

Amir et al. (1990) proposent une économie avec  $m(m-1)/2$  postes de marchés sans l'utilisation de la monnaie et  $(m-1)$  postes de marchés avec l'usage du « bien-monnaie ».

### Hypothèses du modèle

Pour leur modèle, les auteurs formulent les hypothèses suivantes :

- Soit  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ , l'ensemble des traders et des biens respectivement ;
- Il faut au moins 2 traders et 2 biens pour réaliser le modèle ;
- Chaque trader  $\alpha$  a une dotation  $a_i^\alpha$  pour le bien  $i$  ;
- Chacun des agents a une dotation pour tous les biens ;
- Les fonctions d'utilité sont strictement concaves, croissantes et continument différentiables ;
- $\{i, j\}$  est considéré comme le marché entre les biens  $i$  et  $j$  ;
- $b_{ij}^\alpha$  est la quantité de bien  $i$  que le *trader*  $\alpha$  offre au commerce sur le marché  $\{i, j\}$  ;
- $S^\alpha$  est l'ensemble des possibles stratégies du trader  $\alpha$ .

### Formation des prix

Etant données les hypothèses ci-dessus, les prix sont donnés par :

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{\alpha=1}^n b_{ij}^\alpha}{\sum_{\alpha=1}^n b_{ji}^\alpha} & \text{si } \sum_{\alpha=1}^n b_{ij}^\alpha \neq 0 \\ 0 & \text{si } \sum_{\alpha=1}^n b_{ij}^\alpha = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

L'équilibre de Nash est un équilibre de meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs. Les auteurs notent qu'il existe un équilibre de Nash pour ce jeu dont l'équilibre trivial est une parfaite illustration.

L'analyse menée par Amir et al. (1990) considère un mécanisme où le prix  $p_{k\ell}$  ne prend en compte que ce qui se passe sur le marché des biens  $k$  et  $\ell$ . Ceci conduit inéluctablement à un problème d'incompatibilité s'exprimant par l'identité :

$$p_{kj} \cdot p_{j\ell} \neq p_{k\ell} \quad (1.8)$$

Le problème d'incompatibilité conduit à une incohérence des prix. Cette dernière s'explique par le fait que le prix entre deux biens sur un poste d'échange peut se modifier lorsqu'on transite par deux autres postes d'échange. Ainsi, avec l'introduction d'un troisième bien, la transitivité des prix d'échange sur chacun des deux postes entre ce dernier bien et les deux premiers biens conduit à cette situation d'incohérence. Sous l'hypothèse d'indépendance totale des marchés, cela se justifie dans la pratique par une situation où certains agents décident de faire de la spéculation sur les prix sur une partie du marché et de la spéculation sur un bien donné sur une autre partie.

### 1.2.3 Modèle de Sahi et Yao (1989)

La solution relative au problème d'incompatibilité du modèle d'Amir et al. (1990) est de considérer que la détermination de chaque prix relatif dépend de tous les postes d'échanges. C'est le but du *Shapley's « window model »* initié par Sahi et Yao (1989). Sahi et Yao (1989) construisent les prix dans l'esprit de Shapley et Shubik (1977). À « *un prix correspondant à un bien donné* » et non « *un prix pour un poste d'échange* » dans l'esprit de Amir et al. (1990). Il s'agit d'une règle de prix d'offres. Le modèle d'Amir et al. (1990) considère les marchés totalement indépendants. Cette sous-section s'applique à déterminer les prix lorsque tous les agents ont des comportements imparfaitement concurrentiels, puisque nous savons le faire dans un cadre de concurrence pure et parfaite. Dans ce paragraphe est exposé le mécanisme de prix issu du modèle de Sahi et Yao (1989). Ce mécanisme est utile dans la suite de la thèse afin de construire notre modèle de différenciation.

### Les hypothèses du modèle

Les hypothèses du modèle de Sahi et Yao (1989) sont les suivantes :

- Considérons  $I_n$  l'ensemble des *traders* et  $I_m$  l'ensemble des biens. Les auteurs font l'hypothèse que l'économie présentée dispose d'au moins deux biens.  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les indices des traders, tandis que  $i$  et  $j$ , ceux des biens ;
- Chaque *trader* a des dotations  $a_i^\alpha \geq 0$  pour chaque bien  $i$  ;
- $U^\alpha$  représente la fonction d'utilité qui est concave, croissante et continue pour un ensemble non négatif  $\mathbb{R}_+^m$  de  $\mathbb{R}_+$  ;
- Il existe au moins deux *traders* avec des fonctions d'utilités continument différentiables à l'intérieur de  $\mathbb{R}_+^m$  ;
- Les auteurs fixent  $\sum_\alpha a_i^\alpha = 1$  pour tout  $i$  ; il s'agit de la normalisation des dotations des agents à l'unité ;
- Chaque individu possède une matrice carrée d'ordre  $m$  des « *bids* » (offres) telle que  $B^\alpha = (b_{ij}^\alpha)$ ,  $b_{ij}^\alpha \geq 0$   $i, j \in I_m$  ;
- $\sum_i b_{ij}^\alpha \leq a_j^\alpha$ ,  $\forall j \in I_m$ . Avec  $b_{ji}^\alpha$  représente la quantité de bien  $j$  que le *trader*  $\alpha$  offre en échange du bien  $i$ . Cette quantité ne doit pas excéder sa dotation de bien  $j$ .

### Règle de prix

Le modèle de Sahi et Yao (1989), comme évoqué précédemment, est un modèle d'offres. Considérant les hypothèses énumérées ci-dessus, la règle de prix est la suivante :

$$\text{Pour tout } p \gg 0 \quad : \quad \sum_{i=1}^m p_i \bar{b}_{ij} = p_j \left( \sum_{i=1}^m \bar{b}_{ji} \right) \quad \forall \quad j \in I_m$$

où  $\bar{b}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n b_{ij}^\alpha$ . Finalement :

$$p \gg 0, \quad \sum_{i=1}^m p_i \left( \sum_{\alpha=1}^n b_{ij}^\alpha \right) = p_j \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{\alpha=1}^n b_{ji}^\alpha \right) \right) \quad \text{pour tout } j \in I_m \quad (1.9)$$

L'équation (1.9) se traduit par : la valeur des offres pour acheter les autres biens doit être égale à tout ce qui est offert. Tout se passe comme une règle de centralisation où tous les agents ont des comportements stratégiques.

### Commentaires sur le mécanisme des prix de Sahi et Yao (1989)

La règle de prix présentée précédemment traduit le fait que les valeurs des offres agrégées des autres biens pour obtenir le bien  $j$  sont égales à la valeur agrégée du bien  $j$  offert afin d'acquérir les autres biens. Cette règle de prix reste dans l'esprit de Shapley et Shubik (1977), et prend simultanément en compte tous les postes d'échanges. Elle considère la valeur des biens sans introduire la monnaie comme dans Shapley et Shubik (1977).

Considérant le mécanisme de prix précédent, la demande du *trader*  $\alpha$  pour le bien  $j$  est :

$$\begin{cases} x_j^\alpha = a_j^\alpha - \sum_i b_{ji}^\alpha + \sum_i b_{ij}^\alpha (p_i/p_j) & \text{si } p \text{ satisfait (1.9)} \\ x_j^\alpha = a_j^\alpha & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.10)$$

L'allocation finale en bien  $j$  de l'individu  $\alpha$  est égale à sa dotation initiale à laquelle s'ajoute sa demande nette en bien  $j$ . La seconde partie de l'allocation finale n'est rien d'autre que la quantité de bien  $j$  obtenue en cédant tous les autres biens à laquelle est retranchée la quantité de bien  $j$  offerte au marché afin d'acquérir tous les autres biens.

Mertens (2003), utilisant une variante du mécanisme de prix formalisé par Sahi et Yao (1989)<sup>5</sup>, considère que chaque joueur doit fournir au marché, un panier de biens dans le but d'acquérir un bien donné. Il démontre par ailleurs que tout agent économique participant à l'échange peut juste envoyer des offres séparées au marché, c'est-à-dire une offre pour chaque poste d'échange (une offre du même bien). Pour les fonctions linéaires, l'équilibre compétitif est connu pour être unique (Gale (1976)) avec la stricte monotonie des utilités. Finalement, il ressort que le mécanisme de prix efficient, dans le cadre d'un modèle d'offre en environnement stratégique, est bel et bien celui de Sahi et Yao (1989).

---

5. Le modèle de type « *Shapley Window* »

## Résultats

Comme résultats importants, Sahi et Yao (1989) montrent que :

- Étant donné la matrice des « bids »  $B$  et celle des offres agrégées  $\bar{B}$  alors la matrice  $B$  possède un vecteur apurant le marché si et seulement si  $\bar{B}$  est complètement réductible ;
- Ce vecteur prix apurant est unique (à un scalaire près) si et seulement si  $\bar{B}$  est irréductible<sup>6</sup> ;

Une perturbation du jeu précédent au sens de Dubey et Shubik (1978b) n'affecte pas les stratégies mais plutôt les prix, les allocations finales et les gains. Il est défini un équilibre de Nash de type symétrique.

- L'équilibre de Nash de type symétrique existe pour le jeu perturbé si et seulement si  $\bar{B}$  est complètement réductible ;
- L'équilibre de Nash de type symétrique converge par réplication vers l'équilibre concurrentiel ;

## Matrice des « bids »

Ce paragraphe présente la matrice des « bids » dans le modèle Sahi et Yao (1989). Cette matrice constitue les différentes offres de dotations initiales des *traders* pour obtenir un bien donné. Nous présentons donc cette matrice avec toutes les implications qui en découlent dans le but d'obtenir un vecteur de prix cohérent.

Chaque *trader*  $\alpha$  a une matrice de « bids »  $B^\alpha$  qui est :

$$B^\alpha = \begin{pmatrix} b_{11}^\alpha & b_{12}^\alpha & \dots & b_{1i}^\alpha & \dots & b_{1m}^\alpha \\ b_{21}^\alpha & b_{22}^\alpha & \dots & b_{2i}^\alpha & \dots & b_{2m}^\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1}^\alpha & b_{m2}^\alpha & \dots & b_{mi}^\alpha & \dots & b_{mm}^\alpha \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

---

6. Une matrice non-négative  $A$  de format  $\ell \times \ell$  est dit irréductible si pour toute paire  $i \neq j$ , il existe un entier positif  $k = k(i, j)$  tel que  $a_{ij}^{(k)} > 0$  ; où  $a_{ij}^{(k)}$  représente le  $(ij)$ <sup>ème</sup> élément de la matrice  $A^k$

La colonne  $i$  de  $B^\alpha$  est le vecteur de bien que le *trader*  $\alpha$  offre en échange du bien  $i$ .

La matrice des « *bids* » pour l'ensemble de l'économie est donc une matrice diagonale carrée d'ordre  $n$  :

$$B = \begin{pmatrix} B^1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B^3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & B^n \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Définissons à présent la matrice des offres agrégées  $\bar{B}$  représentant les offres totales des agents économiques par type de bien pour obtenir un bien donné. Nous avons :

$$\bar{b}_{ij} = \sum_{\alpha \in I_n} b_{ij}^\alpha \quad (1.13)$$

Donc la matrice des offres agrégées s'écrit :

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} & \dots & \bar{b}_{1i} & \dots & \bar{b}_{1m} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} & \dots & \bar{b}_{2i} & \dots & \bar{b}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{b}_{m1} & \bar{b}_{m2} & \dots & \bar{b}_{mi} & \dots & \bar{b}_{mm} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

L'existence et l'unicité du vecteur prix reposent sur cette matrice  $\bar{B}$ . Compte tenu d'un profile de stratégies  $b$ , un vecteur de prix  $p$  est dit apurer le marché, si :

$$p \gg 0, \quad \sum_{i=1}^m p_i \bar{b}_{ij} = p_j \left( \sum_{i=1}^m \bar{b}_{ji} \right) \quad \text{pour tout } j \in I_m$$

Ainsi,  $p$  apure le marché si et seulement si  $\bar{B}$  est complètement irréductible.



En réécrivant le système précédent, nous avons :

$$(p_1, \dots, p_m) \Delta \bar{B} - (p_1, \dots, p_m) \bar{B} = (p_1, \dots, p_m) (\Delta \bar{B} - \bar{B}) = 0 \quad (1.27)$$

Avec  $\Delta \bar{B}$  la matrice diagonale de la somme des lignes de  $\bar{B}$  qui est égale à :

$$\Delta \bar{B} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \bar{b}_{1i} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^m \bar{b}_{2i} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^m \bar{b}_{3i} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \sum_{i=1}^m \bar{b}_{mi} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Notons  $\tilde{B} = \Delta(\bar{B}) - \bar{B}$  et l'équation du mécanisme de Sahi et Yao (1989) devient :

$$p \tilde{B} = \mathbf{0} \quad (1.29)$$

avec  $\mathbf{0}$  qui représente un vecteur de composantes nulles de format  $(1 \times m)$ .

En vertu du lemme 1 de Sahi et Yao (1989), il existe un vecteur de prix, défini à un scalaire près, satisfaisant l'équation (1.29), si et seulement si la matrice  $\bar{B}$  est irréductible.

#### 1.2.4 Commentaires sur les mécanismes de prix

Le mécanisme d'Amir et al. (1990) conduit à des prix qui peuvent être incohérents. Nous pouvons donc exclure ce mécanisme qui pourrait surement produire des équilibres instables. Après l'élimination de ce mécanisme, le choix du mécanisme pertinent serait alors entre le TP-mécanisme de Shapley et Shubik (1977) et celui W-mécanisme de Sahi et Yao (1989). Le TP-mécanisme peut conduire à un problème de faillite bancaire puisque, pour que ce système soit efficient, l'économie nécessite de suffisamment de « bien-monnaie ». Ce qui ne peut être garanti dans la réalité. L'analyse de la faillite bancaire, qui ne fait pas l'objet de notre présentation, est un aspect suffisamment traité par plusieurs auteurs dont



Arrow et Hahn (1971) avec la conséquence qu'elle pourrait avoir sur l'échec du marché et plus précisément dans sa capacité à maintenir l'existence de l'équilibre. Giraud (2003) note que la faillite peut se produire sans que cela implique l'effondrement de l'ensemble de l'économie. Un second problème qui pourrait surgir est celui d'aléa moral où le système ne peut garantir de bonne foi des agents économiques qui emprunteront le « bien-monnaie » afin d'échanger sur les marchés. Un agent économique peut, pour des raisons de bien-être, décider de faire faillite. Il faut donc financer par le crédit ces types de joueur en faillite. Il est important de s'interroger sur la viabilité de ce système sur le long terme.

Ce système ne pourrait être viable que s'il est mis en place un ensemble d'axiomes qui pourrait permettre d'éviter les déviations possibles des agents économiques. De même, il faudrait donc trouver un « bien-monnaie » qui soit accepté de tous. Deux principaux problèmes se posent. Premièrement, l'équilibre obtenu pourrait ne pas être un équilibre de Nash. Deuxièmement, il n'y a pas assez de monnaie disponible pour l'échange afin de tendre vers l'équilibre de Walras. Pour pallier ce second problème, les auteurs proposent l'introduction de la monnaie fiduciaire, qui représente un prêt vis-à-vis du système économique. Cela ne peut se faire sans la mise en place d'une banque que les auteurs appellent « *Shadow bank* ». Cette banque octroie des prêts qui doivent être remboursés<sup>7</sup> à la fin des échanges. La conséquence de ce palliatif peut engendrer un problème de défaut de paiement. Pour Postlewaite et Schmeidler (1978), avec la monnaie fiduciaire, l'équilibre de Nash converge vers l'équilibre de Walras, mais de sévères sanctions sont à infliger en cas de défaut de paiement. Dans la littérature, la plupart des jeux stratégiques de marché où l'équilibre de Nash converge vers l'équilibre de Walras sont en général ceux proposés dans les modèles de Dubey et Geanakoplos (2001), Sahi et Yao (1989) et Sorin (1996). Ces modèles excluent l'utilisation de la monnaie comme moyen d'échange.

Le W-mécanisme étendu par Mertens (2003), quant à lui, sert à éliminer, selon l'auteur, l'équilibre autarcique qui est lui-même exclu au sens de l'équilibre de Nash. Weyers (2003) étudie le mécanisme de Mertens (2003) et note qu'il y a, cependant, un autre espoir pour se débarrasser de l'équilibre de Nash autarcique. Weyers (2003) montrent qu'en voulant éliminer les stratégies faiblement dominées, il faut réaliser deux fois le mécanisme de

---

7. Ici le taux d'intérêt est négligé car le modèle est atemporel et il n'existe pas de préférence pour le futur.

Mertens (2003) afin d'en éliminer l'équilibre autarcique. Ces deux tours n'affectent en aucun cas l'ensemble des allocations de l'équilibre de Nash. Le mécanisme de Mertens (2003) est une extension du mécanisme de prix de Sahi et Yao (1989) qui résout deux types de difficultés. Premièrement, il résout le problème d'existence en passant de l'équilibre concurrentiel à un pseudo-équilibre. Enfin, le problème d'unicité est contourné en appliquant la règle proportionnelle<sup>8</sup>. Il est ainsi obtenu un pseudo-équilibre proportionnel.<sup>9</sup>

Dubey et Sahi (2003) considèrent deux mécanismes de prix établis par Shapley et Shubik (1977), Shapley (1977) et Sahi et Yao (1989) qu'ils nomment dans leur document G-mécanisme. Ils établissent un ensemble d'axiomes pour une classe de mécanismes qui inclut ces deux mécanismes comme des cas spéciaux. En définissant quatre axiomes que sont l'agrégation, l'invariance, la médiation de prix et l'accessibilité (aussi explicité par Shubik (1990)) que doivent remplir les mécanismes de prix, les auteurs montrent qu'il est important que l'ensemble des allocations soit convexe. La preuve vient du seul fait que la convexité de l'ensemble des allocations est due seulement au prix. Le signal du *trader* affecte l'allocation *via* les prix. Il ressort donc que la convexité géométrique du prix affecte celle des allocations. Giraud (2003) montre que les marchés de change peuvent fournir un cas pratique d'analyse se situant entre le mécanisme de Shapley et Shubik (1977) et Shapley (1977). Dans ce cas, il est judicieux de souligner qu'aucune devise ne peut jouer le rôle de monnaie vis-à-vis des autres devises. Cela exclut le TP-mécanisme. D'autre part, deux monnaies ne peuvent être directement échangées l'une contre l'autre. Cela exclut le mécanisme Shapley (1977) également.

8. Le couple prix et allocation  $(p, x)$  est dit proportionnel s'il existe un système de poids  $\mu_{cc'}$  (tels que pour toutes les paires de biens avec le prix non nul,  $\mu_{cc'} + \mu_{c'c} > 0$ ) qui soit consistant dans le sens  $\mu_{c1c2}\mu_{c2c3}\mu_{c3c1} = \mu_{c1c3}\mu_{c3c2}\mu_{c2c1}$  pour tout triplet, tels que tous les agents ayant une utilité non nulle et dont l'ensemble de demande à  $p$  inclu les biens  $c$  et  $c'$  reçoivent dans les proportions  $\mu_{cc'}$  et  $\mu_{c'c}$

9. Le but étant de choisir au départ un pseudo-équilibre proportionnel, de régler les transactions correspondantes et de répéter la procédure avec une économie restreinte aux produits de base ayant un prix nul.

### 1.2.5 Existence et convergence dans les jeux stratégiques de marché

Dans cette section, nous présentons les résultats importants pour l'analyse des jeux stratégiques de marché. Il s'agit notamment de l'existence de l'équilibre de Nash qui est au centre des programmes de recherche proposés par Shapley (1977), Shapley et Shubik (1977), mais aussi des conditions de convergence de cet équilibre surtout vers celui concurrentiel.

#### Existence de l'équilibre de Nash dans les jeux stratégiques de marché

En prélude à la présentation de l'existence d'un équilibre dans les jeux stratégiques de marché, définissons quelques concepts.

Considérant le jeu  $\Gamma$  défini dans Sahi et Yao (1989), il est défini par *équilibre de Cournot-Nash*, la paire  $(B, p)$  satisfaisant l'équation (6) avec  $B = (B^1, B^2, \dots, B^n)$  tel que pour tout trader  $\alpha \in I_n$ ,  $\Pi^\alpha(B^1, B^2, \dots, B^n) = \sup_{T \in S} \{\Pi^\alpha(B^1, \dots, B^{\alpha-1}, T, B^\alpha, \dots, B^n)\}$ .

Aussi, Cordella et Gabszewicz (1998) *définissent comme équilibre trivial, un point d'équilibre*<sup>10</sup> *sans échange sur le marché*. L'équilibre de Nash trivial est un équilibre de Nash (Dubey et Shubik (1978b)) où tous les postes sont inactifs. Lorsque le prix de demande du bien est supérieur au prix d'offre, il est l'unique équilibre du jeu. En conséquence, on qualifie d'*équilibre non trivial, un équilibre de Nash quand tous les marchés sont actifs*. En son théorème 1 (P 6), Dubey et Shubik (1978b) prouvent que lorsque tous les *traders* désirent le « bien-monnaie », pour tout bien  $j$ , il est obtenu un équilibre *non trivial* avec au moins deux *traders* possédant le « bien-monnaie » et désirant  $j$ , et au moins deux autres prêts à fournir le bien  $j$ . Ainsi, considérant  $p_j$ , le prix du bien  $j$ , issu du jeu proposé par Dubey et Shubik (1978b), il existe deux constantes positives  $C_j$  et  $D_j$  telles que :  $C_j < p_j < D_j$  (lemme 2, Dubey et Shubik (1978b)).

Cordella et Gabszewicz (1998) analysent deux aspects dans un modèle d'oligopole bilatéral en économie d'échanges purs avec  $n$  agents partitionnés sur deux côtés qui ont des dotations en coin et une fonction d'utilité linéaire. Les auteurs étudient la possibilité d'échanges et recherchent ainsi sous quelles conditions l'économie dispose d'un équilibre

10. Il s'agit d'un équilibre qui est approché par une séquence d'équilibres de Nash du jeu initial perturbé.

autarcique et à quel instant ce dernier est *nice* c'est-à-dire est un point d'équilibre<sup>11</sup> ou pas. Dans la modélisation proposée par Cordella et Gabszewicz (1998), il existe deux types d'équilibre : l'équilibre où le *trader* offre toute sa dotation initiale pour l'échange et l'équilibre trivial

Considérant l'inégalité suivante,

$$\text{TMS}^{12} > \frac{n-2}{n} \quad (1.30)$$

Les auteurs prouvent :

- Lorsque l'identité (1.30) est vérifiée, le modèle admet un équilibre trivial qui est unique et est un point d'équilibre : un équilibre *nice* ;
- Lorsque l'identité (1.30) n'est pas vérifiée, il peut toujours co-exister un équilibre trivial pour de petites valeurs de  $n$  qui n'est pas *nice*<sup>13</sup> et pour de grandes valeurs de  $n$ , un  $n$ -uplet d'offres concurrentielles qui est l'unique point d'équilibre du jeu : ce  $n$ -uplet est donc *nice* ;
- L'unique cas dans la littérature où l'équilibre trivial est *nice* pour de grandes valeurs de  $n$  est la situation où l'allocation initiale est Pareto optimale (Shapley (1977)) ;

L'importance de l'approche est l'interprétation de l'équilibre autarcique lorsqu'il est *nice* ou pas. Lorsque l'équilibre trivial est un point d'équilibre et que le jeu est faiblement perturbé alors il n'y a presque pas d'échanges car l'avantage perçu en participant au jeu est compensé par l'avantage stratégique obtenu en réduisant son offre dans le but de manipuler le prix. Dans le cas contraire, de faibles perturbations du jeu induisent les agents à considérer une stratégie de non-participation à l'échange.

Busetto et Codognato (2006) dans la même veine étudient le problème d'existence de possibilité des échanges quand les postes d'échange sont actifs ou inactifs. Ils définissent un équilibre de Nash-Shapley comme un équilibre dans lequel :

- Soit les marchés sont *fulls* et dans cette situation, il y a échange et les prix sont positifs ;

---

11. Il s'agit de la limite d'une séquence qui converge vers ce point au sens de la séquence.

12. Taux Marginal de Substitution.

13. La séquence du jeu perturbé tend vers le jeu initial et nous avons un point limite.

- Soit il existe une situation dans laquelle il y a des opportunités qui sont exploitées et les marchés sont libres et il n'y a pas de prix de demande mais un prix virtuel (les auteurs ne le démontrent pas) ;
- En utilisant le cadre d'analyse de Cordella et Gabszewicz (1998), Busetto et Codognato (2006) montrent qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash-Shapley sous les hypothèses de Dubey et Shubik (1978b) et donc qu'il n'y a pas de prix virtuel.

A présent, passons à quelques cas de convergence de l'équilibre en jeux stratégiques de marché.

### **Convergence de l'équilibre de Nash dans les jeux stratégiques de marché**

Dans les modèles présentés, chaque joueur, défini sur un ensemble compact, possède un ensemble de stratégies convexes, de même qu'une fonction de gain qui est concave sur ses propres stratégies. Le duopole de Cournot (1838) est une variante d'un jeu à la Nash où l'équilibre existe. Cournot (1838) montre que lorsque le nombre d'agents augmente, l'équilibre de Walras est atteint à la limite. Bertrand (1883) définit un autre jeu où les prix sont les variables stratégiques et montre également que l'équilibre de Nash coïncide avec l'équilibre de Walras et ceci au moins pour deux firmes compétitives. Par ailleurs, dans un cadre d'analyse à la Bertrand (1883), la fonction de gain est discontinue et n'est pas du type Nash. L'extension de Bertrand (1883) est plutôt l'œuvre de plusieurs auteurs et conduit à un jeu discontinu et n'est pas l'objet de nos travaux.

Dans les modèles de Shapley (1977) et Shapley et Shubik (1977) qui sont des extensions de Cournot (1838), la difficulté à surmonter par l'agent économique est d'arriver à vendre sur un marché afin de s'approvisionner sur un autre. L'importance dans ce mécanisme est introduction d'une contrainte budgétaire. Amir et al. (1990) ont alors proposé de mener l'analyse par biens paires. Ceci conduit à des systèmes de prix qui ne sont pas cohérents ce qui pourrait conduire à un équilibre de Nash qui reste éloigné de l'équilibre de Walras.

Considérant l'équilibre basique de Shapley et Shubik (1977), il conduit toujours vers un équilibre de Nash autarcique où l'offre de chaque joueur est nulle. Cordella et Gabszewicz

(1998) montrent que pour un équilibre de Nash trivial dans une économie d'échange, il n'y a pas d'échange. Et si les dotations initiales étaient Pareto optimales, cela pourrait éviter la formation des marchés et ainsi conduire à des gains inefficients.

Quand les marchés sont ouverts, le pouvoir de manipulation du prix de chaque joueur est une fonction décroissante du nombre de joueurs interagissants. Shubik (1990) montre que l'équilibre « nice de Nash » converge par réplication vers l'équilibre de Walras. Ce qui provient de la convergence originelle de Debreu et Scarf (1963) : théorème de noyau de convergence.

**Remarque :**

Avec un nombre fini  $n$  d'agents, le noyau contient des allocations compétitives quand  $n$  tend vers l'infini. En revanche, pour tout nombre fini  $n$ , les allocations de Nash et de Walras sont bien disjointes.

Dubey et Sahi (2003) dérivent l'existence de l'équilibre de Walras directement du théorème de Nash de jeux non-coopératifs en utilisant une variante du jeu de Shapley et Shubik (1977). L'équilibre de Walras est obtenu comme un équilibre de Nash d'un jeu généralisé qui inclut un jeu de prix. Ils montrent que l'équilibre de Walras existe sans sortir du cadre d'analyse de l'équilibre de Nash. L'équilibre de Walras n'est que la limite d'une séquence d'un jeu de type Nash.

En analysant les conditions de convergence de l'équilibre de Nash vers équilibre de Walras, nous avons :

- L'équilibre de Walras qui est un équilibre obtenu par limite de l'équilibre de Nash du jeu symétrique répliqué (Dubey et Shubik (1978a))<sup>14</sup> ;
- Dans un cadre d'économie d'échange pure avec un nombre fini d'agents, Codognato et Gabszewicz (1991) qui démontrent que l'économie de Cournot-Walras converge par réplication vers l'équilibre walrasien. Il s'agit d'une approche non-coopérative ;

---

14. La plupart des études utilise le *théorème de Kakutani* où nous avons l'existence d'un point fixe et donc de l'équilibre de Nash symétrique pour le démontrer

- Codognato et Gabszewicz (1993), en utilisant un cadre d'analyse à la Aumann (1964) avec un continuum d'agents stratégiques, montrent également que les équilibres de Cournot-Walras et de Walras coïncident ;
- Shitovitz (1973) prouve le même résultat pour un oligopole coopératif. Son modèle dispose d'une structure mixte avec un secteur non atomique (un continuum de *traders*) et des atomes (oligopoleurs).

### Conclusion partielle

Cette section, nous avons analysé les jeux stratégiques de marché en regardant chronologiquement l'évolution des mécanismes de prix. Trois principaux mécanismes de prix à savoir les mécanismes de Shapley et Shubik (1977), Sahi et Yao (1989), Amir et al. (1990) ont retenu l'attention. En considérant les caractéristiques de chacun de ces mécanismes, il ressort que le meilleur mécanisme de prix qui rend efficacement compte du marché est celui de Sahi et Yao (1989). Il s'agit d'un mécanisme de prix d'offres que nous retiendrons dans la construction de notre modèle. Mertens (2003) confirme que ce mécanisme de prix est le plus efficient. Nous optons plutôt dans le modèle de différenciation des produits un mécanisme de prix de *Sahi et Yao (1989)* qui est modifié du fait de la présence d'une partie concurrentielle.

## 1.3 Les modèles de différenciation

Cette section est consacrée aux modèles de différenciation afin d'en déduire les éléments utiles dans la construction du modèle de différenciation des produits en équilibre général. Cournot (1838) présente une analyse qualifiée plus tard d'oligopole de Cournot qui est réalisée sous les hypothèses suivantes :

*H1- Le produit est identique sur le marché ;*

*H2- La symétrie dans le comportement ;*

*H3- Le comportement stratégique ;*

*H4- Le capacité de production identique des firmes ;*

*H5- La non coopération : équilibre de Nash ;*

*H6- Les producteurs sont assujettis à un coût de production.*

La levée de l'une de ces hypothèses modifie donc le modèle de Cournot. L'hypothèse *H1* met en exergue l'homogénéité des biens qui dans la réalité n'est pas vérifiée, car les producteurs, afin de gagner des parts de marché, se positionnent en modifiant leur bien de celui du concurrent. Plusieurs articles traitent de cette notion de différenciation (D'Aspremont et al., 1979; Dixit et Stiglitz, 1977; Hotelling, 1929; Salop, 1979; Singh et Vives, 1984; Spence, 1976). En s'inspirant du modèle de Dixit et Stiglitz (1977), Singh et Vives (1984) introduisent cette notion dans un cadre d'équilibre partiel où ils arrivent à déterminer le prix et de manière duale, la quantité qui prévaut sur le marché entre deux biens différenciés compte tenu du degré de différenciation. Ici, nous présentons la notion de différenciation et par la suite nous choisissons l'approche qui paraît judicieuse dans le cadre de la construction du modèle.

La notion de différenciation des produits est abordée en équilibre partiel au travers d'un certain nombre d'éléments. Shy (1995) analyse les oligopoles produisant les biens différenciés en équilibre partiel et qui prend en compte chez le consommateur les notions de goût, de logos, des marques etc. En somme, la notion de la différenciation faite par les producteurs découle d'une imparfaite substituabilité entre les biens. Nous sommes amenés à nous questionner sur :

- l'existence des grandes familles de modèles différenciés ;
- et les conséquences de l'analyse en équilibre général.

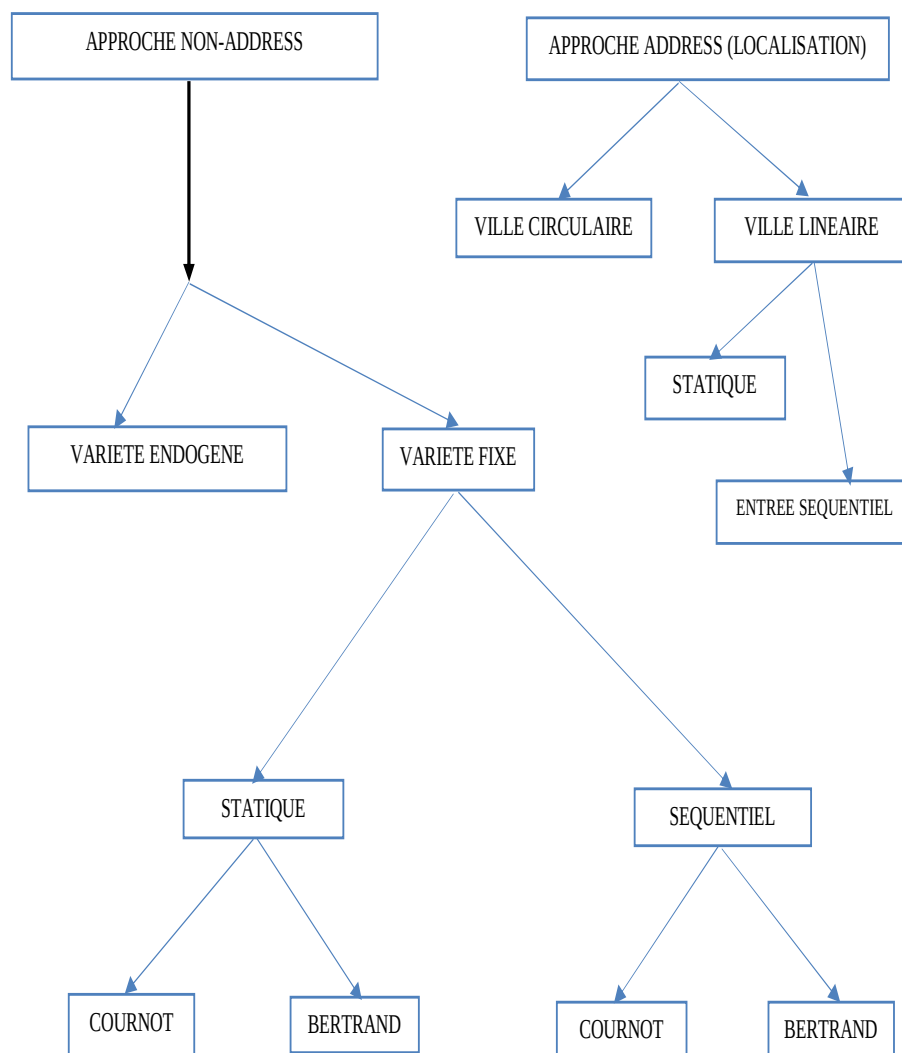


### 1.3.1 Familles de modèles différenciés

Les spécialistes de l'économie industrielle distinguent principalement deux formes de différenciation : celle horizontale et verticale. La littérature présente deux grandes familles de modèles différenciés (Shy (1995)), Tirole (1988)) : les « *modèles de non localisation* » et les « *address models* » (modèles de localisation).

Le schéma ci-dessous présente la taxinomie de biens différenciés que nous pourrions avoir :

FIGURE 1.1 – Schéma des grandes familles de modèles différenciés



Source : Oz Shy (1995)

L'organigramme ci-dessus présente plusieurs embranchements pour les deux grandes catégories de modèles de différenciation. L'approche de non-localisation fait l'hypothèse que

chaque agent consomme une part de chaque marque. Dans cette approche, il est mis en exergue sa préférence pour les différentes variétés de la branche. Dans la seconde famille, le consommateur consomme juste une seule marque. Une troisième approche que nous ne présentons pas ici est celle relative à Lancaster (1973) qui se base sur l'« *approche des caractéristiques* » qui supposent que chaque produit peut être différencié du point de vue de ses caractéristiques telles que la couleur, la durabilité, la sécurité etc.

### Les modèles de non-localisation

Il est présenté dans cette sous partie, un modèle simple de différenciation pour deux produits qui considère deux firmes qui produisent deux biens différenciés indexés par  $i = 1, 2$ . La production est sans coût dans le but de simplifier la présentation. Considérant Dixit et Stiglitz (1977) et Singh et Vives (1984), nous supposons que la structure de demande inverse pour les deux produits est :

$$p_1 = \alpha - \beta q_1 - \gamma q_2 \text{ et } p_2 = \alpha - \gamma q_1 - \beta q_2 \text{ avec } \beta > 0 \text{ et } \beta^2 > \gamma^2$$

Les coefficients  $\beta$  et  $\gamma$  sont des coefficients partiels. Le prix de chaque branche est plutôt sensible au changement de la quantité de la branche plutôt qu'à celle de la branche concurrente. En économie industrielle, on dit que « l'effet du propre prix domine celui du prix croisé ». Le degré de différenciation est alors mesuré par :  $\delta \equiv \frac{\gamma^2}{\beta^2}$ . Les travaux de Singh et Vives (1984) révèlent que :

- Les biens sont donc fortement différenciés si  $\delta \rightarrow 0$ , c'est-à-dire  $\gamma^2 \rightarrow 0$  ;
- Les biens seront considérés comme homogènes si  $\delta \rightarrow 1$  ;
- Les coefficients  $\beta$  et  $\gamma$  servent à différencier les produits.

### Les modèles de localisation ou de différenciation spatiale

Les principaux modèles de localisation sont Hotelling (1929) et Salop (1979). Hotelling (1929) suppose que des consommateurs sont localisés en des points différents où les consommateurs ont des goûts hétérogènes qui se trouvent sur un continuum. L'auteur fait l'hypothèse de libre-entrée sur le marché. L'économie dispose ainsi d'un grand nombre d'entreprises sur le marché. Ce qui implique, pour des raisons de simplification un profit

quasiment nul pour les entreprises. Cette hypothèse découle de l'hypothèse de niveaux de technologie égaux et d'existence de coûts fixes. Hotelling (1929) considère une ville linéaire de longueur l'unité située sur une droite. Les consommateurs ont une demande unitaire et dichotomique c'est-à-dire, qu'ils consomment une unité ou pas du tout .

Lorsque les entreprises sont localisées aux deux extrémités de la ville, les fonctions de demande sont les mêmes pour des coûts linéaires et quadratiques. Les biens sont donc des compléments stratégiques en prix. On parle néanmoins de biens différenciés qui sont d'autant plus différenciés que les coûts de transport sont élevés. Plus les coûts de transport sont élevés, plus l'économie aura tendance à tendre vers des monopoles. Ceci implique une augmentation des prix de chaque entreprise. Avec la prise en compte de l'aspect de la localisation, les entreprises font face à un prix de transport et un coût fixe. Ainsi, on parle de différenciation en termes de localisation lorsque le consommateur est indifférent à acheter chez l'un ou l'autre des vendeurs. Plus le coût de transport est élevé, plus la différenciation est prononcée. Un autre cas serait que les deux entreprises se localisent au même point et que leurs biens soient des substituts parfaits. Cela conduit à un profit nul pour les deux entreprises.

Quand les entreprises se situent à l'intérieur d'un intervalle, ce type de modèle n'est pas très utilisé (fonctions de demande discontinues, fonctions de profit discontinues et non-concaves). Il s'agit du cas limite du modèle. Le problème de concurrence a donc de mauvaises propriétés. En effet, D'Aspremont et al. (1979) montrent que lorsque les firmes sont localisées près du centre du segment, il n'existe pas d'équilibre en prix en stratégies pures. Ils montrent que les positionnements optimaux sont  $a = \frac{1}{4}$  et  $b = \frac{3}{4}$ . Salop (1979), quant à lui, étudie l'entrée et la localisation quand il n'y a pas de barrières à l'entrée autres que des coûts fixes et des coûts d'entrée. L'auteur suppose un grand nombre de firmes potentiellement identiques, il s'intéresse aux firmes qui entrent sur le marché et considère donc une ville circulaire avec une distribution uniforme des consommateurs. Les consommateurs sont uniformément répartis sur un cercle de périmètre égal à l'unité. La densité du cercle est donc l'unité et tous les déplacements se font le long du cercle. Salop (1979) considère un jeu en deux étapes :

- À la première étape, les entrants potentiels choisissent simultanément d'entrer ou non sur le marché mais ne choisissent pas leur localisation. Elles se localisent automatiquement à la même distance les unes des autres sur le cercle. Nous avons donc une différenciation maximum qui est imposée de façon exogène ;
- À la seconde étape, étant données ces localisations, les entreprises se font une concurrence par les prix.

Salop (1979) analyse l'importance de l'entrée plutôt que l'examen des choix particuliers de produits. Ce type de modèle de différenciation ne serait pas adapté à notre étude du point de vue de l'idée proposée. L'élimination du choix des localisations permet l'étude du problème de l'entrée de façon simple et calculable. Le but est donc de deux ordres :

- Premièrement, déterminer l'équilibre de Nash en prix pour un nombre quelconque de firmes et calculer les fonctions de profit sous forme réduite ;
- Déterminer l'équilibre de Nash dans le jeu à l'entrée.

Dans ce type d'approche, le concurrent direct ne provient que des deux voisins qui l'entourent. Les prix sont supérieurs au coût marginal mais, cependant, les entreprises ne font pas de profit (hypothèse de libre-entrée sur le marché). Ne pas faire de grand profit pour les entreprises, ne signifie pas qu'elles ne disposent pas de pouvoir de marché. Aussi, un accroissement du coût fixe provoque une diminution du nombre de firmes et une augmentation de la marge de profit ( $p^c - c$ ), tandis qu'un accroissement du coût de transport augmente la marge de profit et donc le nombre de firmes. D'Aspremont et al. (1979) et Shaked et Sutton (1982, 1983) font l'hypothèse que les individus consomment une unité d'une qualité donnée (qualité  $U = \theta s - p$ ) au prix  $p$  et 0 autrement. Le paramètre qui représente la préférence pour la qualité est  $\theta$  et est uniformément distribué dans la population entre  $\theta \geq 0$  et  $\bar{\theta} = \theta + 1$ . La firme disposant d'une qualité élevée pour son bien, fait payer un prix plus fort que le producteur de faible qualité. Comme dans le modèle horizontal, les firmes non différenciées ( $\Delta s = s_1 - s_2 = 0$ ) quant à elles font payer le prix au coût marginal en ne faisant donc pas de profit.

## 1.4 Le modèle de Dixit et Stiglitz (1977)

Dixit et Stiglitz (1977) sont largement cités grâce à leur article « *Monopolistic competition and optimum product Diversity* » qui fait office de tremplin dans divers domaines de l'économie tels que l'économie industrielle, le commerce international, l'économie géographique, la théorie de la croissance et la macroéconomie. Les auteurs présentent la procédure du « *two-stage budgeting* », ce qui nous intéresse dans cette partie. Nous présentons la manière dont se dérive cette procédure.

Le but de cette sous-section est d'analyser les économies d'échelle dans des résultats d'optimum social. Ils utilisent trois principaux cas afin de modéliser la préférence pour la diversité. Sur cette dernière, ils notent que les approches spatiale de Hotelling (1929), des caractéristiques des produits de Lancaster (1973) et du modèle de sélection conduisent à des coûts de transport et une corrélation parmi les biens qu'il est difficile d'interpréter de manière générale. Les auteurs adoptent la convexité traditionnelle des fonctions d'utilité qui incarne mieux la préférence pour la variété. L'idée de cette partie est de montrer et commenter la manière dont les auteurs obtiennent leurs résultats.

### 1.4.1 Préférences

Afin de prendre en compte la préférence pour la variété, les auteurs considèrent les préférences du type :

$$u = U(x_0, V(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Il est considéré deux secteurs. Le premier secteur avec un bien homogène sous les rendements d'échelles constants et les caractéristiques de concurrence parfaite. Le second secteur prend en compte un groupe de firmes monopolistiques qui produisent sous les rendements d'échelles croissants. Les fonctions d'utilité sont séparables, avec des courbes d'indifférence convexes. La lettre  $U$  désigne la courbe d'indifférence sociale de Samuelson ou un multiple de la fonction d'utilité représentative du consommateur. Pour les auteurs, le produit diversifié peut être interprété comme l'utilisation des différentes variétés par différents consommateurs ou comme la diversification de la part de chaque consommateur.

Le bien  $x_0$  est un bien numéraire produit par le premier secteur, tandis que les autres biens sont des biens différenciés produits par le second secteur.

Dixit et Stiglitz (1977) traitent trois cas qui correspondent aux hypothèses suivantes :

- La fonction  $V$  est une fonction symétrique ;
- Dans un premier cas, les auteurs utilisent une spécification CES pour  $V(\cdot)$  tandis que  $U(\cdot)$  est une fonction arbitraire ;
- Dans un second cas,  $U(\cdot)$  a une spécification de type Cobb-Douglas.

### Le cas général

#### Première étape d'optimisation :

Dans ce cas précis, Dixit et Stiglitz (1977) utilisent une fonction de type CES pour la fonction  $V(\cdot)$  :

$$u = U\left(x_0, \left[\sum_i x_i^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}\right)$$

avec  $\rho \in (0, 1)$ . Cela permet d'assurer la concavité de  $U(\cdot)$ . Le paramètre  $\rho$  est le paramètre de substitution et désigne « la préférence pour la variété ». La fonction  $U(\cdot)$  est supposée être homothétique en ses arguments<sup>15</sup>. Puisque  $U(\cdot)$  est une fonction d'utilité séparable, le problème du consommateur se résout en deux étapes : premièrement, on trouve les allocations optimales de chaque sous-groupe, de même que les quantités.

Considérons à cet effet,  $y$  une quantité qui représente tous les biens du secteur 2 :

$$y \equiv \left[\sum_i x_i^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

et donc la première étape,

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & U(x_0, y) \\ \text{s.c.} \quad & x_0 + q \cdot y \leq I \end{aligned} \tag{1.31}$$

---

15. Une fonction  $f$  est homothétique en ses arguments  $\iff f(x) = g(h(x))$  où  $g$  est une fonction monotone et  $h$  une fonction homogène de degré 1

En posant  $g(x_0, y) = x_0 + q \cdot y - I$ , alors le problème à résoudre devient :

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & U(x_0, y) \\ \text{s.c.} \quad & g(x_0, y) \leq 0 \end{aligned} \tag{1.32}$$

La contrainte  $g$  est affine et donc qualifiée. Le lagrangien s'écrit :

$$L(x_0, y, \lambda) = U(x_0, y) - \lambda[x_0 + q \cdot y - I] \tag{1.33}$$

Si les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont satisfaites en  $a = (x^*, y^*)$ , alors  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} < \nabla_{(x_0, y)} L(a, \lambda), a > & = & 0 \\ \nabla_{(x_0, y)} L(a, \lambda) & \geq & 0 \\ a & \in & \mathbb{R}_+^2 \\ \lambda[x_0 + q \cdot y - I] & = & 0 \\ x_0 + q \cdot y - I & \leq & 0 \end{array} \right. \tag{1.34}$$

Cela donne entre autre :

$$U_0 - \lambda = 0 \tag{1.35}$$

$$U_y - \lambda q = 0 \tag{1.36}$$

$$x_0 + qy - I = 0 \tag{1.37}$$

Des équations (1.35) et (1.36), il ressort que :

$$\frac{U_y}{U_0} = q = \frac{p_y}{p_0} \tag{1.38}$$

Avec  $p_y = q$  et  $p_0 = 1$

Comme noté précédemment,  $U(\cdot)$  est homothétique et l'équation (1.38) traduit de manière unique la part des dépenses pour  $x_0$  et  $y$  car elle dépend essentiellement de leurs

utilités marginales relatives. Notons la part des dépenses pour  $y$  par  $s(q)$  et celle pour  $x_0$  par  $(1 - s(q))$ , les quantités optimales pour chaque secteur sont :

$$\begin{aligned} x_0 &= (1 - s(q))I \\ y &= \frac{s(q)}{q}I \end{aligned} \tag{1.39}$$

### Seconde étape d'optimisation :

Etant donné les résultats présentés précédemment et relatifs à  $y$  et  $s(q)$ , dans la seconde étape, il est déterminé la quantité à laquelle fait face le producteur de la variété  $i$ . Il est résolu le programme suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & y = \left[ \sum_i x_i^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} \\ \text{s.c.} \quad & \sum_i p_i x_i = s(q)I \end{aligned} \tag{1.40}$$

Le lagrangien s'écrit :

$$L = \left( \sum_i x_i^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} - \lambda \left[ \sum_i p_i x_i - s(q)I \right]$$

Les CPO donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = y^{1-\rho} x_i^{\rho-1} - \lambda p_i = 0 \tag{1.41}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_i p_i x_i - s(q)I = 0 \tag{1.42}$$

En résolvant l'équation (1.41) pour les  $x_i$ , nous avons :

$$x_i = y(\lambda p_i)^{\frac{1}{\rho-1}} \tag{1.43}$$



En l'insérant dans l'équation (1.42), nous obtenons :

$$\lambda^{\frac{1}{\rho-1}} = \frac{s(q)I}{y} \left[ \sum_i p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-1} \quad (1.44)$$

En insérant l'équation (1.44) dans l'équation (1.43), il vient que :

$$x_i = s(q)I p_i^{\frac{1}{\rho-1}} \left[ \sum_j p_j^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-1} \quad (1.45)$$

Afin de retrouver l'expression de  $y$ , nous élevons  $x_i$  à la puissance  $\rho$  et nous sommes sur  $i$ . Il vient que :

$$\sum_i x_i^\rho = \left[ \sum_j p_j^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-\rho} (s(q)I)^\rho \sum_i p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}$$

Enfin

$$y = \left[ \sum_i x_i^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} = \left[ \sum_j p_j^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-1} (s(q)I) \left[ \sum_i p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{1}{\rho}} \quad (1.46)$$

En identifiant les équations (1.39) et (1.46) alors :

$$q = \left[ \sum_j p_j^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{\rho-1}{\rho}} \quad (1.47)$$

**Résultat :** En posant  $\beta = \frac{1-\rho}{\rho}$

Il ressort de la fonction d'utilité définie plus haut et du prix indexé  $q$  que :

$$q = \left[ \sum_j p_j^{-\frac{1}{\beta}} \right]^{-\beta} \quad (1.48)$$

Des équations (1.45) et (1.48), il ressort que :

$$x_i = y \left[ \frac{q}{p_i} \right]^{\frac{1}{1-\rho}} \quad (1.49)$$

Les variétés  $x_i$  fournissent une définition formelle pour la courbe de demande perçue de l'entreprise prise de manière individuelle. En considérant une grande variété de biens de telle sorte qu'une décision individuelle d'une firme ne peut affecter le niveau général des prix, l'élasticité de la demande du bien  $x_i$  est :

$$\epsilon_d = \frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_i} = \frac{1}{\rho - 1} = \frac{-(1 + \beta)}{\beta} \quad (1.50)$$

Aussi pour tout bien  $i$  et  $j$  avec  $i \neq j$ , nous obtenons :

$$\frac{x_i}{x_j} = \left[ \frac{p_j}{p_i} \right]^{1/(1-\rho)}$$

Et donc l'élasticité de substitution entre deux biens dans le groupe est donné par :

$$\epsilon_s = \frac{\partial \log (x_j/x_i)}{\partial \log (p_i/p_j)} = \frac{1}{1 - \rho} \quad (1.51)$$

### Le cas où la fonction $U(.)$ est une Cobb-Douglas

Lorsque la fonction  $U(.)$  est une Cobb-Douglas et  $V(.)$  une CES, la fonction d'utilité qui en résulte s'écrit :

$$u = U(x_0, y) = x_0^{1-\alpha} y^\alpha$$

#### Première étape

Comme dans le cas général, il vient de :

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & u = x_0^{1-\alpha} y^\alpha \\ \text{s.c.} \quad & x_0 + q \cdot y = I \end{aligned} \quad (1.52)$$

En considérant la condition (1.38), la droite de budget, le cas d'une fonction de type Cobb-Douglas nous donne  $s(q) = \alpha$  pour le cas précédent et il vient que :

$$x_0 = (1 - \alpha)I \quad (1.53)$$

$$y = \frac{\alpha I}{q} \quad (1.54)$$

### Deuxième étape

Comme dans le cas général présenté, il suffit de remplacer  $s(q) = \alpha$ . On montre que le cas Cobb-Douglas/CES conduit aux mêmes résultats que précédemment. Le lagrangien dans ce cas s'écrit :

$$L = x_0^{1-\alpha} \left[ \sum_i x_i^\rho \right]^{\alpha/\rho} - \lambda \left[ x_0 + \sum_i p_i x_i - I \right]$$

Les CPO donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_0^{1-\alpha} \frac{\alpha}{\rho} \left[ \sum_i x_i^\rho \right]^{(\alpha-\rho)/\rho} \rho x_i^{\rho-1} - \lambda p_i = 0$$

En divisant les équations issues des CPO pour  $x_i$  et  $x_j$ , en multipliant par  $p_i$  et en sommant sur  $i$  alors :

$$\frac{x_i}{x_j} = \left[ \frac{p_i}{p_j} \right]^{1/(\rho-1)}$$

$$p_i x_i = p_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_j^{\frac{1}{1-\rho}}$$

$$I - x_0 = \sum_i p_i x_i = p_j^{\frac{1}{1-\rho}} x_j \sum_i p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}$$

$$x_j = \frac{(I - x_0) p_j^{\frac{1}{1-\rho}}}{\sum_i p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

$$= \frac{I - x_0}{q} \frac{q^{1/(1-\rho)}}{p_j^{1/(1-\rho)}}$$

$$\boxed{x_j = y \left[ \frac{q}{p_j} \right]^{1/(1-\rho)}} \quad (1.55)$$

Les résultats restent similaires à ceux obtenus plus haut.

### Conclusion partielle

Il ressort de l'analyse présentée ci-dessus, l'importance du modèle de Dixit et Stiglitz (1977). Les principaux cas évoqués dans l'article de base ont été traités. Aussi, les conséquences issues de l'analyse de Dixit et Stiglitz (1977) et révélées par les travaux de Eaton et Lipsey (1989) montrent que : (i) les entreprises font face à la même élasticité des prix (il est ainsi adopté un même *markup*) ; (ii) les entreprises rémunèrent au salaire et font face à la même technologie ; (iii) toutes les firmes ont le même prix  $p_i = p$  (symétrie) ; (iv) les goûts dans la réalité s'avèrent différents entre les individus. Nous avons alors un consommateur représentatif qui achète toutes les variétés existantes.

## 1.5 Le modèle de Julien et Tricou (2005)

Cette section est une présentation synthétique de l'article Julien et Tricou (2005). Cet article servira de socle dans la modélisation du cadre d'analyse de la thèse. Ainsi, il est présenté une application du mécanisme de prix de Sahi et Yao (1989) dans un cadre de monopole. Le choix de cet article repose sur le fait que tout monopole peut être perçu dans un esprit de différenciation de biens comme captant plus de parts de marché.

Dans leur article « *Specialized oligopolies in a pure exchange economy : the symmetric Cournot-Walras equilibrium* », les auteurs ont proposé une alternative symétrique à l'équilibre de Cournot-Walras asymétrique de Codognato et Gabszewicz (1991).

### 1.5.1 Le modèle général

L'analyse se focalise dans un cadre simpliste d'échange pur. Considérons une économie à  $L$  biens indicés par  $\ell = 1, \dots, L$  et  $H$  consommateurs où  $H = (1, 2, \dots, H)$ . Considérons également la fonction d'utilité des consommateurs  $U_h(x_h)$  continue, croissante et strictement quasi-concave. Les auteurs font l'hypothèse que les agents économiques ont des dotations en coin et comme le titre de l'article l'indique, se spécialisent par groupe d'agents dans la fourniture d'un bien<sup>16</sup>. Ainsi,

---

16. Conséquence de l'hypothèse de symétrie dans les comportements des agents.

$$\begin{aligned}
& (\omega_{h1}, 0, \dots, 0) \quad \text{pour } h = 1, \dots, n_1 \\
& (0, \omega_{h2}, 0, \dots, 0) \quad \text{pour } h = n_1 + 1, \dots, n_2 \\
& \quad \quad \quad \vdots \\
& (0, \dots, \omega_{h\ell}, 0, \dots, 0) \quad \text{pour } h = n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell \\
& \quad \quad \quad \vdots \\
& (0, \dots, \omega_{hL}) \quad \text{pour } h = n_{L-1} + 1, \dots, n_L
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Les agents stratégiques numérotés de  $1, \dots, n_1$  sont spécialisés dans le bien 1 pour lequel ils interagissent sur les autres biens.

Cette présentation n'est pas exactement une application de Sahi et Yao (1989) car chaque agent est stratégique pour le bien qu'il possède mais demandeur du bien qu'il ne possède pas. Si les agents dans le modèle de Julien et Tricou (2005) avaient des dotations en tous les biens, cela correspondrait en tout point au modèle de Sahi et Yao (1989). Les dotations des agents sont en coin et ils ne sont pas non plus en situation de monopole car il y a  $n$  agents pour chaque type de bien.

Les auteurs réalisent une résolution de leur modèle en deux étapes. Dans un premier temps, on détermine, compte tenu d'un profil de stratégies, les prix relatifs qui dépendent des stratégies *via* des règles « *price-taker* » sur des biens que l'agent ne possède pas. Les prix déterminés sont fonction des stratégies *via* l'identité demande nette = offre nette. Il ressort :

$$\underbrace{\sum_{h=1}^{h=H} x_{h\ell}(p(\tilde{e}))}_I = \underbrace{\sum_{h=n_{\ell-1}+1}^{h=n_\ell} \omega_{h\ell}}_J, \quad \forall \ell \tag{1.57}$$

où  $I$  représente la demande du bien  $\ell$  de tous les consommateurs et  $J$  représente la dotation finale en bien  $\ell$ . Cela se justifie par le fait que toute la dotation est consommée : par offre au marché et par consommation par les agents économiques.

Soit  $e_{h\ell}$  l'offre du *trader*  $h$  sur le  $\ell^{\text{ième}}$  marché. L'ensemble des stratégies s'écrit :

$$E_{h\ell} = \{0 \leq e_{h\ell} \leq \omega_{h\ell}\} \quad \forall \quad h = n_{\ell-1}, \dots, n_{\ell}$$

$E_{h\ell}$  est convexe et compact pour tout  $h$ . On suppose aussi que pour tout  $\ell$ , il existe au moins un  $h$  tel que  $e_{h\ell} \in E_{h\ell}$ ,  $e_{h\ell} > 0$ .

Considérant le système de prix  $p = (p_1, p_2, \dots, p_L)$ , chaque agent achète le panier  $x_h$  suivant le programme primal :

$$\text{Max} \quad U_h(x_{h1}, x_{h2}, \dots, \omega_{h\ell} - e_{h\ell}, \dots, x_{hL}) \quad \text{s.c.} \quad \sum_{k \neq \ell} p_k x_{hk} \leq p_{\ell} e_{h\ell} \quad \text{et} \quad x_{hh} \geq 0 \quad (1.58)$$

En considérant  $x_h = x_h(p, e_{h\ell})$  la solution de (1.58) et par les hypothèses faites sur les fonctions d'utilité et les dotations des agents, cette solution existe et est unique si  $p \gg 0$ .

La fonction de demande de bien  $k$  pour l'agent  $h$  s'écrit :

$$x_{hk} = x_{hk}(p_1, p_2, \dots, p_k \left( \sum_{h=n_{\ell-1}+1}^{n_{\ell}} e_{h\ell} \right), \dots, p_L, e_{h\ell}), \quad h = n_{\ell-1} + 1, \dots, n_{\ell} \quad (1.59)$$

L'équation (1.59) traduit le fait que l'agent  $h$  influence sa demande uniquement par son offre partielle  $e_{h\ell}$  au marché et prend les autres prix comme donnés.

Sous ces conditions, le prix d'équilibre  $p(e)$ , qui est fonction des offres individuelles, s'écrit :

$$p(e) = \left( p_1 \left( \sum_{h=1}^{n_1} e_{h1} \right), p_2 \left( \sum_{h=n_1+1}^{n_2} e_{h2} \right), \dots, p_{\ell} \left( \sum_{h=n_{\ell-1}+1}^{n_{\ell}} e_{h\ell} \right), \dots, p_L \left( \sum_{h=n_{L-1}+1}^{n_L} e_{hL} \right) \right) \quad (1.60)$$

et est solution du système à  $L$  équations définie par :

$$\begin{aligned}
& \sum_{h=n_1+1}^{h=H} x_{h1}(p_1, p_2, \dots, p_l, \dots, p_L) = \sum_{h=1}^{h=n_1} e_{h1} \\
& \quad \vdots \\
& \sum_{h=1}^{h=n_{\ell-1}} x_{h\ell}(p_1, p_2, \dots, p_\ell, \dots, p_L) + \sum_{h=n_{\ell}+1}^{h=H} x_{h\ell}(p_1, p_2, \dots, p_\ell, \dots, p_L) = \sum_{h=n_{\ell-1}+1}^{h=n_{\ell}} e_{h\ell} \quad (1.61) \\
& \quad \vdots \\
& \sum_{h=1}^{h=n_{L-1}} x_{hL}(p_1, p_2, \dots, p_l, \dots, p_L) = \sum_{h=n_{L-1}}^{h=H} e_{hL}
\end{aligned}$$

À la seconde étape du modèle, il est réalisé un jeu en quantités entre les oligopoleurs. La propriété des fonctions d'utilités, la positivité de  $\omega_{h\ell}$  et l'hypothèse sur les stratégies garantissent l'existence d'une solution. Après les échanges, l'agent  $h$  atteint l'allocation :

$$\langle x_{h1}(p(\tilde{e})), x_{h2}(p(\tilde{e})), \dots, x_{h\ell}(p(\tilde{e})), \dots, x_{hL}(p(\tilde{e})) \rangle \quad (1.62)$$

Nous avons évidemment :

$$\sum_{h=1}^{h=H} x_{h\ell}(p(\tilde{e})) = \sum_{h=n_{\ell-1}+1}^{h=n_{\ell}} \omega_{h\ell}, \forall \ell$$

### 1.5.2 Application du modèle général

Considérons pour le reste de l'analyse une économie d'échange avec  $L$  biens. La fonction d'utilité des agents est une fonction de type Cobb-Douglas :

$$U_h(x_h) = \prod_{l=1}^{l=L} x_{hl}^{\theta_l}$$

Pour des raisons de symétrie dans les comportements, nous avons  $\theta_l = \theta = 1$ . L'individu  $h$  a des dotations en coin. Ainsi, les agents détiennent une unité de dotations initiales pour un bien donné et nous avons :

$$\omega_h = (0, \dots, 1, \dots, 0) \quad \text{pour } h = n_{\ell-1} + 1, \dots, n_{\ell}$$

Comme présenté dans la première partie, les agents agissent de manière stratégique. Ils proposent donc au marché, une partie de leur dotations initiales. Ainsi, le but de ces agents (pour les agents possédant le bien  $\ell$ ) est de :

$$\text{Max}_{\{x_{hk}, k \neq \ell\}} \left(1 - e_{h\ell}\right) \prod_{k=1, k \neq \ell}^{k=L} x_{hk} \quad \text{s.c.} \quad \sum_{k=1, k \neq \ell}^{k=L} p_k x_{hk} \leq p_\ell e_{h\ell}, \quad \forall \quad e_{h\ell} \in [0, 1] \quad (1.63)$$

Nous obtenons donc  $(L - 1)$  fonctions de demande pour un bien donné et pour tous les biens,  $n_L(L - 1)$  fonctions de demande. Ainsi, la demande de l'individu  $h$  pour le bien  $k$  en offrant le bien  $\ell$  s'écrit :

$$x_{hk}^d = \frac{1}{L - 1} e_{h\ell} \frac{p_\ell}{p_k} \quad \forall \quad h = n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell \quad \text{et} \quad k \neq \ell \quad (1.64)$$

En remplaçant l'équation (1.64) dans celui (1.63), nous avons :

$$\text{Max}_{\{x_{hk}, k \neq \ell\}} \left(\frac{1}{L - 1}\right)^{L-1} \left(1 - e_{h\ell}\right) \prod_{k=1, k \neq \ell}^{k=L} e_{h\ell} \frac{p_\ell}{p_k} \quad \text{s.c.} \quad \sum_{k=1, k \neq \ell}^{k=L} p_k x_{hk} \leq p_\ell e_{h\ell}, \quad \forall \quad e_{h\ell} \in [0, 1] \quad (1.65)$$

L'équilibre général est déterminé par  $L$  équations.

$$\underbrace{p_\ell \sum_{h=n_{\ell-1}+1}^{h=n_\ell} e_{h\ell}}_A = \underbrace{\frac{1}{L - 1} \sum_{k=1, k \neq \ell}^{k=L} (n_k - n_{k-1}) e_{hk} p_k}_B, \quad \forall \ell = 1, \dots, L \quad (1.66)$$

où  $A$  est la valeur offerte au marché en bien  $\ell$  par les agents  $(n_k - n_{k-1})$  et  $B$  représente la valeur totale de tous les autres biens demandés en échange par ces agents.

Cette équation s'interprète comme suit : la valeur des offres pour acheter les autres biens doit être égale à tout ce qui est offert <sup>17</sup>.

Afin que le système à  $L$  équations soit soluble, les auteurs font l'hypothèse que :

---

17. Il est nécessaire d'avoir au moins trois biens pour ce jeu fonctionne



$$p_1 e_1 = \dots = p_\ell e_\ell = \dots = p_L e_L \quad \text{avec} \quad e_\ell = \sum_{k=n_{\ell-1}}^{k=n_\ell} e_{hk} \quad (1.67)$$

Cette hypothèse traduit la symétrie dans le comportement de tous les agents pour ce qu'ils offrent au marché.

En considérant l'équation (1.65) et en se servant de l'équation (1.67), nous obtenons :

$$\text{Max}_{\{e_{h\ell}\}} \left( \frac{1}{L-1} \right)^{L-1} (1 - e_{h\ell}) (e_{h\ell})^{L-1} \frac{\prod_{k=1, k \neq \ell}^{k=L} e_k}{(e_\ell)^{L-1}} \quad (1.68)$$

À la **deuxième étape**, la compétition se réalise entre oligopoleurs.

En réécrivant  $e_\ell = e_{h\ell} + (n_\ell - n_{\ell-1} - 1)e_{-h\ell}$  où  $e_{-h\ell}$  représente la stratégie de tout autre agent du secteur  $\ell$  différent de celui de l'agent  $h$ , la fonction à maximiser devient :

$$\text{Max}_{\{e_{h\ell}\}} \frac{\prod_{k=1, k \neq \ell}^{k=L} e_k}{(L-1)^{L-1}} \left[ \frac{(1 - e_{h\ell})(e_{h\ell})^{L-1}}{(e_{h\ell} + (n_\ell - n_{\ell-1} - 1)e_{-h\ell})^{L-1}} \right], \quad \forall h = n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell \quad (1.69)$$

Les conditions d'optimalité sont telles que  $\frac{\partial U_h}{\partial e_{h\ell}} = 0, \quad \forall h = n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell$ . En supposant que tous les individus du même secteur ont des comportements identiques c'est-à-dire  $\tilde{e}_{h\ell} = \tilde{e}_{-h\ell}$ . Les  $n_L$  stratégies d'équilibre sont donc :

$$\tilde{e}_{h\ell} = \frac{(L-1)(n_\ell - n_{\ell-1} - 1)}{L(n_\ell - n_{\ell-1}) - (L-1)} \quad \forall \quad h = n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell \quad (1.70)$$

Les allocations d'un agent appartenant au secteur  $\ell$ ,  $h = n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell$  sont données par :

$$\tilde{x}_{h\ell} = 1 - \tilde{e}_{h\ell} = \frac{n_\ell - n_{\ell-1}}{L(n_\ell - n_{\ell-1}) - (L-1)} \quad (1.71)$$

et

$$\tilde{x}_{hk} = \frac{(n_k - n_{k-1})(n_k - n_{k-1} - 1)}{(n_\ell - n_{\ell-1})[L(n_k - n_{k-1}) - (L-1)]} \quad (1.72)$$

### 1.5.3 Résultats

Les auteurs montrent que :

- Lorsque le nombre d'agents dans chaque secteur tend vers l'infini, l'équilibre de Cournot-Walras symétrique converge vers l'allocation concurrentielle ;
- Lorsque tous les secteurs sont répliqués excepté un seul, l'équilibre Cournot-Walras symétrique converge vers l'équilibre Cournot-Walras asymétrique de Codognato-Gabszewicz<sup>18</sup> ;
- L'équilibre Cournot-Walras symétrique est dominé par l'allocation walrasienne quand le pouvoir de marché est réparti de manière homogène dans l'économie ;
- L'équilibre Cournot-Walras symétrique n'est pas dominé par l'allocation walrasienne quand le pouvoir de marché est dispersé de manière hétérogène dans l'économie.

### Conclusion partielle

Cette section avait pour but de présenter l'analyse dans un cas de jeux stratégiques de marché. Il servira dans le cadre de modélisation pour la thèse. Le modèle de différenciation des produits en équilibre général à construire utilisera les mêmes techniques d'instruments que ceux de Julien et Tricou (2005). Le modèle de Julien et Tricou (2005) a depuis bien évolué et les modèles en vogue sont ceux à deux tours tels que celui de Julien (2013) présenté en annexe.

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre poursuit deux principaux objectifs. Premièrement, présenter les grandes classes de mécanismes de prix pour les jeux stratégiques de marché afin d'en tirer celui qui semble être le plus efficient du point de vue de notre thème. Deuxièmement, présenter les techniques que nous devrions mettre en œuvre pour la construction de notre modèle

---

18. Il est considéré une économie où les agents ont un comportement oligopolistique sur un marché mais des comportements compétitifs sur les autres marchés.

mathématique. Il ressort des analyses faites que le mécanisme de prix à la Sahi et Yao (1989) est le mécanisme de prix le plus efficient actuellement disponible qui rend compte des jeux stratégiques de marché dans un cadre d'équilibre général (Mertens, 2003) . Aussi, il permet l'élimination de l'équilibre autarcique par réplication du mécanisme de Mertens (2003) sans l'élimination des autres équilibres « non triviaux » et conduit à l'équilibre de Walras sous certaines conditions. Le modèle de Julien et Tricou (2005) servira de tremplin dans la construction de notre modèle. Dans la seconde section de ce chapitre, il est dressé un panorama des différents modèles de différenciation tout en justifiant par la suite que le modèle qui sera utilisé dans la construction du modèle : il s'agit de l'approche de « *non-localisation* ». Enfin, nous avons présenté et appliqué le modèle de Dixit et Stiglitz (1977) qui est très utilisé dans les divers domaines de l'économie. Les modèles abordés dans cette présentation et qui feront l'objet d'une large analyse durant cette thèse de doctorat sont les modèles en équilibre général avec un nombre fini d'agents.

## 1.7 Annexes : Le modèle de Julien (2013)

Julien (2013) est une extension de Julien et Tricou (2005) avec plusieurs *firms leaders* et satellites qui interagissent stratégiquement sur l'ensemble des marchés. L'auteur introduit une compétition à la Stackelberg (1934) dans les modèles de jeux stratégiques de marché de type Sahi et Yao (1989). Julien (2013) caractérise et définit son équilibre Stackelberg. Il analyse la convergence et le bien-être de son modèle dans un cadre d'interactions stratégiques entre les *traders* sur des marchés interconnectés complexifiés. Il s'agit d'un modèle d'échange pur de type Sahi et Yao (1989) avec une dotation en coin pour les *leaders*. Il ne suppose aucun comportement compétitif et l'auteur résout le modèle comme un jeu en deux étapes pour la partie stratégique.

### 1.7.1 Les hypothèses du modèle

Julien (2013) considère une économie d'échange pur  $\mathbb{E}$  qui comprend un ensemble fini  $\mathcal{L}$  de  $\ell$  biens de consommation indicé  $h$  avec  $h = 1, \dots, \ell$  et un ensemble  $\mathcal{I}$  fini de *traders*  $i, i = 1, \dots, n$ . La particularité de ce modèle est qu'il comprend à la fois des firmes *leaders* et *followers* qui sont dotées en bien  $h, h = 1, \dots, \ell$ . Nous avons donc pour un sous-ensemble de traders  $\mathcal{I}_h$ , où  $\mathcal{I} = \bigcup_{h=1}^{\ell} \mathcal{I}_h$ , des *leaders* et des *followers* tels que :  $\mathcal{I}_h = \mathcal{I}_h^L \cup \mathcal{I}_h^F$  avec  $\mathcal{I}_h^L$  et  $\mathcal{I}_h^F$  qui représentent respectivement les sous-ensembles de *leaders* et *followers* dotés en bien  $h, h = 1, \dots, \ell$ . L'auteur formule pour tout *trader*  $i$  trois hypothèses concernant leurs dotations initiales, leur fonction d'utilité et leur stratégie :

- (H1) Pour tout  $i \in \mathcal{I}$ ,  $U^i$  qui représente l'utilité du *trader* est tel que,  $U^i : X^i \subseteq \mathbb{R}_+^{\ell} \rightarrow \mathbb{R}, x^i \mapsto U^i(x^i)$  est continue, strictement croissante et strictement quasi-concave sur  $\mathbb{R}_{++}$  ;
- (H2) Pour tout  $i \in \mathcal{I}$ , le *trader* a une unique dotation telle que :  $\omega_h^i > 0$  avec un sous-ensemble de *trader* pour le bien  $h$  non vide ;
- (H3) L'ensemble des stratégies  $B^i$  du *trader*  $i$  pour le bien  $h$  satisfait :

$$\{b_{hk}^i \geq 0, k = 1, \dots, \ell : \sum_{k \in \mathcal{L}} b_{hk}^i \leq \omega_h^i\}$$

où  $b_{hk}^i$  indique la quantité de biens  $h$  que le *trader*  $i \in \mathcal{I}_h$  offre en échange du bien  $k$ ,  $k \in \mathcal{L}$ . Alors la stratégie pure pour le *trader*  $i \in \mathcal{I}_h$  est un vecteur avec les composantes  $b_{hk}^i$ ,  $k = 1, \dots, l$ .

### 1.7.2 L'équilibre Stackelberg

L'équilibre Stackelberg est modélisé en deux étapes. Dans une première étape, il est déterminé, compte tenu du profil de stratégies donné le vecteur de prix des biens *via* la règle de prix de Sahi et Yao (1989). Dans une seconde étape, les stratégies d'équilibre sont calculées. Ainsi, étant donné la matrice  $\wedge$  des offres formées par l'ensemble des vecteurs de stratégies, le vecteur de prix  $p(\wedge)$  est solution du système :

$$\sum_{h=1}^l p_h \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_h^L} b_{hk}^i + \sum_{i \in \mathcal{I}_h^F} b_{hk}^i \right) = p_k \sum_{h=1}^l \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_h^L} b_{hk}^i + \sum_{i \in \mathcal{I}_h^F} b_{hk}^i \right), \quad k \in \mathcal{L} \quad (1.73)$$

Cette équation est l'équation de prix de Sahi et Yao (1989) qui traduit que l'offre totale pour acheter un bien est égale à tout ce qui est disponible pour ce bien. Il ressort qu'il existe un système de prix  $p(\wedge)$  qui apure le marché si  $\wedge$  est irréductible (*confère l'équation (1.9) de la section 1.2.3*).

La fonction d'utilité indirecte (fonction de paiement)  $V^i$  du *trader*  $i \in \mathcal{I}_\ell^F$  satisfait (H1) et peut être écrit comme :

$$V^i(b_\ell^i, b_\ell^{-i}, b_{h \neq \ell}, b^L) \equiv U^i \left( x_1^i(p(\wedge), b_\ell^i), \dots, \omega_\ell^i - \sum_k b_{\ell k}^i, \dots, x_l^i(p(\wedge), b_l^i) \right) \quad (1.74)$$

Où  $b_\ell^{-i}$  représente le vecteur d'offres des autres *followers* excepté  $i$ ,  $b_{h \neq \ell}$  est le  $\# \cup_h \mathcal{I}_h^L$ -uplet des offres des *followers* qui possèdent des autres biens autre que  $\ell$  et  $b^L$  est la stratégie d'offre des *leaders*. Les *followers* résolvent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_1^i & \in \arg \max V^i(b_1^i, b_1^{-i}, b_{h \neq 1}, b^L), \quad i \in \mathcal{I}_1^F \\ (\dots) & \\ b_\ell^i & \in \arg \max V^i(b_\ell^i, b_\ell^{-i}, b_{h \neq \ell}, b^L), \quad i \in \mathcal{I}_\ell^F \\ (\dots) & \\ b_l^i & \in \arg \max V^i(b_l^i, b_l^{-i}, b_{h \neq l}, b^L), \quad i \in \mathcal{I}_l^F. \end{array} \right. \quad (1.75)$$

Le système (1.75) conduit à un système  $\# \cup_h \mathcal{I}_h^F$  de meilleures réponses. La meilleure réponse d'un *follower*  $i$  pour un bien donné  $\ell$  dépend des meilleures réponses des autres *followers* pour  $\ell$  sauf  $i$ , des stratégies de l'ensemble des *followers* pour les autres bien sauf  $\ell$ , mais aussi des stratégies des *leaders* pour  $\ell$ . En considérant comme vecteur de meilleures réponses  $\varphi_h^i$  pour tout  $i \in \mathcal{I}_h^F$ , il ressort :

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_1^i = \varphi_1^i(b_1^{-i}, b_{h \neq 1}, b^L), & i \in \mathcal{I}_1^F \\ (\dots) & \\ b_\ell^i = \varphi_\ell^i(b_\ell^{-i}, b_{h \neq \ell}, b^L), & i \in \mathcal{I}_\ell^F \\ (\dots) & \\ b_l^i = \varphi_l^i(b_l^{-i}, b_{h \neq l}, b^L), & i \in \mathcal{I}_l^F. \end{array} \right. \quad (1.76)$$

Lorsqu'une firme est *leader*, dans la détermination de sa stratégie optimale, elle tiendra compte dans sa fonction d'utilité indirecte du comportement des firmes satellites. Elle va alors intégrer les fonctions de réaction (meilleures réponses) de ces dernières dans sa fonction d'utilité. Dans le cas du modèle suivant, le système (1.76) est résolu par tout *trader*  $i \in \mathcal{I}^L$ . En supposant l'existence et l'unicité de l'équation (1.76), et pour tout comportement symétrique (comportement identique du même côté du marché) des *followers*, nous avons la solution qui est donnée par des vecteurs  $\# \cup_h \mathcal{I}_h^F$  de meilleures réponses  $\varphi_h : B_{k \neq h} \times B^L \longrightarrow B_h^i$ <sup>19</sup> tel que  $b_h = \varphi_h(b_k(b^L, b^L))$ ,  $h \in \mathcal{L}$ . L'auteur nomme par  $\bar{\varphi}$ , le vecteur où chaque composante est  $\varphi_h(b^L)$ . Alors,  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(b^L)$ .

Considérant la fonction d'utilité indirecte des *leaders*, leur programme s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_1^i \in \arg \max V^i(b_1^i, b_1^{-i}, b_{h \neq 1}, \bar{\varphi}(b^L)), & i \in \mathcal{I}_1^L \\ (\dots) & \\ b_\ell^i \in \arg \max V^i(b_\ell^i, b_\ell^{-i}, b_{h \neq \ell}, \bar{\varphi}(b^L)), & i \in \mathcal{I}_\ell^L \\ (\dots) & \\ b_l^i \in \arg \max V^i(b_l^i, b_l^{-i}, b_{h \neq l}, \bar{\varphi}(b^L)), & i \in \mathcal{I}_l^L. \end{array} \right. \quad (1.77)$$

Les solutions au programme conduisent à un système de  $\# \cup_h \mathcal{I}_h^L$  meilleures réponses pour les *leaders*. Comme dans le cas des *followers*, en considérant par  $\psi_h^i$  la correspondance

---

19.  $B_{k \neq h}$  représente le produit cartésien de l'ensemble des stratégies des *followers* qui ne sont pas dotés en bien  $\ell$  et  $B^L$  le produit cartésien de l'ensemble des stratégies des *leaders*.

de meilleures réponses du *leader*  $i$ ,  $i \in \cup_{h=1}^l \mathcal{I}_h^L$ , où  $\psi_h^i : \prod_{-i} B_h^{-i} \times B_{k \neq h} \longrightarrow B_h^i$ , nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_1^i = \psi_1^i(b_1^{-i}, b_{h \neq 1}), & i \in \mathcal{I}_1^L \\ (\dots) & \\ b_\ell^i = \psi_\ell^i(b_\ell^{-i}, b_{h \neq \ell}), & i \in \mathcal{I}_\ell^L \\ (\dots) & \\ b_l^i = \psi_l^i(b_l^{-i}, b_{h \neq l}), & i \in \mathcal{I}_l^L. \end{array} \right. \quad (1.78)$$

En supposant que le système d'équations (1.78) a une unique solution et, de même, en considérant un comportement symétrique chez les *leaders*, chaque *leader*  $i \in \cup_{h=1}^l \mathcal{I}_h^L$  a un vecteur d'équilibre des offres  $\hat{b}_h^i$ . Il s'en déduit du système (1.76)  $\hat{b}_h^i$  qui représente la stratégie optimale pour les *followers*  $i \in \cup_{h=1}^l \mathcal{I}_h^F$  et de l'équation (1.73) le prix optimal  $\hat{p}(\hat{\Lambda})$ . Ainsi, le vecteur de demande  $\hat{x}$  pour chaque trader  $i \in \mathcal{I}$  correspond à :

$$\hat{x}_h^i(\hat{\Lambda}, p(\hat{\Lambda})) = \omega_h^i - \sum_{k=1}^l \hat{b}_{hk}^i + \sum_{k=1}^l \hat{b}_{kh}^i \frac{p_k(\hat{\Lambda})}{p_h(\hat{\Lambda})}, \quad h \in \mathcal{L}. \quad (1.79)$$

L'auteur définit ainsi l'équilibre de Stackelberg en supposant qu'il existe et est unique : un équilibre de Stackelberg pour  $\Gamma$  est donné par une matrice des offres  $\hat{\Lambda} = (\hat{b}^F, \hat{b}^L)$ , un système de prix et une allocation  $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, \hat{x}^n) \in \mathbb{R}_+^{nl}$  tels que :

- (i) Pour tout  $i \in \mathcal{I}$ ,  $\hat{x}^i = \hat{x}^i(\hat{b}^F, \hat{b}^L)$ ;
- (ii)  $\sum_{i \in gtI} \hat{x}_h^i = \sum_{i \in gtI} \omega_h^i$ ,  $h = 1, \dots, l$ ;
- (iii)  $\forall i \in \mathcal{I}_h^F$ ,  $V^i(\hat{b}_h^i, \hat{b}_h^{-i}, \hat{b}_k, \hat{b}^L) \geq V^i(b_h^i, b_h^{-i}, \hat{b}_k, \hat{b}^L) \text{ text}, \forall b_h^i \in B^i$ ,  $h \in \mathcal{L}$ ;
- (iv)  $\forall i \in \mathcal{I}_h^L$ ,  $V^i(\hat{b}_h^i, \hat{b}_h^{-i}, \hat{b}_k, \hat{b}^F(\hat{b}^L)) \geq V^i(b_h^i, b_h^{-i}, \hat{b}_k, b^F(b^L))$ ,  $\forall b_h^i \in B^i$ ,  $h \in \mathcal{L}$ .

### 1.7.3 Application du modèle général

Dans l'exemple présenté par l'auteur, il y a deux biens et quatre agents. Au deux biens 1 et 2, l'auteur associe deux prix  $p_1$  et  $p_2$ . Pour la suite de l'étude, nous considérons le vecteur de prix sous forme relative :  $p = (\frac{p_1}{p_2}, 1)$ . Les préférences des agents sont :

$$U^i(x_1^i, x_2^i) = x_1^i x_2^i, i = 1, \dots, 4 \quad (1.80)$$

Les agents de notre économie ont des dotations en coin. Les agents 1 et 2 possèdent le bien 1 tandis que ceux 3 et 4 possèdent le bien 2. Aussi les agents 1 et 3 sont des *leaders* tandis que ceux 2 et 4 des *followers*. La répartition des dotations initiales est la suivante :

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= (\gamma_1, 0) \quad \text{et} \quad \omega_1^2 = (1 - \gamma_1, 0), \gamma_1 \in (0, 1) \\ \omega_2^3 &= (0, \gamma_2) \quad \text{et} \quad \omega_2^4 = (0, 1 - \gamma_2), \gamma_2 \in (0, 1) \end{aligned} \quad (1.81)$$

Le but des agents est :

$$\text{Max } U^i \text{ s.c. } p x_1^i + x_2^i \leq R^i \quad (1.82)$$

avec  $R^i = \gamma_i$  pour  $i = 1, 3$  et  $R^i = 1 - \gamma_i$  pour  $i = 2, 4$ .

La fonction d'utilité des agents économiques du modèle est une fonction de type Cobb-Douglas et, du fait de ses propriétés, les solutions de l'équilibre Walrasienne des *traders* sont données pour  $p^* = (1, 1)$  par :

$$\begin{aligned} ((x_1^i)^*, (x_2^i)^*) &= \left(\frac{\gamma_i}{2}, \frac{\gamma_i}{2}\right), \quad i = 1, 3 \\ ((x_1^i)^*, (x_2^i)^*) &= \left(\frac{1 - \gamma_i}{2}, \frac{1 - \gamma_i}{2}\right), \quad i = 2, 4 \end{aligned} \quad (1.83)$$

Définissons à présent les stratégies pour l'équilibre de Stackelberg :

$$\begin{aligned} B^1 &= \{b_{12}^1 \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq b_{12}^1 \leq \gamma_1\} \\ B^2 &= \{b_{12}^2 \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq b_{12}^2 \leq 1 - \gamma_1\} \\ B^3 &= \{b_{21}^3 \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq b_{21}^3 \leq \gamma_2\} \\ B^4 &= \{b_{21}^4 \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq b_{21}^4 \leq 1 - \gamma_2\} \end{aligned} \quad (1.84)$$

Pour le profil de stratégies  $b = (b_{12}^1, b_{12}^2, b_{21}^3, b_{21}^4)$ , le prix relatif est solution de :  $b_{21}^3 + b_{21}^4 = p(b_{12}^1 + b_{12}^2)$  (mécanisme de prix de Sahi et Yao (1989)). La valeur des offres en bien 2 afin d'acquérir le bien 1 est égale à la valeur de bien 1 disponible. Alors, le vecteur de prix relatif est égal à :

$$p = \left(\frac{b_{21}^3 + b_{21}^4}{b_{12}^1 + b_{12}^2}, 1\right) \quad (1.85)$$



En introduisant les stratégies des agents dans leurs fonctions utilité, on obtient une fonction de paiement  $V^i$  qui est fonction du prix relatif, lui aussi fonction des stratégies des agents. Il s'agit d'une fonction d'utilité indirecte. La maximisation de cette dernière par les *followers*, donne des fonctions de réaction qui sont solution de :

$$\begin{aligned} b_{12}^2 &\in \arg \max \underbrace{((1 - \gamma_1) - b_{12}^2 \left( \frac{b_{21}^3 + b_{21}^4}{b_{12}^1 + b_{12}^2} \right))}_{V^2} b_{12}^2 \\ b_{21}^4 &\in \arg \max \left( \frac{b_{12}^1 + b_{12}^2}{b_{21}^3 + b_{21}^4} \right) b_{21}^4 ((1 - \gamma_2) - b_{21}^4) \end{aligned} \quad (1.86)$$

Les CPO par rapport à  $\frac{\partial V^2}{\partial b_{12}^2} = 0$  nous donne pour le *follower* 2 :

$$-b_{12}^2 \left( \frac{b_{21}^3 + b_{21}^4}{b_{12}^1 + b_{12}^2} \right) + ((1 - \gamma_1) - b_{12}^2) \left( \frac{b_{21}^3 + b_{21}^4}{b_{12}^1 + b_{12}^2} \right) + b_{12}^2 \left( - \frac{b_{21}^3 + b_{21}^4}{(b_{12}^1 + b_{12}^2)^2} \right) = 0 \quad (1.87)$$

$$(b_{12}^2)^2 + 2 b_{12}^2 b_{12}^1 - (1 - \gamma_1) b_{12}^1 = 0 \quad (1.88)$$

L'équation (1.88) est l'équation d'un trinôme en  $b_{12}^2$ . En appliquant la démarche similaire au *follower* 4, nous obtenons les fonctions de meilleures réponses égales à :

$$b_{12}^2(b_{12}^1) = -b_{12}^1 + \sqrt{(b_{12}^1)^2 + (1 - \gamma_1) b_{12}^1}. \quad (1.89)$$

$$b_{21}^4(b_{21}^3) = -b_{21}^3 + \sqrt{(b_{21}^3)^2 + (1 - \gamma_1) b_{21}^3}. \quad (1.90)$$

Ces fonctions de réaction sont des fonctions croissantes, mettant en évidence la stratégie complémentaire entre les stratégies jouées par les *leaders* et les *followers*. En intégrant ces fonctions dans le prix relatif, les programmes des deux types de leaders sont les suivants :

$$b_{12}^1 \in \arg \max((\gamma_1 - b_{12}^1) \sqrt{\frac{(b_{21}^3)^2 + (1 - \gamma_2)b_{21}^2}{(b_{12}^1)^2 + (1 - \gamma_1)b_{12}^1}} b_{12}^1) \quad (1.91)$$

$$b_{21}^3 \in \arg \max \sqrt{\frac{(b_{12}^1)^2 + (1 - \gamma_1)b_{12}^1}{(b_{21}^3)^2 + (1 - \gamma_2)b_{21}^2}} b_{21}^3 (\gamma_2 - b_{21}^3) \quad (1.92)$$

En appliquant les CPO pour les équations (1.91) et (1.92) respectivement par rapport à  $b_{12}^1$  et  $b_{21}^3$ , nous déduisons les stratégies d'équilibre pour les leaders :

$$\begin{aligned} \hat{b}_{12}^1 &= \frac{1}{4}(\eta_1 - 3(1 - \gamma_1)) \\ \hat{b}_{21}^3 &= \frac{1}{4}(\eta_2 - 3(1 - \gamma_2)) \end{aligned} \quad (1.93)$$

Où  $\eta_1 \equiv \sqrt{(1 - \gamma_1)(9 - \gamma_1)}$  et  $\eta_2 \equiv \sqrt{(1 - \gamma_2)(9 - \gamma_2)}$ , avec  $\eta_1 \in (0, 3)$  et  $\eta_2 \in (0, 3)$

Il s'en déduit les stratégies d'équilibre des *followers* :

$$\begin{aligned} \hat{b}_{12}^2 &= \frac{1}{4}(\chi_1 - \eta_1 + 3(1 - \gamma_1)) \\ \hat{b}_{21}^4 &= \frac{1}{4}(\chi_2 - \eta_2 + 3(1 - \gamma_2)) \end{aligned} \quad (1.94)$$

Où  $\chi_i \equiv \sqrt{(\eta_i - 3(1 - \gamma_i))(\eta_i + (1 - \gamma_i))}$  avec  $\chi_i \in (0, 3\sqrt{2})$  pour  $i = 1, 2$

De l'équation (1.85) et des équations (1.93) et (1.94), le vecteur de prix est égal à :

$$\hat{p} = \left( \frac{\chi_2}{\chi_1}, 1 \right) \quad (1.95)$$

Enfin les allocations des agents sont les suivantes :

$$(\hat{x}_1^1, \hat{x}_2^1) = \left( \frac{1}{4}(3 + \gamma_1 - \eta_1), \frac{1}{4} \frac{\chi_2}{\chi_1} (\eta_1 - 3(1 - \gamma_1)) \right) \quad (1.96)$$

$$(\hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) = \left( \frac{1}{4}(\eta_1 - \chi_1 + (1 - \gamma_1)), \frac{1}{4} \frac{\chi_2}{\chi_1} (\chi_1 - \eta_1 + 3(1 - \gamma_1)) \right) \quad (1.97)$$

$$(\hat{x}_1^3, \hat{x}_2^3) = \left( \frac{1}{4} \frac{\chi_2}{\chi_1} (\eta_2 - 3(1 - \gamma_2)), \frac{1}{4}(3 + \gamma_2 - \eta_2) \right) \quad (1.98)$$

$$(\hat{x}_1^4, \hat{x}_2^4) = \left( \frac{1}{4} \frac{\chi_2}{\chi_1} (\chi_2 - \eta_2 + 3(1 - \gamma_2)), \frac{1}{4}(\eta_2 - \chi_2 + (1 - \gamma_2)) \right) \quad (1.99)$$

### 1.7.4 Résultats

Comme résultats intéressants, l'auteur montre que :

- Quand le nombre de *leaders* devient très grand des deux côtés du marché, l'équilibre Stackelberg coïncide avec l'équilibre de Walras ;
- En répliquant l'économie un certain nombre de fois, l'équilibre Stackelberg converge l'équilibre de Walras lorsque le nombre de *leaders* devient grand ;
- L'équilibre Stackelberg et l'équilibre Stackelberg-Cournot sont Pareto dominés par l'équilibre de Walras ;
- L'équilibre Cournot est Pareto dominé par l'équilibre Stackelberg.

#### Conclusion partielle

Cette section avait pour but de présenter une extension du modèle de Julien et Tricou (2005) avec plusieurs *leaders* et *followers* qui interagissent stratégiquement sur l'ensemble des marchés. Au travers de cette présentation, il est appliqué le mécanisme de prix à la Sahi et Yao (1989) qui est indispensable dans la construction de notre modèle et pour les jeux stratégiques de marché.

## CHAPITRE 2

---

### L'Equilibre Cournot-Walras Symétrique sur Produits Différenciés

---

#### Contenu

---

|     |                                                 |    |
|-----|-------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Introduction . . . . .                          | 11 |
| 1.2 | Les mécanismes de prix dans les JSM . . . . .   | 13 |
| 1.3 | Les modèles de différenciation . . . . .        | 35 |
| 1.4 | Le modèle de Dixit et Stiglitz (1977) . . . . . | 40 |
| 1.5 | Le modèle de Julien et Tricou (2005) . . . . .  | 47 |
| 1.6 | Conclusion . . . . .                            | 53 |
| 1.7 | Annexes : Le modèle de Julien (2013) . . . . .  | 55 |

---

Après les choix dans le chapitre 1 du mécanisme de prix de marché qui est adapté et de la famille de modèles de différenciation qui convient pour modéliser les interactions sur les marchés différenciés, le présent chapitre se consacre au modèle proprement dit <sup>1</sup>.

## 2.1 Introduction

Gabszewicz et Vial (1972) analysent pour la première fois une approche Cournot-Walras asymétrique dans une économie avec production. Dans une perspective d'équilibre général, ils introduisent les prémices d'une analyse où se retrouve l'idée de jeux non-coopératifs. Dans une autre perspective, celle des jeux stratégiques de marché, l'approche non-coopérative des échanges est notamment introduite par Shapley (1977) et Shapley et Shubik (1977). Dans cette approche, les agents économiques ont des dotations pour tous les biens et se comportent de manière stratégique. Ils sont alors conscients de l'influence qu'ils ont sur le prix des biens. Ils décident de leur plan d'offre pour chaque bien, c'est-à-dire quelle quantité ils sont disposés à échanger sur le marché et chaque agent par son offre (quantité offerte) manipule de manière partielle le prix. Il s'agit de l'équilibre de « Cournot-Nash ».

La modélisation proposée considère une économie qui dispose de deux parties de marché. Une première où les agents sont peu nombreux et se comportent de façon stratégique, mais aussi une seconde où les agents sont plus nombreux et agissent de manière concurrentielle. Cette approche est introduite par Gabszewicz et Vial (1972) et colle avec la modélisation que nous réalisons dans ce chapitre. Gabszewicz et Vial (1972) analysent les comportements asymétriques du côté producteur et consommateur au sein de l'économie. Les hypothèses, quant aux comportements stratégiques qu'ils utilisent sont dans l'esprit de Cournot lorsque ce dernier propose une analyse d'oligopole en quantités. La partie concurrentielle du marché se justifie alors par le fait que nous avons du point de vue de l'équilibre, un nombre élevé d'agents économiques qui sont *price-takers* et n'influencent pas le prix tandis que le secteur productif comprend un petit nombre de firmes qui influencent le prix,

---

1. Une partie de ce chapitre a fait l'objet d'un document de travail qui s'intitule « *A single general oligopoly model with differentiated commodities* » (Elegbede, 2017) et qui a été présenté au VIIth *Strategic Interaction and General Equilibrium (SI&GE) workshop* du 24 au 25 Novembre 2016 à l'université Paris 10.

d'où l'hypothèse d'asymétrie dans les comportements des deux types d'agents. L'explication de l'asymétrie se justifie par la taille des deux parties du marché qui joue aussi un rôle prépondérant. Les firmes se comportent donc « à la Cournot » alors que les consommateurs se comportent de manière concurrentielle (à la Walras). D'où l'appellation de l'« équilibre Cournot-Walras ». L'économie comprend une partie walrasienne et une partie stratégique. Cette dernière pouvant être modélisée comme un jeu dans lequel les joueurs sont les firmes, les stratégies sont les plans de production, les paiements sont les profits.

Par analogie au cadre d'analyse où le secteur productif est stratégique, lorsque dans une économie les dotations initiales d'un bien donné sont concentrées dans les mains d'un petit nombre d'agents, les oligopoleurs et les autres biens répandus entre un très grand nombre d'agents, l'on retrouve dans le cas précédent mais pour le cas d'une économie d'échange. Les oligopoleurs se comportent alors stratégiquement avec pour but ultime la manipulation des prix tandis que le reste des agents de l'économie agit de manière concurrentielle. Cette approche est développée par Codognato et Gabszewicz (1991, 1993) toujours dans un cadre asymétrique.

Une alternative au cas asymétrique à l'équilibre Cournot-Walras a été explorée pour la première fois par Julien et Tricou (2005). Ils développent et explorent le concept symétrique d'oligopole multilatéral esquissé par Gabszewicz et Michel (1997). Les agents sont donc offreurs stratégiques de leur propre bien mais se comportent de manière concurrentielle sur les autres biens. L'aspect symétrique se justifie par le fait que tous les agents se comportent de la même manière, de même que les marchés. L'« équilibre symétrique Cournot-Walras » implique donc deux aspects très complémentaires : des agents individuellement Cournotien offreur et walrasien demandeur d'une part, et d'autre part chaque marché avec une offre oligopolistique et une demande concurrentielle.

Trois principales raisons justifient l'approche symétrique proposée par ses auteurs : premièrement, il respecte la symétrie parmi les agents et parmi les marchés ; deuxièmement, il conduit à un comportement différencié pour chaque *trader* à savoir un pur comportement stratégique sur un marché et un pur comportement concurrentiel sur les autres ; enfin, il prévoit les dotations en coin pour les *traders*.

Le présent chapitre développe le concept d'équilibre général stratégique à la Cournot-Walras dans un cadre d'économie d'échange pure sur des marchés différenciés.

L'approche proposée se justifie par l'hypothèse d'homogénéité des biens présente dans les modèles précédents. Il s'agit d'une hypothèse forte car elle ne reflète pas le fonctionnement de l'économie puisque les biens qui sont proposés aux marchés pour être échangés sont généralement différenciés. L'analyse se situe dans le cas des modèles de différenciation de non localisation présentés dans la section 1.3.1. du chapitre 1. Dans cette approche, tout consommateur désire acquérir une variété de produits et donc acheter une variété de marques (une variété de disques de musique, de films, de logiciels, de biens, ...) <sup>2</sup>. Le modèle qui est présenté prend en compte les deux niveaux de différenciation à savoir celui objectif (différenciation verticale) et celui subjectif (différenciation horizontale). Cette démarche reprend les modèles précédents d'équilibre général et y introduit la notion de différenciation dans les produits. Il s'inspire des travaux de Chamberlin (1933), Dixit (1976), Dixit et Stiglitz (1977), Singh et Vives (1984), Eaton et Lipsey (1989), Hart (1985). Pour prendre en compte la différenciation, il est donc affecté à chaque agent concurrentiel un vecteur fini de coefficients de différenciation. Le modèle considéré est un modèle multi-produits avec un nombre fini de biens et d'agents.

Le chapitre est présenté en trois parties. Premièrement, il est défini le concept d'équilibre Cournot-Walras symétrique en échanges purs sur les marchés différenciés. L'analyse de l'existence de cet équilibre n'est pas abordée pour des raisons de complexité. Deuxièmement, des computations de cet équilibre sont mises en œuvre en utilisant les fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas et quasi-linéaire. Dans une dernière partie, il était intéressant de confronter les résultats obtenus avec la littérature sur ce genre de problème car il existe des résultats intéressants. Comme résultats, Shapley et Shubik (1977) démontrent que l'équilibre de Cournot converge par réplication vers l'équilibre de Walras. Aussi l'équilibre de Cournot-Walras converge vers l'équilibre de Walras (Gabszewicz et Vial, 1972). De même Julien et Tricou (2005) prouvent dès que le nombre d'agents dans chaque secteur tend vers l'infini, l'équilibre de Cournot-Walras symétrique converge vers l'allocation Walrasienne. L'explication est standard car lorsque le nombre d'agents dans un secteur devient très grand, cela entraîne une dilution du pouvoir de marché de chaque oligopoleur et conduit à une analyse en environnement concurrentiel

---

2. Shy (1995) (Page 135) « All consumers gain utility consuming a variety of products and therefore buy a variety of brands ... »

## 2.2 L'équilibre Cournot-Walras dans un modèle de différenciation

Cette section présente le cadre général du modèle en commençant tout d'abord par l'économie, viennent ensuite les hypothèses et enfin il est défini l'équilibre Cournot-Walras proprement dit.

### 2.2.1 L'économie

Considérons une économie d'échanges purs qui comprend  $L$  biens. Un bien différencié par  $(L - 1)$  oligopoleurs et un bien concurrentiel détenu par  $m$  agents concurrentiels. L'espace des biens est  $\mathbb{R}_+^L$ <sup>3</sup>. Chaque agent économique est représenté par ses dotations initiales  $\omega_i$ , sa fonction d'utilité  $U_i(\cdot)$  qui représente ses préférences pour un panier type  $x_i$  appartenant à  $X_i$  l'ensemble de consommation. Trois hypothèses liées aux caractéristiques du modèle sont formulées par la suite .

### 2.2.2 Hypothèses

Les hypothèses sont formulées eu égard à la fonction d'utilité des agents, aux dotations initiales et à l'ensemble des stratégies des oligopoleurs.

#### Hypothèse 1 : Les fonctions d'utilité des agents économiques

La fonction d'utilité des oligopoleurs de l'économie comprend deux biens tandis que celui des agents concurrentiels contient l'ensemble des biens de l'économie, soit  $L$  biens. Ainsi, pour les :

- (a) Oligopoleurs : la fonction d'utilité  $U_k$  telle que  $X_k \subseteq \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_k \mapsto U_k(x_k)$  est continue, monotone et strictement quasi-concave sur  $\mathbb{R}_{++}^2$  ;
- (b) Agents concurrentiels : la fonction d'utilité  $U_i$  telle que  $X_i \subseteq \mathbb{R}_+^L \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_i \mapsto U_i(x_i)$  est continue, monotone et strictement quasi-concave sur  $\mathbb{R}_{++}^L$ .

---

3. Pour les indexations des agents, se référer au *glossaire des indices et lettres utilisées* en page (ii)



L'hypothèse **H1a** traduit la consommation par l'oligopoleur de deux biens : son bien différencié ainsi que le bien concurrentiel. En réalité, l'oligopoleur consomme l'ensemble des biens de l'économie. Dans une approximation voulue, l'on s'intéresse à un prototype particulier d'économie d'échange où l'oligopoleur consomme son propre bien et le bien concurrentiel. Dans cette situation le bien de son rival est perçu comme un bien substituable. En l'absence de cette supposition, le modèle de Julien et Tricou (2005) est retrouvée. Néanmoins, l'autoconsommation par l'oligopoleur de son bien est discuté par Safra (1985) qui prouve qu'il est nécessaire de faire une telle hypothèse afin d'obtenir un équilibre de Nash non trivial<sup>4</sup>. Ainsi, lorsqu'un oligopoleur possède un bien, il ne devrait pas formuler une demande nette en l'argument pour ce dernier car il ne peut se comporter à la fois stratégiquement et concurrentiellement sur le marché de son bien. Il s'agit d'un comportement « schizophrène de l'agent » qui conduit à une situation contradictoire. L'agent économique ne peut donc pas maximiser l'utilité pour le bien pour lequel son comportement est stratégique. L'autoconsommation de son bien pour l'oligopoleur peut être perçu comme un stock volontaire d'inventus dans un objectif précis, celui de manipuler le prix du bien. Nous rajoutons à cette hypothèse d'autoconsommation celle de *libre disposition*<sup>5</sup> qui justifie de l'absence de coût consécutive au stockage de son bien par l'oligopoleur. Cette hypothèse est liée à la monotonie (croissance) des utilités des agents. Lorsque l'oligopoleur dispose d'un stock de bien qu'il ne désire pas, le fait de le jeter semble naturel. Il ne subit pas de coût dû à ce sabotage et cela n'altère pas son utilité. Dans la suite de l'exposé du modèle, l'oligopoleur détient une quantité de son bien qu'il ne vend pas au marché, comme cela se fait dans la littérature. L'hypothèse **H1b** souligne que les agents concurrentiels quant à eux consomment tous les biens disponibles dans l'économie. Les propriétés des fonctions d'utilité des agents assurent l'existence d'une solution unique au programme de maximisation des agents pour lesquels il vérifie ces propriétés.

---

4. Cette manière de procéder est plus réaliste et contredit l'approche proposée par Lahmandi-Ayed (2001)

5. L'ensemble des dotations  $Y$  satisfait à la libre disposition si  $y \in Y$  implique que  $y' \in Y$  pour tout  $y' \leq y$ .

**Hypothèse 2 : Répartition des dotations initiales**

Les dotations initiales des agents économiques de notre modèle se présentent de la manière suivante :

(a) Les oligopoleurs :  $\forall k = 1, \dots, L - 1$

$$\omega_k^j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Les agents concurrentiels :  $\forall i = 1, \dots, m, \quad \omega_i^L = \frac{1}{m}$

L'hypothèse **H2a** alloue à chaque oligopoleur une quantité et une seule de son bien différencié dont il offre une partie au marché, tandis que pour l'hypothèse **H2b**, les agents concurrentiels possèdent une même dotation en bien concurrentiel. La quantité totale du bien concurrentiel dans notre modèle est normalisée à l'unité. Ainsi, chaque agent concurrentiel possède la quantité  $\frac{1}{m}$  du bien  $L$ .

**Hypothèse 3 : L'ensemble des stratégies de l'oligopoleur  $k$** 

(a)  $E_k = \{e_k : 0 \leq e_k \leq 1, \forall k = 1, \dots, (L - 1)\}$

(b)  $E_{\alpha k} = \{e_{\alpha k} : 0 \leq e_{\alpha k} \leq 1, \forall k = 1, \dots, (L - 1) \text{ et } \alpha = 1, \dots, n\}$

Dans le modèle proposé, chaque oligopoleur se comporte de manière stratégique dans le secteur où il est offreur, mais concurrentiellement sur le marché du bien  $L$  où il est demandeur. **H3a** représente l'espace des stratégies de l'oligopoleur  $k$  et est un espace à une dimension, avec  $e_k$  la stratégie de l'oligopoleur  $k$  sur le marché du bien différencié  $k$ . Cela signifie que chaque agent exprime seulement une stratégie, c'est-à-dire la quantité de bien  $k$  qu'il décide d'offrir. L'hypothèse **H3b**<sup>6</sup> représente également l'espace de stratégies de l'oligopoleur  $\alpha k$ , mais dans un cas de réplcation des oligopoleurs pour un bien différencié. Alors  $e_{\alpha k}$  est la stratégie de l'oligopoleur  $\alpha k$  sur le marché du bien différencié  $k$  avec  $\alpha = 1, \dots, n$ . Alors une stratégie pure de l'oligopoleur  $\alpha k$  est un scalaire  $e_{\alpha k} \in [0, 1]$ .

---

6. La suite de notre modélisation considère ce cas. Le cas avec un seul agent oligopoleur différenciant un bien s'obtient en remplaçant les indices  $\alpha k$  par  $k$ .

Un équilibre Cournot-Walras symétrique sur produits différenciés peut donc être modélisé en deux étapes sous informations complètes :

- Une première étape concurrentielle où le vecteur de prix est déterminé compte tenu d'un profil de stratégies données ;
- Ensuite, dans une seconde étape, il est déterminé l'ensemble des stratégies d'équilibre.

### 2.2.3 L'équilibre

Tout au long de cette sous section, nous allons définir notre équilibre Cournot-Walras symétrique sur produits différenciés (ECWS-PD par la suite). En prélude à la définition de l'équilibre, il est présenté la modélisation de la différenciation dans le modèle d'équilibre général.

#### Les coefficients de différenciation

Afin de traiter la différenciation des produits, le modèle proposé s'appuie sur deux principales caractéristiques :

- (a) Les agents concurrentiels expriment leur préférence pour la diversité ;
- (b) L'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié considèrent les deux niveaux de différenciation : horizontal et vertical

De (b), il est analysé les deux niveaux de différenciation avec des fondements objectifs puis subjectifs. Le premier correspond à la différenciation verticale où un ou plusieurs attributs du produit sont modifiés dans le but de le rendre différent de ses concurrents. La notion de qualité du produit peut être privilégiée. Pour le second, la différence porte sur des caractéristiques de base du produit telle que l'emballage, l'image, . . . D'après (a), pour être le plus large que possible, il est considéré que le consommateur est sensible à des caractéristiques relatives à chaque variété de biens différenciés. Pour chaque variété, il consacre des parts inégales de son revenu compte tenu de sa préférence pour le bien. D'où la notion de « *coefficients de différenciation* ». Ainsi chaque agent concurrentiel possèdera un vecteur fini de coefficients  $\alpha_{ih}$  qui représentent la part que le consommateur consacre au

bien différencié  $h$ . Les  $\alpha_{ih}$  sont alors les coefficients de différenciation. Lorsque  $\alpha_{ih} \rightarrow 1$ , nous tendons vers un cas de bien homogène et le consommateur consacre son revenu à ne consommer que ce bien  $h$ .

### L'équilibre Cournot-Walras

Considérons  $p = (p_1, p_2, \dots, p_L)$ , avec  $p_L = 1$ , le vecteur de prix. Chaque prix est exprimé en terme relatif par rapport au bien concurrentiel  $L$ . La quantité stockée par l'agent stratégique est  $\omega_{\alpha k} - e_{\alpha k}$ . Les agents concurrentiels offrent donc toute leur dotation initiale  $\frac{1}{m}$  au marché  $L$ . Les agents stratégiques prennent donc le prix du bien  $L$  comme donné. Les hypothèses 1 et 2 associées au prix  $p$  garantissent l'existence d'un équilibre walrasien du modèle. Considérant le vecteur de prix  $p$  et une stratégie  $e_{\alpha k} \in E_{\alpha k}$ , chaque oligopoleur  $\alpha k$  résout le programme :

$$\text{Max. } U_k(\omega_{\alpha k} - e_{\alpha k}, x_{\alpha k}^L) \quad \text{s.c. } x_{\alpha k}^L \leq p_k e_{\alpha k} \quad (2.1)$$

Comme l'utilité de l'oligopoleur ne comprend que deux biens, son programme se réécrit uniquement que par sa contrainte  $x_{\alpha k}^L \leq p_k e_{\alpha k}$ . L'oligopoleur ne consomme qu'en bien  $L$  la valeur de ce qu'il offre divisée par le prix du bien  $L$ .

Chaque agent concurrentiel résoud :

$$\text{Max. } U_i(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^L) \quad \text{s.c. } \sum_{h=1}^{L-1} p_h x_i^h + x_i^L \leq \frac{1}{m} \quad (2.2)$$

Si  $p \gg 0$  alors  $x_k = x_k(p, e_{\alpha k})$  la solution de (2.1) existe et est unique. Nous obtenons  $(L-1)$  quantités des  $(L-1)$  biens différenciés demandés par l'agent concurrentiel  $i$ . Ces fonctions de demandes dépendent de  $(L-1)$  prix  $p_k$  ( $k \neq L$ ) sur les stratégies  $e_{\alpha k}$ . Le prix partiellement manipulé sur le marché du bien  $k$  est  $p_k(\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha k})$ . Les fonctions de demandes se présentent comme suit :

$$x_{\alpha k} = x_{\alpha k}(p_k(\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha k}), 1), \quad \text{avec } \alpha = 1, \dots, n \text{ et } k = 1, \dots, (L-1)$$

Et

$$x_{ih} = x_{ih}(p_1\left(\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha 1}\right), \dots, p_k\left(\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha k}\right), \dots, p_{L-1}\left(\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha(L-1)}\right), 1), \quad i = 1, \dots, m$$

Sous ces conditions le prix d'équilibre  $p(e)$  est :

$$p(e) = \left(p_1\left(\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha 1}\right), p_2\left(\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha 2}\right), \dots, p_{L-1}\left(\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha(L-1)}\right), 1\right)$$

qui est la solution du système :

$$(S1) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Equilibre sur le marché différencié 1 : } \sum_{i=1}^m x_{i1}(p_1, p_2, \dots, p_{L-1}, 1) & = \sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha 1} \\ (\vdots) & (\vdots) \\ \text{Equilibre sur le marché différencié } (L-1) : \sum_{i=1}^m x_{i(L-1)}(p_1, p_2, \dots, p_{L-1}, 1) & = \sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha(L-1)} \\ \underbrace{\sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha 1}(p_1, 1) + \dots + \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha(L-1)}(p_{L-1}, 1) + \sum_{i=1}^m x_{iL}(p_1, p_2, \dots, p_{L-1}, 1)}_{\text{Equilibre pour le bien concurrentiel}} & = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} = 1 \end{array} \right.$$

Le système (S1) est utile dans la détermination du vecteur de prix d'équilibre de la première étape du modèle. Il est utilisé dans la modélisation un mécanisme de prix que l'on qualifie de mécanisme *à la Sahi et Yao (1989) tronqué*. Le terme *tronqué* est employé circonstanciellement pour qualifier la partie concurrentielle du marché de notre économie contrairement au cas originel de Sahi et Yao (1989) où le comportement des agents était essentiellement stratégique. En particulier, pour  $n = 1$ , nous avons  $\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha k} = e_k, \quad \forall \quad k = 1, \dots, (L-1)$  et  $\sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha k}(p_k, 1) = x_k(p_k, 1)$ . Il s'agit du cas d'un *unique oligopoleur* par bien différencié.

Les propriétés des fonctions d'utilité, la positivité de  $\omega_{\alpha k}$  et l'hypothèse sur l'ensemble des stratégies garantissent une solution au système d'équations ci-dessus. Il existe ainsi un système de prix qui apure le marché. Nous supposons l'unicité d'un tel vecteur de prix.

Afin de déterminer l'équilibre de Cournot-Walras de notre modèle, nous remplaçons les prix relatifs déterminés plus haut dans les fonctions d'utilité des oligopoleurs. Nous obtenons ainsi des fonctions d'utilité indirectes. Ces prix sont fonctions des stratégies des

agents oligopoleurs  $e_{\alpha k}$ . Les stratégies de chaque agent influencent le système de prix, le revenu et les fonctions de demande  $e_{-\alpha k}$  qui représentent la stratégie de tous les agents autre que celle de l'agent  $\alpha k$ . L'équilibre Cournot-Walras est donné par le vecteur de stratégies  $\tilde{e} = (\tilde{e}_{11}, \tilde{e}_{21}, \dots, \tilde{e}_{n,(L-1)}) \in \mathbb{R}_+^{n(L-1)}$  et obtenu grâce au système d'équations des conditions du premier ordre des fonctions d'utilité indirecte <sup>7</sup> :

$$(S2) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial V(p(e))}{\partial e_{11}} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(p(e))}{\partial e_{n1}} \\ \frac{\partial V(p(e))}{\partial e_{12}} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(p(e))}{\partial e_{n2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(p(e))}{\partial e_{1k}} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(p(e))}{\partial e_{nk}} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(p(e))}{\partial e_{1(L-1)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(p(e))}{\partial e_{n(L-1)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équilibre Cournot-Walras est tel que :  $V_k(\tilde{e}_{\alpha k}, \tilde{e}_{-\alpha k}) \geq V_k(e_{\alpha k}, \tilde{e}_{-\alpha k}) \quad \forall \quad e_{\alpha k} \in [0, 1]$

$\forall \alpha = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad k = 1, \dots, (L-1)$ .

Après l'échange, les agents concurrentiels  $i$  et les oligopoleurs  $k$  atteignent les allocations :

$$< x_{i1}(p(\tilde{e})), x_{i2}(p(\tilde{e})), \dots, x_{i(L-1)}(p(\tilde{e})), x_{iL}(p(\tilde{e})) >, \quad \forall, \quad i = 1, \dots, m$$

$$< x_{\alpha k}(p(\tilde{e})), x_{kL}(p(\tilde{e})) > \forall, \quad \alpha = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad k = 1, \dots, L-1$$

Avec

---

7. La fonction  $V$  représente la fonction d'utilité indirecte des oligopoleurs

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{ik}(p(\tilde{e})) + \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha k}(p(\tilde{e})) = n \\ \forall k = 1, \dots, L-1 \\ \sum_{i=1}^m x_{iL}(p(\tilde{e})) + \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha 1}(p(\tilde{e})) + \dots + \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha, (L-1)}(p(\tilde{e})) = 1 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Le système (2.3) représente l'équilibre sur chacun des marchés : le marché de chaque bien différencié  $k$  et le marché du bien concurrentiel  $L$ .

Définissons à présent l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié,

**Définition :**

Un équilibre Cournot-Walras symétrique avec produit différencié est donné par les  $n(L-1)$  stratégies  $(\tilde{e}_{11}, \tilde{e}_{21}, \dots, \tilde{e}_{\alpha k}, \dots, \tilde{e}_{n, (L-1)})$  avec  $\tilde{e}_{\alpha k} \in [0, 1], \forall \alpha = 1, \dots, n$  et  $k = 1, \dots, (L-1)$  et une allocation  $(\tilde{x}_{11}, \tilde{x}_{21}, \dots, \tilde{x}_{n, (L-1)}) \in \mathbb{R}_+^{n(L-1)}$  telles que :

- $\tilde{x}_k = x_k(\tilde{e}_{\alpha k}, \tilde{e}_{-\alpha k}), \forall \alpha = 1, \dots, n$
- $V_k[x_k(\tilde{e}_{\alpha k}, \tilde{e}_{-\alpha})] \geq V_k[x_k(e_{\alpha k}, \tilde{e}_{-\alpha})], \forall e_{\alpha k} \in E_{\alpha k}$

La question d'existence de l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié n'est pas traitée dans ce chapitre et fera l'objet de recherches futures. Le modèle développé utilise les propriétés de l'équilibre. Ce modèle s'inspire de Julien et Tricou (2005), Gabszewicz et Michel (1997).

## 2.3 Modèle avec un oligopoleur par bien différencié

L'application de l'équilibre Cournot-Walras symétrique avec produit différencié utilise deux types de fonctions d'utilité pour les oligopoleurs. Dans un premier temps, nous utilisons une fonction de type Cobb-Douglas (ce qui se fait généralement), mais par la suite c'est plutôt une fonction quasi-linéaire pour ses propriétés. Notons que la fonction d'utilité Cobb-Douglas est un cas particulier de la fonction d'utilité CES qui aurait pu être prise. Le choix d'une fonction d'utilité quasi-linéaire s'explique par ses excellentes proprié-

tés en économie publique<sup>8</sup>. Aussi l'hypothèse de préférences quasi-linéaires suppose que les demandes pour le bien qui provoque l'externalité sont indépendantes de la distribution du revenu (c'est-à-dire les consommateurs peuvent avoir des niveaux de richesse différents mais le niveau d'externalité est le même). Considérons comme dans le cas général une économie à  $L$  biens comme définit ci-dessus : un bien différencié par  $(L - 1)$  oligopoleurs et un bien concurrentiel. Il est introduit à présent le paramètre  $\gamma$  qui représente la préférence des oligopoleurs pour le bien concurrentiel. Il sert à évaluer dans le modèle, la préférence de l'agent oligopoleur pour le bien concurrentiel. Plus ce paramètre est élevé plus l'oligopoleur va désirer le bien concurrentiel et serait prêt à échanger son bien afin de l'acquérir. Il traduit donc sa préférence pour la diversité et s'inspire de Gabszewicz et Michel (1997).

Dans le modèle, les oligopoleurs consomment leur propre bien mais aussi le bien concurrentiel qui dépend du paramètre de préférence  $\gamma$ . Il est pris en compte dans ce chapitre les deux niveaux de différenciation que sont la différenciation avec des fondements objectifs puis subjectifs. Les agents concurrentiels expriment une préférence pour la variété des biens différenciés disponibles dans l'économie. Ils vont alors allouer un budget à consommer l'ensemble des biens de l'économie. La préférence pour chacun de ces biens différenciés, est perçue à travers des coefficients qu'on appellera ici des coefficients de différenciation  $\alpha_{ih}$ . Ces coefficients sont modélisés dans l'esprit de Singh et Vives (1984) et Dixit et Stiglitz (1977), dans le sens où nous avons une structure de demande inverse pour les produits traduisant deux aspects. Premièrement, le prix de chaque branche qui est sensible au changement de la quantité de la branche plutôt qu'à celui de la branche concurrente : *l'effet prix propre qui domine l'effet prix croisé*. Les quantités sont donc affectées par des coefficients partiels qui permettent de mesurer cette sensibilité. Enfin, ces coefficients expliquent aussi la préférence pour la diversité de l'agent.

Dans l'optique de présenter le premier résultat, précisons la définition d'un équilibre trivial au sens de Cordella et Gabszewicz (1998). Cordella et Gabszewicz (1998) définissent un point d'équilibre sans échange sur le marché comme un équilibre trivial. Il s'agit d'un équilibre de Nash (d'après Dubey et Shubik (1978c)).

---

8. L'avantage de ce type de fonction est qu'elle est facilement manipulable même si elle est peu réaliste. Sa principale propriété mise en évidence par Coase (1960) lui a valu le prix Nobel d'économie en 1991 et est très utile en économie publique. Les préférences quasi-linéaires produisent le même niveau d'externalité qu'on détienne ou pas des droits de propriété (théorème de Coase).



**Résultat 2.1 :**

*Il existe un équilibre trivial dans un simple modèle de produit différencié.*

Il n'y pas d'échange lorsque le modèle comprend un unique oligopoleur par type de bien différencié. Une possible explication serait que l'agent stratégique ne désire pas le bien concurrentiel puisqu'il est *price-maker* par définition et ne dispose d'aucune influence sur le prix du bien concurrentiel. Afin de vérifier la robustesse de notre résultat, en supposant que les agents concurrentiels fixent leur prix différent de l'unité et maintenant égale à une constante  $\beta > 1$ , cela ne modifie pas les allocations des oligopoleurs, mais les prix relatifs baissent et donc leurs comportements stratégiques sont influencés.

Afin de démontrer ce premier résultat, il est appliqué l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié à deux types d'économie. Une première qualifiée d'*économie Cobb-Douglas* où les agents économiques disposent tous de fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas. Une seconde économie *quasi-linéaire/Cobb-Douglas* qui introduit une hétérogénéité dans les préférences des agents avec des préférences quasi-linéaire pour les oligopoleurs et des fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas pour les agents concurrentiels.

**2.3.1 Cas de l'économie Cobb-Douglas**

Le problème à résoudre est le suivant :

***Pour les agents concurrentiels***

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, m, \quad \text{Max.} \quad U_k(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^L) &= x_i^L \prod_{h=1}^{L-1} (x_i^h)^{\alpha_{ih}} \\ \text{s.c.} \quad \sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih} &= 1 \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^{L-1} p_h x_i^h + x_i^L \leq \frac{1}{m} \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'agent concurrentiel  $i$  consomme son propre bien  $L$  et demande les  $(L - 1)$  biens différenciés. Il accorde alors à chacun de ces derniers un poids  $\alpha_{ih}$ . Nous choisissons pour des raisons de simplification de normaliser ces coefficients de différenciation à l'unité. Le prix du bien concurrentiel est également normalisé à l'unité. Cela implique que la somme des parts de biens différenciés demandés par l'agent concurrentiel  $i$  égal à l'unité. Tous les agents

concurrentiels disposent de la même quantité de dotations initiales en bien concurrentiel dont la somme est égale à l'unité. Leur revenu est égal à  $\frac{1}{m}$ .

### **Oligopoleurs**

Pour le cas Cobb-Douglas la fonction d'utilité s'écrit :

$$\text{Max. } U_k(e_k, x_k^L) = (1 - e_k)(x_k^L)^\gamma \quad (2.5)$$

L'oligopoleur ne consomme que son bien et demande le bien concurrentiel en fonction de la préférence qu'il a pour ce dernier et qui est mesurée par le paramètre  $\gamma$ . Il a des dotations initiales pour son bien qui sont égales à l'unité. Son revenu est donc égale à  $p_k$ . Sa demande de bien concurrentiel est bornée supérieurement par son revenu issu de la vente d'une partie de ses dotations. L'oligopoleur ne résoud que sa contrainte :  $x_k^L \leq p_k e_k$ ,  $\forall k = 1, \dots, L - 1$ .

Les solutions des programmes des agents concurrentiels et agents stratégiques se présentent comme suit :

Pour les **agents concurrentiels**, leur fonction d'utilité est de type Cobb-Douglas et donc du fait de ces propriétés, les demandes sont :

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih}}{\left[1 + \sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih}\right]} \frac{1}{m p_h}, \quad \forall h = 1, \dots, L - 1 \quad (2.6)$$

$$x_i^L = \frac{1}{\left[1 + \sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih}\right]} \frac{1}{m} \quad (2.7)$$

Considérant la normalisation des coefficients de différenciation à l'unité pour chaque agent concurrentiel,  $\sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih} = 1$ , les équations (6) et (7) donnent :

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih}}{2} \frac{1}{m p_h}, \quad \forall h = 1, \dots, L-1 \quad (2.8)$$

$$x_i^L = \frac{1}{2 m} \quad (2.9)$$

Pour les **oligopoleurs** le programme à résoudre est :

$$\forall k = 1, \dots, (L-1), \quad \text{Max.}_{\{e_k\}} V_k(e_k) = (1 - e_k)(p_k e_k)^\gamma \quad (P1)$$

où  $p_k e_k$  représente la quantité de bien concurrentiel qu'ils sont prêts à acquérir suite à la vente de la quantité  $e_k$  de leur bien au prix  $p_k$ .

A l'équilibre sur le marché du bien  $k$ , nous avons :

$$e_k = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{p_k}$$

$$\implies p_k = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{e_k} \quad (2.10)$$

Lorsqu'on remplace le prix du bien  $k$  dans  $V_k(e_k)$ , la fonction de l'utilité indirecte de l'oligopoleur donne :

$$\forall k = 1, \dots, L-1, \quad V_k(e_k) = (1 - e_k) \left( \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \right)^\gamma \quad (2.11)$$

$$= -e_k \left( \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \right)^\gamma + \left( \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \right)^\gamma \quad (2.12)$$

La fonction d'utilité indirecte  $V_k$  fournit l'équation d'une droite de pente  $-\left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m}\right)^\gamma$ . Elle atteint son maximum pour  $e_k = 0$ . Pour tout  $k = 1, \dots, L-1$ , d'où le résultat :

$$(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{L-1}) = (0, \dots, 0) \quad (2.13)$$

L'équilibre obtenu est donc trivial.

### 2.3.2 Cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas

Dans une logique similaire à l'analyse précédente,

#### *Pour les agents concurrentiels*

$$\begin{aligned}
 & \text{Max.} \quad U_i(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^L) = x_i^L \prod_{h=1}^{L-1} (x_i^h)^{\alpha_{ih}} \\
 & \text{s.c.} \quad \sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^{L-1} p_h x_i^h + x_i^L \leq \frac{1}{m} \quad \forall \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

#### *Oligopoleurs*

Pour les oligopoleurs, la fonction d'utilité s'écrit :

$$U_k(e_k, x_k^L) = (1 - e_k) + \gamma \text{Log } x_k^L \tag{2.15}$$

Les solutions des programmes des agents concurrentiels et stratégiques se présentent comme suit : comme le cas précédent, pour les **agents concurrentiels**, leur fonction d'utilité est de type Cobb-Douglas et les demandes formulées au marché sont donc :

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih}}{\left[1 + \sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih}\right]} \frac{1}{m p_h}, \quad \forall \quad h = 1, \dots, L-1 \tag{2.16}$$

$$x_i^L = \frac{1}{\left[1 + \sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih}\right]} \frac{1}{m} \tag{2.17}$$

Et comme  $\sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih} = 1$  alors :

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih}}{2} \frac{1}{m p_h}, \quad \forall \quad h = 1, \dots, L-1 \tag{2.18}$$

$$x_i^L = \frac{1}{2 m} \tag{2.19}$$

Pour les **oligopoleurs**, on résout :

$$\forall k = 1, \dots, (L-1), \quad \text{Max}_{\{e_k\}} V_k(e_k) = (1 - e_k) + \gamma \text{Log}(p_k e_k) \quad (P2)$$

où  $p_k e_k$  représente la quantité de bien concurrentiel qu'ils sont prêts à acquérir suite à la vente de la quantité  $e_k$  de leur bien au prix  $p_k$ . L'équilibre sur le marché du bien  $k$  étant le même que la sous-section **2.3.1**, le prix qui en découle est identique et la fonction d'utilité indirecte de l'oligopoleur devient :

$$\forall k = 1, \dots, L-1, \quad \text{Max}_{\{e_k\}} V_k(e_k) = (1 - e_k) + \gamma \text{Log}\left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m}\right) \quad (2.20)$$

$$= -e_k + \left[ \gamma \text{Log}\left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m}\right) + 1 \right] \quad (2.21)$$

Il s'agit également de l'équation d'une droite de pente (-1). Elle atteint son maximum pour  $e_k = 0$ . D'où l'équilibre trivial, pour tout  $k = 1, \dots, L-1$ ,

$$(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{L-1}) = (0, \dots, 0) \quad (2.22)$$

D'après les équations (2.13) et (2.22), il en découle le *résultat 1*. Ce résultat n'est qu'une extention de Dubey et Shubik (1978c) pour une variété de biens (Confère Théorème 1 : Dubey et Shubik (1978c); page 6). Les auteurs prouvent qu'il faut au moins deux demandeurs d'un bien donné et deux offreurs du même bien pour qu'un point d'équilibre non trivial existe.

**Rappel :** *Perturbation de jeu à la Dubey et Shubik (1978c)*

Considérons un jeu modifié appelé  $\Gamma^\epsilon$  où une agence extérieure place sur chacun des marchés une offre fixe  $\epsilon > 0$  et une demande fixe  $\epsilon > 0$ . Considérons une séquence  $\epsilon^n$  qui est telle que  $\epsilon^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors un équilibre de Nash  $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{L-1})$  du jeu original est « nice » si et seulement si il existe une séquence d'équilibres des jeux modifiés  $\Gamma^{\epsilon^n}$  notés  $(\tilde{e}_1^n, \dots, \tilde{e}_{L-1}^n)$  telle que quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $(\tilde{e}_1^n, \dots, \tilde{e}_{L-1}^n) \rightarrow (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{L-1})$ .

En modifiant faiblement notre jeu initial au sens de Dubey et Shubik (1978c), nous montrons aisément que l'équilibre trivial est « *nice* » car cet équilibre est unique et de petites perturbations du jeu initial ne l'altère pas. Cela confirme la **proposition 3** de Dickson et Hartley (2013) s'appuyant sur les travaux de Cordella et Gabszewicz (1998).

Considérons la variation des fonctions d'utilités indirectes par rapport aux stratégies des oligopoleurs, dans les deux cas<sup>9</sup>, nous avons une variation négative :

$\frac{\partial V_k^{Quasi}}{\partial e_k} = -1 < 0$  et  $\frac{\partial V_k^{Cobb}}{\partial e_k} = -\left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m}\right)^\gamma < 0$ . Lorsque la stratégie de l'oligopoleur augmente d'une unité, son utilité baisse d'une unité dans le cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas mais cette baisse est plutôt de  $\left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m}\right)^\gamma$  unité dans le cas de l'économie Cobb-Douglas. Cela peut se traduire comme un manque à gagner de l'oligopoleur dans un but de manipuler le prix de son bien à travers sa stratégie. Cela montre une absence de gains si l'échange a lieu. L'équilibre autarcique peut donc être « *very nice* » au sens de Busetto et Codognato (2006).

## 2.4 Modèle avec $n$ oligopoleurs pour chaque type de bien différencié

Cette section présente les résultats issus de la réplcation de chaque type d'oligopoleur par bien différencié. Cette réplcation est dans l'esprit de Julien et Tricou (2005). Les prix sont donc modifiés, de même que la fonction d'utilité indirecte des oligopoleurs.

### 2.4.1 Cas d'une fonction de type Cobb-Douglas pour les oligopoleurs

A l'équilibre sur le marché  $k$ ,  $\forall k = 1, \dots, L-1$  et  $\alpha = 1, \dots, n$ , l'équation (2.10) devient :

$$\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha k} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{p_k} \quad (2.23)$$

---

9. Cas quasi-linéaire et Cobb-Douglas

$$\Rightarrow p_k = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{\left[ \sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha k} \right]} \quad (2.24)$$

La fonction d'utilité indirecte s'écrit : pour  $\alpha = 1, \dots, n$  et  $k = 1, \dots, L-1$ ,

$$\text{Max.}_{\{e_{\alpha k}\}} V(e_{\alpha k}, e_{-\alpha k}) = (1 - e_{\alpha k}) \left( \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right]}{2m} \frac{e_{\alpha k}}{\left[ \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k} \right]} \right)^\gamma \quad (2.25)$$

Les CPO par rapport à  $e_{\alpha k}$  donnent  $\frac{\partial V}{\partial e_{\alpha k}} = 0$  et conduisent à :

$$\left( \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right]}{2m} \right)^\gamma \left[ - \left( \frac{e_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k}} \right)^\gamma + \gamma(1 - e_{\alpha k}) \left( \frac{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k} - e_{\alpha k}}{\left( \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k} \right)^2} \right) \left( \frac{e_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k}} \right)^{\gamma-1} \right] = 0 \quad (2.26)$$

$$- \left( \frac{e_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k}} \right) + \gamma(1 - e_{\alpha k}) \left( \frac{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k} - e_{\alpha k}}{\left( \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k} \right)^2} \right) = 0 \quad (2.27)$$

$$-e_{\alpha k} \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k} + \gamma(1 - e_{\alpha k}) \left( \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k} - e_{\alpha k} \right) = 0 \quad (2.28)$$

$$-S_k e_{\alpha k} + \gamma(1 - e_{\alpha k}) \left( \sum_{\alpha' \neq \alpha} e_{\alpha' k} \right) = 0 \quad (2.29)$$

Cela implique pour  $k = 1, \dots, L-1$  et  $\alpha = 1, \dots, n$ ,

$$\tilde{e}_{\alpha k} = \frac{\gamma \sum_{\alpha' \neq \alpha} e_{\alpha' k}}{S_k + \gamma \sum_{\alpha' \neq \alpha} e_{\alpha' k}} \quad (2.30)$$

Avec  $S_k = \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k}$ .

La stratégie de l'oligopoleur sur son bien dépend du paramètre  $\gamma$ , des  $n$  stratégies des agents répliqués. Ainsi,  $e_{\alpha k} > 0$ . Il participe donc au marché à la différence du cas

précédent. La réplication du nombre d'oligopoleurs a permis l'élimination de l'équilibre trivial.

### Allocations à l'Equilibre Général Symétrique (EGS) (Cobb-Douglas)

Considérant le résultat précédent, analysons ce qui se passe à l'EGS. L'EGS traduit le comportement identique des agents du même côté du marché. Nous avons à l'EGS,  $e_{\alpha k} = e_{-\alpha k}$ .

En reprenant l'équation (2.28),

$$-e_{\alpha k} \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k} + \gamma(1 - e_{\alpha k}) \left( \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k} - e_{\alpha k} \right) = 0 \quad (2.31)$$

$$-(n e_{\alpha k})e_{\alpha k} + \gamma(1 - e_{\alpha k}((n-1)e_{\alpha k})) = 0 \quad (2.32)$$

Par suite :

$$\tilde{e}_{\alpha k} = \frac{\gamma(n-1)}{n + \gamma(n-1)}, \quad \forall \quad k = 1, \dots, L-1 \text{ et } \alpha = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

Les allocations des agents économiques se présentent donc comme suit :

Pour les **oligopoleurs** :  $\forall \quad k = 1, \dots, L-1$

$$x_k^k = 1 - \frac{(n-1) \gamma}{n + \gamma(n-1)} \quad (2.34)$$

$$x_k^L = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2 m} \frac{1}{n} \quad (2.35)$$

Pour les **agents concurrentiels** :  $\forall \quad i = 1, \dots, m$

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih}}{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ih} \right]} \frac{n}{\left[ 1 + \frac{n}{\gamma(n-1)} \right]} \quad \forall \quad h = 1, \dots, L-1 \quad (2.36)$$

$$x_i^L = \frac{1}{2 m} \quad (2.37)$$



Les allocations des agents de notre modèle dépendent du nombre d'oligopoleurs répliqués, des coefficients de différenciation des agents concurrentiels et du paramètre  $\gamma$  de préférence pour le bien concurrentiel.

### 2.4.2 Cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas

Dans un même esprit que le cas de l'économie Cobb-Douglas, le prix du bien différencié  $k$  est :

$$p_k = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{\left[ \sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha k} \right]} \quad (2.38)$$

La fonction d'utilité indirecte s'écrit : pour  $\alpha = 1, \dots, n$  et  $k = 1, \dots, L-1$ ,

$$\text{Max.}_{\{e_k\}} V(e_{\alpha k}, e_{-\alpha k}) = (1 - e_{\alpha k}) + \gamma \text{Log} \left( \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right]}{2m} \frac{e_{\alpha k}}{\left[ \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha' k} \right]} \right) \quad (2.39)$$

$$= (1 - e_{\alpha k}) + \gamma \text{Log} \left[ \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right]}{2m} \frac{e_{\alpha k}}{\left[ e_{\alpha k} + \sum_{\alpha' \neq \alpha}^n e_{\alpha' k} \right]} \right] \quad (2.40)$$

En dérivant par rapport à  $e_{\alpha k}$ , la stratégie optimale est :

$$\frac{\partial V(e_{\alpha k}, -e_{\alpha k})}{\partial e_{\alpha k}} = -1 + \gamma \left[ \frac{1}{e_{\alpha k}} - \frac{1}{e_{\alpha k} + \sum_{\alpha' \neq \alpha}^n e_{\alpha' k}} \right] = 0 \quad (2.41)$$

Cela implique que :

$$\tilde{e}_{\alpha k} = \frac{\gamma \sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha k}}{\gamma + \sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha k}}, \quad \forall \quad k = 1, \dots, L-1 \text{ et } \alpha = 1, \dots, n \quad (2.42)$$

Nous remarquons que  $0 < \tilde{e}_{\alpha k} < 1$ . La différence avec l'équation (2.30) réside dans le fait que le coefficient de préférence du bien concurrentiel s'applique à l'ensemble des stratégies des oligopoleurs différenciant le même bien que lui.

### Allocations à l'Equilibre Général Symétrique (EGS)

Tout comme le cas précédent, à l'EGS et en reprenant l'équation (2.41), la stratégie d'équilibre est :

$$-1 + \gamma \left[ \frac{1}{e_{\alpha k}} - \frac{1}{e_{\alpha k} + \sum_{\alpha' \neq \alpha}^n e_{\alpha' k}} \right] = 0 \quad (2.43)$$

$$-1 + \gamma \left[ \frac{1}{e_{\alpha k}} - \frac{1}{e_{\alpha k} + (n-1)e_{\alpha k}} \right] = 0 \quad (2.44)$$

$$\left[ \frac{1}{e_{\alpha k}} - \frac{1}{ne_{\alpha k}} \right] = \frac{1}{\gamma} \quad (2.45)$$

Par suite :

$$\tilde{e}_{\alpha k} = \frac{(n-1)}{n} \gamma = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \gamma \quad \forall \quad k = 1, \dots, L-1 \text{ et } \alpha = 1, \dots, n \quad (2.46)$$

La stratégie optimale est  $\tilde{e}_{\alpha k} > 0$ . Le terme  $\frac{1}{n}$  dans  $\tilde{e}_{\alpha k}$  s'interprète de manière standard dans la littérature comme étant le taux de marge dû à la stratégie de l'oligopoleur. Si  $\gamma = 1$ , la stratégie de l'oligopoleur  $k$  serait d'offrir une partie de sa dotation initiale. Lorsque le nombre d'agents offrant le même bien différencié devient élevé, l'oligopoleur fournit au marché pour l'échange une plus grande partie sa dotation initiale. Ceci à un prix plus faible. Les allocations des agents de notre économie se présentent donc comme suit :

Pour les **oligopoleurs** :  $\forall \quad k = 1, \dots, L-1$

$$x_k^k = 1 - \frac{n-1}{n} \gamma > 0 \quad (2.47)$$

$$x_k^L = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{n} \quad (2.48)$$

Pour les **agents concurrentiels** :  $\forall i = 1, \dots, m$

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih}}{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ih} \right]} (n-1)\gamma, \quad \forall h = 1, \dots, L-1 \quad (2.49)$$

$$x_i^L = \frac{1}{2m} \quad (2.50)$$

La demande pour le bien concurrentiel  $x_k^k$  est strictement positif. Les allocations, tout comme dans le cas Cobb-Douglas dépendent des mêmes paramètres.

**Résultat 2.2 :**<sup>10</sup>

Les deux types d'équilibre associées aux deux types d'économie sont liés par la relation

$$\tilde{e}_{\alpha k}^{Cobb} = \frac{\tilde{e}_{\alpha k}^{Quasi}}{1 + \tilde{e}_{\alpha k}^{Quasi}}.$$

Les équations (2.33) et (2.46) conduisent à trouver une relation utilisant l'équilibre issu de la fonction d'utilité de l'économie Cobb-Douglas et celle quasi-linéaire/Cobb-Douglas. Le *résultat 2* confirme bien que  $\tilde{e}_{\alpha k}^{Cobb} > 0$  car  $\tilde{e}_{\alpha k}^{Quasi} > 0$ .

**Preuve :**

En prenant l'équation (46) et en divisant chaque membre de la fraction par  $n$ ,

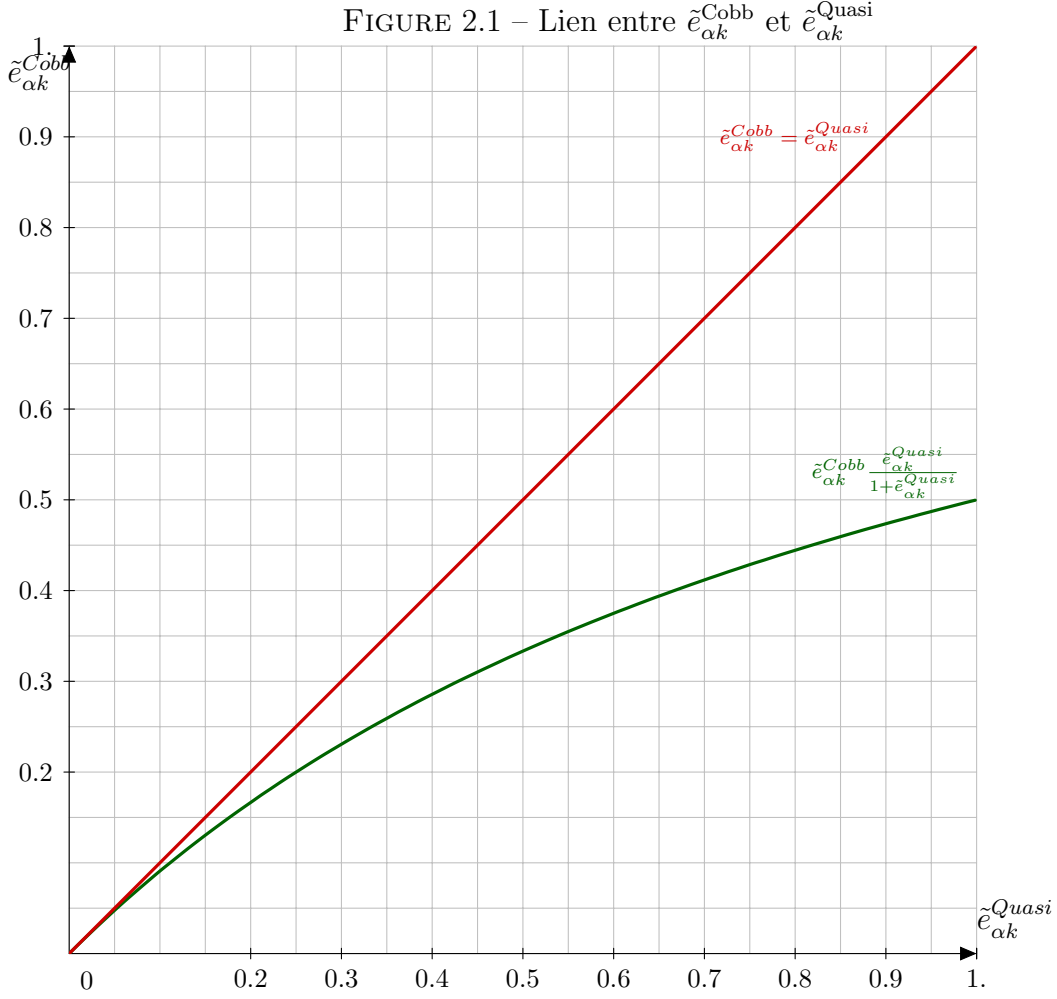
$$\tilde{e}_{\alpha k}^{Cobb} = \frac{\frac{\gamma(n-1)}{n}}{\frac{n + \gamma(n-1)}{n}} \quad (2.51)$$

$$\text{Or } \tilde{e}_{\alpha k}^{Quasi} = \frac{\gamma(n-1)}{n}. \text{ Par conséquent, } \tilde{e}_{\alpha k}^{Cobb} = \frac{\tilde{e}_{\alpha k}^{Quasi}}{1 + \tilde{e}_{\alpha k}^{Quasi}}$$

La relation ci-dessus lie deux mondes économiquement différents. L'économie Cobb-Douglas l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas. De la relation entre les deux équilibres, il ressort du graphique ci-dessous.

---

10. Les appellations Cobb et Quasi désignent respectivement les équilibres avec des fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas et quasi-linéaires pour les oligopoleurs.



Source : L'auteur

Ainsi, quand l'oligopoleur offre tout son bien dans le cadre de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas, il en garde la moitié en économie Cobb-Douglas. Lorsque le nombre d'oligopoleurs  $n$  différenciant un bien devient grand, alors  $\tilde{e}_{\alpha k}^{Quasi} \rightarrow \gamma$  et  $\tilde{e}_{\alpha k}^{Cobb} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma + 1}$ .

La quantité  $\frac{\gamma}{\gamma + 1}$  traduit pour notre économie Cobb-Douglas, la part de dépenses consacrée par l'oligopoleur afin d'acquérir le bien concurrentiel dans un cadre de concurrence pure et parfaite (CPP). Cela s'explique par les propriétés asymptotiques des courbes d'indifférences. Lorsque  $\gamma = 1$ , nous retrouvons  $\tilde{e}_{\alpha k}^{Quasi} = 1$  et  $\tilde{e}_{\alpha k}^{Cobb} = \frac{1}{2}$ .  $\gamma = 1$  traduit l'absence d'interactions entre les individus et donc une analyse en concurrence pure et parfaite (CPP). Quand le nombre d'oligopoleurs devient grand, il y a une dilution du pouvoir de marché des agents et nous retombons en CPP. Le seuil maximal de  $\frac{1}{2}$  en économie Cobb-

Douglas peut s'expliquer par les courbes d'indifférence des préférences quasi-linéaire. Elles représentent le niveau à partir duquel l'oligopoleur arrête de demander le bien concurrentiel et donc la quantité maximale de bien différencié qu'il va vendre afin d'acquérir le bien concurrentiel.

## 2.5 Etude des propriétés de l'équilibre

Cette section analyse les implications des résultats issus de l'application de l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié que nous comparerons également au cadre de la concurrence pure et parfaite. La comparaison se fait premièrement du point de vue des prix, deuxièmement des allocations et enfin du bien-être des agents économiques. les résultats de l'analyse en CPP sont mis en annexes.

### 2.5.1 Analyse des prix

#### Cas de la fonction de type Cobb-Douglas pour les oligopoleurs

Notons  $p_{ks}$  et  $p_{kc}$  les prix obtenus respectivement dans les cas stratégiques et concurrentiels, alors :

$$p_{ks} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1 + \gamma(1 - \frac{1}{n})}{(n-1)\gamma} \quad (2.52)$$

$$p_{kc} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{\gamma + 1}{\gamma} \quad (2.53)$$

#### **Résultat 2.3 :**

Le prix  $p_{ks}$  converge vers le prix concurrentiel  $p_{kc}$  pour  $\gamma = (2-n)\frac{n}{(n-1)^2}$ .

*Preuve :*

$$p_{ks} \xrightarrow{\text{Converge}} p_{kc} \text{ si et seulement si } \frac{1 + \gamma(1 - \frac{1}{n})}{(n-1)\gamma} = \frac{\gamma + 1}{\gamma} \text{ C.Q.F.D.}$$

En observant la fonction  $\gamma(n) = (2 - n) \frac{n}{(n-1)^2}$ <sup>11</sup>, quand  $n = 0$ ,  $\gamma(n) = 0$ ; elle n'est pas définie en 1;  $\gamma(n) = 1$  pour  $n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $n = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; quand  $n = 2$ ,  $\gamma(n) = 0$ ; pour les valeurs entières de  $n$  supérieures à 2, nous avons  $\gamma(n) < 0$ . Le paramètre de préférence révèle que les agents stratégiques ont une forte préférence et intérêt à échanger quand  $0 < n < 2$ . Il ressort que pour un maximum de deux agents par bien différencié, pour des préférences de type Cobb-Douglas émanant des oligopoleurs, ces derniers désirent le bien concurrentiel ( $\gamma > 0$ ). Ils sont ainsi disposés à échanger leur bien sur le marché afin de l'acquérir.

### Cas de la fonction de type quasi-linéaire pour les oligopoleurs

$$p_{ks} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{(n-1)\gamma} \quad (2.54)$$

$$p_{kc} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{\gamma} \quad (2.55)$$

#### **Résultat 2.4 :**

*Lorsque le nombre d'oligopoleurs pour un bien différencié donné tend vers l'infini, le prix qui prévaut sur ce marché est le prix concurrentiel.*

*Preuve :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{ks}}{p_{kc}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = 0 \implies p_{ks} = 0$$

Du *résultat 2.4*, nous obtenons  $p_{ks} = 0$ . Lorsque le nombre d'oligopoleurs répliqués devient assez grand, il y a une dilution du pouvoir de marché et les agents agissent tous de manière concurrentielle. Ils sont donc *price-takers* et le prix du marché est donc  $p_{kc}$ . Nous pouvons noter que le prix en concurrence oligopolistique coïncide avec le cas concurrentiel quand  $n = 2$ .

---

11. Ici l'on observe les valeurs entières de  $n$

### 2.5.2 Allocations CW vs Allocations Walras

Nous confrontons dans cette section les allocations de l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié avec les allocations dans un cadre où les agents agissent tous de manière concurrentielle. Tout d'abord il est présenté des résultats généraux c'est-à-dire ceux qui restent les mêmes quelque soit l'économie considérée. Par la suite, certains résultats spécifiques font l'objet de commentaires.

#### Comparaison des allocations des oligopoleurs

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont issus de l'analyse des économies Cobb-Douglas et quasi-linéaire/Cobb-Douglas.

#### **Résultat 2.5 :**

*Lorsque l'économie est répliquée<sup>12</sup>, l'allocation en bien différencié converge vers l'allocation d'équilibre concurrentiel pour les oligopoleurs.*

*Preuve :*

#### Cas de la fonction de l'économie Cobb-Douglas

$$\left. \begin{aligned} (x_k^k)^s &= 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\gamma(1 - \frac{1}{n})}\right)} \\ (x_k^k)^c &= \frac{1}{1 + \gamma} \text{ (Confère annexes)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x_k^k)^s \xrightarrow{\text{Converge}} (x_k^k)^c \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (2.56)$$

#### Cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas

$$\left. \begin{aligned} (x_k^k)^s &= 1 - (1 - \frac{1}{n})\gamma \\ (x_k^k)^c &= 1 - \gamma \text{ (Confère annexes)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x_k^k)^s \xrightarrow{\text{Converge}} (x_k^k)^c \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (2.57)$$

---

12. On parle de réplication car on clone  $k$  fois chaque agent de notre économie en tendant  $k$  vers l'infini.

Cqfd.

Quand le nombre d'agents répliqués  $n$  devient très grand, le pouvoir de marché des agents oligopolistiques baisse et donc ces agents deviennent *price-takers*. Ce qui justifie la convergence vers l'équilibre concurrentiel.

**Résultat 2.6 :**

*Les allocations des oligopoleurs pour le bien concurrentiel convergent par réplication vers les allocations concurrentielles.*

*Preuve :*

Lorsque les oligopoleurs ont des préférences de type Cobb-Douglas ou quasi-linéaire, les allocations des oligopoleurs pour le bien concurrentiel sont similaires et,

$$\left. \begin{aligned} (x_k^L)^s &= \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2} \frac{1}{m} \frac{1}{n} \\ (x_k^L)^c &= \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2} \frac{1}{m} \quad (\text{Confère annexes}) \end{aligned} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_k^L)^s}{(x_k^L)^c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \implies (x_k^L)^s = 0 \quad (2.58)$$

Lorsque le nombre d'agents répliqués pour le bien différencié  $k$  devient très grand, d'après le *résultat 3*, il ressort que le prix qui prévaut sur le marché dû à la dilution du pouvoir de marché est le prix concurrentiel. Il est donc normal que  $(x_k^L)^s = 0$ . Ainsi, les oligopoleurs demandent  $(x_k^L)^c = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2} \frac{1}{m}$ .

### Comparaison des allocations des agents concurrentiels

Les résultats présentées dans cette sous-section restent spécifiques aux fonctions d'utilité des oligopoleurs dans l'analyse qui est faite par rapport aux allocations des agents concurrentiels.

#### Cas de l'économie Cobb Douglas

Considérons dans un premier cas les préférences des oligopoleurs qui sont de type Cobb-Douglas.



**Résultat 2.7 :**

La demande des agents concurrentiels pour le bien différencié  $h$  converge vers l'équilibre concurrentiel pour  $\gamma = (2 - n) \frac{n}{(n - 1)^2}$ .

Preuve :

$$\left. \begin{aligned} (x_i^h)^s &= \frac{\alpha_{ih}}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ih}} \frac{\gamma(n-1)}{1+\gamma(1-\frac{1}{n})} \\ (x_i^h)^c &= \frac{\alpha_{ih}}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ih}} \frac{\gamma}{\gamma+1} \text{ (Confère annexes)} \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

$$\implies (x_i^h)^s \xrightarrow{\text{Converge}} (x_i^h)^c \text{ quand } \frac{\gamma}{\gamma+1} = \frac{\gamma(n-1)}{1+\gamma(1-\frac{1}{n})} \implies \gamma = (2-n) \frac{n}{(n-1)^2} \quad (2.60)$$

Cqfd.

Les conclusions restent similaires avec l'analyse de la fonction  $\gamma(n)$  pour le *résultat 3*. Lorsque les oligopoleurs désirent le bien concurrentiel et sont prêts à l'échange, les conclusions pour les deux types de fonctions de demande pourraient coïncider sur  $0 < n < 2$ .

### Cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas

**Résultat 2.8 :**

Lorsque les oligopoleurs ont une fonction d'utilité de type quasi-linéaire, l'équilibre trivial est robuste à une réplique de l'économie.

Preuve :

$$\left. \begin{aligned} (x_i^h)^s &= \frac{\alpha_{ih}}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ih}} (n-1)\gamma \\ (x_i^h)^c &= \frac{\alpha_{ih}}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ih}} \gamma \text{ (Cf. annexes)} \end{aligned} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_i^h)^s}{(x_i^h)^c} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) = +\infty \implies (x_i^h)^c = 0 \quad (2.61)$$

La demande de l'agent concurrentiel pour le bien différencié  $h$  est très sensible au nombre  $n$  des oligopoleurs répliqués pour ce bien. Lorsque  $n = 2$ , nous avons une convergence entre les deux équilibres (stratégique et concurrentiel). Lorsque  $n > 2$ , alors nous avons  $(x_i^h)^s > (x_i^h)^c$ . Pour des valeurs très grandes de  $n$ , l'agent concurrentiel  $i$  pourrait être

amené à ne pas demander du bien différencié  $h$  et ne pas échanger sur le marché car il risque de subir une désutilité. Il ne participerait donc pas à l'échange. En conséquence, il pourrait développer un comportement stratégique en guettant les opportunités afin de participer à l'échange. Ces opportunités seraient par exemple la sortie de certains acteurs du marché ou la spécialisation sur d'autres niches et donc une nouvelle différenciation.

### 2.5.3 Le Bien-être des agents économiques

Il s'agit de comparer les fonctions d'utilités des différents cas de comportements stratégiques et concurrentiels.

#### Économie Cobb-Douglas

##### **Résultat 2.9 :**

*Lorsque l'équilibre Cournot-Walras symétrique est répliqué dans un cas de bien différencié, il est Pareto dominé par l'équilibre walrasien à la limite.*

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , les agents préfèrent ne pas échanger. Quand  $n$  devient assez grand, les oligopoleurs perdent leur pouvoir de marché.

*Preuve :*

$$U_k^s = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma(1-\frac{1}{n})}}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{n}\right)^\gamma \quad (2.62)$$

$$U_k^c = \left(\frac{1}{1 + \gamma}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m}\right)^\gamma \quad (2.63)$$

$$U_k^s - U_k^c = \left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m}\right)^\gamma \left[ \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma(1-\frac{1}{n})}}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^\gamma - \frac{1}{1 + \gamma} \right] \quad (2.64)$$

Si  $n \rightarrow \infty$  alors :

$$U_k^s < U_k^c \quad (2.65)$$

Cqfd.

### Économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas

#### **Résultat 2.10 :**

*Lorsque les oligopoleurs sont répliqués au moins une fois dans chaque secteur du bien différencié, l'équilibre Cournot-Walras symétrique est Pareto dominé par l'équilibre concurrentiel.*

*Preuve :*

$$U_k^s = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\gamma + \gamma \text{Log}\left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{n}\right) \quad (2.66)$$

$$U_k^c = 1 - \gamma + \gamma \text{Log}\left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m}\right) \quad (2.67)$$

$$U_k^s - U_k^c = \frac{1}{n}\gamma - \gamma \text{Log}(n) \quad (2.68)$$

$$U_k^s - U_k^c > 0 \text{ si et seulement si } e^{\frac{1}{n}} > n \quad (2.69)$$

Considérons la fonction  $f(n) = e^{\frac{1}{n}} - n$ . Il s'agit de voir pour quelles valeurs de  $n$  la fonction  $f(n)$  est supérieure à 0. La fonction  $f(n)$  est décroissante sur  $[0, \infty[$ . Elle est positive sur  $]0, 1.8[$ . D'où  $U_k^s < U_k^c$  à partir de  $n > 2$ . Lorsque nous avons plus de deux agents répliqués par secteur de bien différencié, l'équilibre concurrentiel est préférable pour les agents à comportements stratégiques. Ce résultat reste cohérent avec l'analyse faite au niveau du *résultat 3*.

#### **Résultat 2.11 :**

*Lorsque  $n > 2$ , l'équilibre Cournot-Walras symétrique pour les agents concurrentiels n'est pas Pareto dominé par l'équilibre walrasien.*

Avec au moins trois oligopieurs par bien différencié, l'utilité des agents concurrentiels s'améliore.

*Preuve :*

$$U_i^s = \frac{1}{2m} \prod_{h=1}^{L-1} \left( \frac{\alpha_{ih}}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ih}} (n-1)\gamma \right)^{\alpha_{ih}} \quad (2.70)$$

$$U_i^c = \frac{1}{2m} \prod_{h=1}^{L-1} \left( \frac{\alpha_{ih}}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ih}} \gamma \right)^{\alpha_{ih}} \quad (2.71)$$

$$U_i^s - U_i^c = \frac{1}{2m} \prod_{h=1}^{L-1} \left( \frac{\alpha_{ih}\gamma}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ih}} \right)^{\alpha_{ih}} \left[ \prod_{h=1}^{L-1} (n-1)^{\alpha_{ih}} - 1 \right] \quad (2.72)$$

Le signe de  $U_i^s - U_i^c$  dépend de :

$$\left[ \prod_{h=1}^{L-1} (n-1)^{\alpha_{ih}} - 1 \right] \quad (2.73)$$

Pour des raisons de symétrie<sup>13</sup>, en supposant que  $\alpha_{i1} = \alpha_{i2} = \dots = \alpha_{i(L-1)} = \bar{\alpha}_i$  alors le signe de  $U_i^s - U_i^c$  dépend de :

$$(n-1)^{(L-1)\bar{\alpha}_i} - 1 > 0 \quad (2.74)$$

$$U_i^s > U_i^c \quad (2.75)$$

Cqfd.

---

13. Poids identique accordé au bien différencié

## 2.6 Comparaison du modèle de différenciation avec Julien et Tricou (2005)

Dans le modèle de Julien et Tricou (2005), les biens échangés sur les différents marchés sont supposés être homogènes. Comme souligné dans le modèle général, quand  $\alpha_{ih} \rightarrow 1$  nous sommes dans le cas d'un bien homogène. Quelles sont à présent les implications du modèle par rapport aux modèles de Julien et Tricou (2005) ?

### **Résultat 2.12 :**

*Lorsque  $\alpha_{ih} \rightarrow 1$ , l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié coïncide à l'équilibre Cournot Walras symétrique de Julien et Tricou (2005) .*

Quand nous considérons  $\alpha_{ih} \rightarrow 1, \forall h = 1, \dots, (L-1)$ , les agents concurrentiels perçoivent le bien de chaque type d'oligopoleurs comme des biens totalement différents et donc homogènes. Aussi, les oligopoleurs conscients de cette information agiront stratégiquement pour le bien où ils sont offreurs et demandeurs des autres biens de l'économie. L'économie comprend alors  $L$  biens homogènes et tous les acteurs de notre économie consomment tous les biens contrairement au modèle de différenciation. Les agents économiques ont des dotations en coin et détiennent un bien par groupe d'individus. Les oligopoleurs par groupe de  $n$  agents sont spécialisés dans un bien donné  $k = 1, \dots, (L-1)$  et se comportent de manière concurrentielle pour les autres biens. En nous affranchissant des  $m$  agents concurrentiels de notre modèle,<sup>14</sup> nous obtenons donc le modèle de Julien et Tricou (2005).

## 2.7 Interprétation des résultats, discussion avec la littérature et conclusion

Le concept d'équilibre concurrentiel du point de vue walrasien peut être non coopératif. Il s'agit d'un cadre analyse en équilibre général non stratégique. Le concept d'équilibre non stratégique est remplacé par le concept d'équilibre de Nash dès l'apparition de compor-

---

14. Nous avons déjà le comportement concurrentiel des oligopoleurs

tements stratégiques. Dans le cas cette étude où il est considéré des agents qui ont des biens différenciés qu'ils offrent au marché. Nous pouvons les qualifier de « *grands agents* » car ayant le monopole sur leur bien, ils exercent leur pouvoir de marché. Ils vont alors offrir une partie de leurs dotations initiales au marché afin d'obtenir des gains plus élevés. C'est la concurrence par les quantités au sens de Cournot (1838).

Shapley et Shubik (1977) ouvrent la voie vers les modèles où les agents ont des comportements stratégiques. Dans leur modèle ils traitent du cas où les *traders* ont des comportements stratégiques symétriques tandis qu'ils manipulent individuellement le prix sur le marché. La modélisation se situe dans une autre famille de modèle qui mélange l'approche précédente avec celle de Walras. Ce genre d'approche est introduit pour la première fois par Gabszewicz et Vial (1972). Ils proposent un modèle productif où un côté du marché comprend des agents à comportements stratégiques et sur un autre côté du marché, les autres agents prennent les prix comme donnés. Les comportements dans ce genre d'analyse étaient asymétriques. Codognato et Gabszewicz (1991) et Codognato et Gabszewicz (1993) appliquent l'approche précédente dans une économie d'échange où les agents stratégiques ont sur leur bien un pouvoir de marché du fait de leur faible taille. Une alternative au modèle asymétrique est mise en évidence pour la première par Julien et Tricou (2005), où les auteurs justifient les comportements symétriques des oligopoleurs.

De l'étude il ressort que les prix sont des fonctions croissantes du coefficient de différenciation des agents pour le bien différencié donné mais décroissantes du nombre d'oligopoleurs pour ce bien. Ce résultat s'apparente à celui d'Hotelling (1929) où la différenciation se fait par les coûts de transport. Les prix sont donc des fonctions croissantes de ces derniers. Un oligopoleur aura donc tendance à augmenter le prix de son bien différencié si les agents concurrentiels désirent l'acquérir de plus en plus. Lorsque le nombre d'oligopoleurs pour un bien différencié donné augmente, le prix va tendre vers celui Walrasien. Aussi, lorsque le modèle ne comprend qu'un seul agent oligopoleur pour chaque type de bien différencié, alors l'équilibre obtenu est trivial. Cet équilibre trivial est « *nice* » au sens de Cordella et Gabszewicz (1998) et « *very nice* » Busetto et Codognato (2006). Donc d'après Cordella et Gabszewicz (1998), même si le jeu est faiblement perturbé, il n'y aura presque pas d'échange car l'avantage perçu en participant à l'échange est presque compensé par l'avantage perçu en réduisant l'offre pour manipuler le prix.

Dans la seconde partie de notre étude, en répliquant le nombre d'oligopoleurs par type de bien différencié, sous certaines conditions, l'équilibre de Cournot-Walras converge vers celui Walrasien. Cela reste conforme aux résultats de Codognato et Gabszewicz (1991) qui montrent que l'équilibre de Cournot-Walras converge par réplication vers l'équilibre walrasien. Codognato et Gabszewicz (1993) obtiennent le même résultat en considérant un continuum de traders à la Aumann (1964). Cette étude peut être étendue en considérant au lieu d'un seul bien concurrentiel possédé par les agents concurrentiels, une plus grande variété. Cela conduit à normaliser les prix de tous les biens concurrentiels à l'unité<sup>15</sup>. Le prochain chapitre évalue les implications en termes de politiques économiques (taxation, etc.).

---

15. Les calculs ont été faits

## 2.8 Annexes

### 2.8.1 Équilibre concurrentiel dans le cas de l'économie Cobb-Douglas

Dans la présentation des résultats (utilisés dans la partie analyse des propriétés du modèle) des annexes, les agents 1 et 2 représentent respectivement des agents qui consomment tous les biens et ceux qui consomment uniquement leur bien et celui concurrentiel. Dans un premier cas, nous supposons que les agents de type 2 disposent d'une utilité qui s'exprime par une fonction Cobb-Douglas puis dans un autre cas par une fonction de type quasi-linéaire. Tandis que les agents 1 dans les deux cas ont une fonction d'utilité de type Cobb-Douglas. Les agents de type 1 n'offrent que le bien  $L$  dont les prix sont normalisés à 1. Quant aux agents de type 2, ils offrent le bien  $k$  dont le prix est  $p_k$ . Les programmes de nos différents agents se présentent comme suit :

#### *Agents 1*

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & U_i(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^L) = x_i^L \prod_{h=1}^{L-1} (x_i^h)^{\alpha_{ih}} \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^{L-1} p_h x_i^h + x_i^L \leq \frac{1}{m} \end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\forall \quad i = 1, \dots, m$$

#### *Agents 2*

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & U_k(x_k^k, x_k^L) = x_k^k (x_k^L)^\gamma \\ \text{s.c.} \quad & p_k x_k^k + x_k^L \leq p_k \quad \forall \quad k = 1, \dots, L-1 \end{aligned} \tag{2.77}$$



Il s'agit d'une fonction de type Cobb-Douglas, elle est quasi-concave et non sécante aux axes. Nous avons :

$$x_k^k = \frac{1}{\gamma + 1} \quad (2.78)$$

$$x_k^L = \frac{\gamma}{\gamma + 1} p_k \quad (2.79)$$

$$\forall k = 1, \dots, L - 1$$

A l'équilibre général concurrentiel sur le marché  $k$ , nous avons  $(L - 1)$  équations  $\forall k = 1, \dots, L - 1$  et :

$$\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ik}}{\left[1 + \sum_{k=1}^{L-1} \alpha_{ik}\right]} \frac{1}{m p_k} + \frac{1}{\gamma + 1} = 1 \quad , \forall k = 1, \dots, L - 1 \quad (2.80)$$

Cela implique :

$$p_k = \left[1 + \frac{1}{\gamma}\right] \left[\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2 m}\right] \quad (2.81)$$

$$\forall k = 1, \dots, L - 1$$

Les allocations des agents se présentent comme suit :

Pour les **agents 2** :  $\forall k = 1, \dots, L - 1$

$$x_k^k = \frac{1}{1 + \gamma} \quad (2.82)$$

$$x_k^L = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \quad (2.83)$$

Pour les **agents 1** :  $\forall i = 1, \dots, m$

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih} \gamma}{(\gamma + 1) \left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ih} \right]} \quad \forall h = 1, \dots, L - 1 \quad (2.84)$$

$$x_i^L = \frac{1}{2m} \quad (2.85)$$

### 2.8.2 Équilibre concurrentiel dans le cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas

En remplaçant dans le cadre de l'analyse précédente, la fonction Cobb-Douglas par une fonction de type quasi-linéaire, le programme de l'agent oligopoleur devient :

#### **Agents 2**

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & U_k(x_k^k, x_k^L) = x_k^k + \gamma \text{Log } x_k^L \\ \text{s.c.} \quad & p_k x_k^k + x_k^L \leq p_k \quad \forall k = 1, \dots, L - 1 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Les solutions des programmes des agents 1 et 2 sont les suivantes :

Pour les **agents 1**, leur fonction d'utilité est de type Cobb-Douglas et donc du fait de ces propriétés nous avons :

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih}}{\left[1 + \sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih}\right]} \frac{1}{m p_h} \quad \forall h = 1, \dots, L-1 \quad (2.87)$$

$$x_i^L = \frac{1}{\left[1 + \sum_{h=1}^{L-1} \alpha_{ih}\right]} \frac{1}{m} \quad (2.88)$$

Pour les **agents 2**, le lagrangien du programme nous donne :

$$L(\lambda | x_k^k, x_k^L) = x_k^k + \gamma \text{Log } x_k^L - \lambda [p_k x_k^k + x_k^L - p_k]$$

La contrainte est qualifiée et en appliquant les conditions de K.K.T<sup>16</sup>, nous avons

$\forall k = 1, \dots, L-1$  :

$$\frac{\partial L}{\partial x_k^k} = 1 - \lambda p_k = 0 \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k^L} = \frac{\gamma}{x_k^L} - \lambda = 0 \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_k x_k^k + x_k^L - p_k = 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad (2.91)$$

$$(2.89) \implies \lambda = \frac{1}{p_k} \quad (2.92)$$

$$(2.90) \implies x_k^L = \gamma p_k \quad (2.93)$$

En remplaçant (2.90) dans (2.91), nous avons :

$$x_k^k = 1 - \gamma \quad (2.94)$$

---

16. Conditions de Karush-Kuhn-Tucker

A l'équilibre général concurrentiel sur le marché  $k$ , nous avons  $(L - 1)$  équations,  
 $\forall k = 1, \dots, L - 1$  et :

$$\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ik}}{\left[1 + \sum_{k=1}^{L-1} \alpha_{ik}\right]} \frac{1}{m p_k} + (1 - \gamma) = 1 \quad , \quad \forall k = 1, \dots, L - 1 \quad (2.95)$$

Cela implique :

$$p_k = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{\left[1 + \sum_{k=1}^{L-1} \alpha_{ik}\right]} \frac{1}{m \gamma} \quad (2.96)$$

$$\forall k = 1, \dots, L - 1$$

En normalisant les  $\alpha_{ik}$  de telle sorte que l'on ait  $\sum_{k=1}^{L-1} \alpha_{ik} = 1$ , nous avons :

$$p_k = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2} \frac{1}{m \gamma} \quad (2.97)$$

$$\forall k = 1, \dots, L - 1$$

Les allocations des agents sont les suivantes :

Pour les **agents 2** :  $\forall k = 1, \dots, L - 1$

$$x_k^k = 1 - \gamma \quad (2.98)$$

$$x_k^L = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2 m} \quad (2.99)$$

Pour les **agents 1** :  $\forall \quad i = 1, \dots, m$

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih} \gamma}{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ih} \right]} \quad \forall \quad h = 1, \dots, L - 1 \quad (2.100)$$

$$x_i^L = \frac{1}{2 \, m} \quad (2.101)$$

2.8.3 Tableau de signe de  $\gamma(n)$ 

| <b>n</b> | $\gamma(n)$ | <b>n</b> | $\gamma(n)$ |
|----------|-------------|----------|-------------|
| 0        | 0           | 1,95     | 0,108       |
| 0,05     | 0,108       | 2        | 0           |
| 0,1      | 0,235       | 2,05     | -0,093      |
| 0,15     | 0,384       | 2,1      | -0,174      |
| 0,2      | 0,563       | 2,15     | -0,244      |
| 0,25     | 0,778       | 2,2      | -0,306      |
| 0,3      | 1,041       | 2,25     | -0,36       |
| 0,35     | 1,367       | 2,3      | -0,408      |
| 0,4      | 1,778       | 2,35     | -0,451      |
| 0,45     | 2,306       | 2,4      | -0,49       |
| 0,5      | 3           | 2,45     | -0,524      |
| 0,55     | 3,938       | 2,5      | -0,556      |
| 0,6      | 5,25        | 2,55     | -0,584      |
| 0,65     | 7,163       | 2,6      | -0,609      |
| 0,7      | 10,111      | 2,65     | -0,633      |
| 0,75     | 15          | 2,7      | -0,654      |
| 0,8      | 24          | 2,75     | -0,673      |
| 0,85     | 43,444      | 2,8      | -0,691      |
| 0,9      | 99          | 2,85     | -0,708      |
| 0,95     | 399         | 2,9      | -0,723      |
| 1        | n/d         | 2,95     | -0,737      |
| 1,05     | 399         | 3        | -0,75       |
| 1,1      | 99          | 3,05     | -0,762      |
| 1,15     | 43,444      | 3,1      | -0,773      |
| 1,2      | 24          | 3,15     | -0,784      |
| 1,25     | 15          | 3,2      | -0,793      |
| 1,3      | 10,111      | 3,25     | -0,802      |
| 1,35     | 7,163       | 3,3      | -0,811      |
| 1,4      | 5,25        | 3,35     | -0,819      |
| 1,45     | 3,938       | 3,4      | -0,826      |
| 1,5      | 3           | 3,45     | -0,833      |
| 1,55     | 2,306       | 3,5      | -0,84       |
| 1,6      | 1,778       | 3,55     | -0,846      |
| 1,65     | 1,367       | 3,6      | -0,852      |
| 1,7      | 1,041       | 3,65     | -0,858      |
| 1,75     | 0,778       | 3,7      | -0,863      |
| 1,8      | 0,563       | 3,75     | -0,868      |
| 1,85     | 0,384       | 3,8      | -0,872      |
| 1,9      | 0,235       | 3,85     | -0,877      |

### 2.8.4 Tableau de signe de $f(n) = e^{\frac{1}{n}} - n$

| n     | f(n)      | n    | f(n)   |
|-------|-----------|------|--------|
| -10   | 10,905    | 0,8  | 2,69   |
| -9,95 | 10,854    | 0,85 | 2,393  |
| -9,9  | 10,804    | 0,9  | 2,138  |
| -9,85 | 10,753    | 0,95 | 1,915  |
| -9,8  | 10,703    | 1    | 1,718  |
| -9,75 | 10,653    | 1,05 | 1,542  |
| -0,35 | 0,407     | 1,1  | 1,382  |
| -0,3  | 0,336     | 1,15 | 1,236  |
| -0,25 | 0,268     | 1,2  | 1,101  |
| -0,2  | 0,207     | 1,25 | 0,976  |
| -0,15 | 0,151     | 1,3  | 0,858  |
| -0,1  | 0,1       | 1,35 | 0,747  |
| -0,05 | 0,05      | 1,4  | 0,643  |
| 0     | n/d       | 1,45 | 0,543  |
| 0,05  | 485165195 | 1,5  | 0,448  |
| 0,1   | 22026,366 | 1,55 | 0,356  |
| 0,15  | 785,622   | 1,6  | 0,268  |
| 0,2   | 148,213   | 1,65 | 0,183  |
| 0,25  | 54,348    | 1,7  | 0,101  |
| 0,3   | 27,732    | 1,75 | 0,021  |
| 0,35  | 17,062    | 1,8  | -0,057 |
| 0,4   | 11,782    | 1,85 | -0,133 |
| 0,45  | 8,778     | 1,9  | -0,207 |
| 0,5   | 6,889     | 1,95 | -0,28  |
| 0,55  | 5,611     | 2    | -0,351 |
| 0,6   | 4,694     | 2,05 | -0,421 |
| 0,65  | 4,007     | 2,1  | -0,49  |
| 0,7   | 3,473     | 2,15 | -0,558 |
| 0,75  | 3,044     | 2,2  | -0,625 |

## CHAPITRE 3

---

### Les Politiques publiques

---

#### Contenu

---

|     |                                                           |    |
|-----|-----------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Introduction . . . . .                                    | 64 |
| 2.2 | L'équilibre Cournot-Walras . . . . .                      | 67 |
| 2.3 | Modèle avec un oligopoleur par bien différencié . . . . . | 74 |
| 2.4 | Modèle à $n$ oligopoleurs . . . . .                       | 81 |
| 2.5 | Etude des propriétés de l'équilibre . . . . .             | 88 |
| 2.6 | Comparaison du modèle . . . . .                           | 96 |
| 2.7 | Discussion . . . . .                                      | 96 |
| 2.8 | Annexes . . . . .                                         | 99 |

---



L'objectif de ce chapitre est de développer des mesures de politiques publiques en concurrence imparfaite. Il s'articule en deux parties. Dans une première partie, il est proposé des politiques fiscales issues du modèle de différenciation proposé dans le chapitre 2. Dans une dernière partie, il est présenté un article co-écrit avec les professeurs Ludovic Julien et Louis de Mesnard (Elegbede et al., 2017) qui généralise les modèles de Gabszewicz et Grazzini (1998) et Grazzini (2006) pour des préférences CES des agents économiques.

## 3.1 Les politiques fiscales en différenciation

### 3.1.1 Introduction

En économie, les politiques de taxation suscitent de nombreux débats. Les questions relatives à la taxation peuvent être abordées sous deux angles. (i) Peut être pourrait il être pertinent de développer : pourquoi les autorités étatiques mettent en œuvre des politiques de taxation ? (ii) Quel(s) type(s) de taxe(s) est adapté en fonction de l'environnement de compétition ? D'après la littérature, la réponse à la première question suggère que la taxation permet de résoudre trois principaux types de problèmes. Tout d'abord, la taxe sert à financer les dépenses publiques ou intervient dans un but de redistribution (Mirrlees, 1971; Ramsey, 1927). Cela permet entre autres de réduire les distorsions qui sont généralement dues aux mécanismes de marché tels que l'augmentation des prix sur le marché, la baisse du surplus du consommateur, etc. La taxation permet aussi de contrecarrer les problèmes dus aux externalités (Sandmo, 1975), tels que la pollution, les nuisances de tout ordre, etc. Enfin, la taxation joue le rôle de correcteur dans un cadre de compétition imparfaite (Guesnerie et Laffont, 1978; Myles, 1989). Myles (1989), en étendant la théorie de la taxation des dotations dans un modèle d'équilibre général en compétition imparfaite, analyse le choix des taxes sur les biens afin de maximiser le bien-être dans un cadre non-coopératif. Guesnerie et Laffont (1978) étudient la taxe optimale qui pourrait restaurer le premier théorème du bien-être dû au comportement non-concurrentiel du monopole. En s'appuyant sur le modèle de Cordella et Gabszewicz (1998), Gabszewicz et Grazzini (1998) taxent les dotations initiales et redistribuent le revenu issu de la taxation. Ils montrent que cette manière de procéder corrige les distorsions dans un cadre de concurrence imparfaite. L'équilibre issu

de la taxation conduit à l'équilibre concurrentiel et, par voie de fait, à résorber le problème de distorsion dû à la concurrence imparfaite. Le prix obtenu après taxation est supérieur au prix avant taxation. La correction, par taxation, des effets dûs à la distorsion dans un cadre de concurrence imparfaite et la redistribution du revenu issu de cette taxation se font par deux canaux. Dans un premier temps, le prix appauvrit les agents possédant un bien par confiscation de leur bien initial. Par la suite, le prix les enrichit par augmentation du prix de leur bien.

La seconde question de recherche sur les types de taxes à mettre en œuvre en fonction de l'environnement de compétition amène à s'interroger aussi bien sur la taxation unitaire que la taxation *ad valorem*. Cela renvoie à une vaste littérature qui compare les deux types de taxes. La plupart des auteurs restent unanimes sur le fait qu'en cas de concurrence pure et parfaite, les taxes *ad valorem* et *unitaires* sont équivalentes. Ceci s'explique par le fait que le producteur n'a pas d'influence sur le prix. Il perçoit la taxe *ad valorem* comme un montant fixe à payer par unité vendue et par conséquent comme une taxe *unitaire*. En concurrence imparfaite, le choix entre les deux types de taxes est généralement ambigu. Ce choix dépend des objectifs des producteurs, des consommateurs, ou encore du décideur public.

Dans un oligopole de Cournot avec deux types d'agents et deux types de biens, Grazzini (2006) montre que le bien-être issu de la taxation *unitaire* domine celui *ad valorem*. Ce résultat reste valable sous l'hypothèse d'un niveau de recette égal entre les deux types de taxation et ceci quand le nombre de consommateurs est suffisamment grand devant celui des oligopoleurs. Au-delà de cette dominance, il est noté un conflit d'intérêt entre les oligopoleurs qui préfèrent la taxe *unitaire* et les consommateurs qui eux préfèrent celle *ad valorem* (Delipalla et Keen, 1992). Les consommateurs souhaitent une taxation *ad valorem* qui leur procure des prix faibles, tandis que les firmes préfèrent une taxation *unitaire* qui lui génère des profits plus élevés car les prix deviennent plus élevés. Keen (1998) obtient des résultats similaires à ceux de Delipalla et Keen (1992) dans un modèle d'oligopole de Cournot, en supposant que la qualité du bien est unique, c'est-à-dire en présence d'un bien homogène. Il conclut que les effets sur le prix de consommation pour les deux taxes sont les mêmes que dans le cas du monopole. De même, Kay et Keen (1983) montrent que la taxe *unitaire* influe fortement sur les prix tandis que celle *ad valorem* a un effet plus important

sur d'autres variables. Ainsi, la taxe *unitaire* permettrait d'obtenir un revenu souhaité alors que celle *ad valorem* fixerait à un niveau dense d'autres variables. Pour ces mêmes auteurs, dans un cas de variété des produits, la taxe *ad valorem* a un effet correctif car le revenu issu du marché est sous-optimal. Delipalla et Keen (1992) corroborent ces résultats en opposant les taxes *ad valorem* et *unitaire* dans deux modèles d'oligopoles avec libre entrée et libre sortie. Ils démontrent que la taxe *ad valorem* conduit à des niveaux de prix faibles pour les consommateurs, des revenus de taxes élevés, et de faibles profits dans le cas d'absence de libre entrée. Dans ce cas, la taxe *ad valorem* domine la taxe *unitaire* en regardant la fonction de bien-être des individus. Par conséquent, l'amélioration du bien-être par la taxe *unitaire* est fortement liée à une taxation *ad valorem*. Dans la même veine, Anderson et al. (2001a) soulignent la dominance du bien-être social de la taxe *ad valorem* dans un cadre Cournotien à court terme quand les coûts de production sont identiques parmi les firmes. Aussi, Skeath et Trandel (1994) démontrent que pour toute taxe *unitaire*, il existe une taxe *ad valorem* qui la domine et qui produit un plus grand profit. Ce résultat reste valable en fonction de certains paramètres du marché.

Étant donné l'ambiguïté dans le choix de l'une de ces deux taxes, Myles (1996) considère les effets divers que peuvent avoir les taxes *ad valorem* et unitaires sous une compétition imparfaite. L'auteur atteste qu'une combinaison optimale des deux taxes élimine la perte de bien-être incitant ainsi les entreprises à maximiser le profit afin de taxer de manière appropriée au prix de Ramsey<sup>1</sup>. Mixer les deux genres de taxes dépend du rôle potentiel de ces dernières comme instruments essentiellement correctifs (Kay et Keen, 1983). Ce potentiel croît car il n'y a pas de raison de supposer que le résultat issu du marché sans taxe soit optimal pour qu'on souhaite utiliser ces taxes pour améliorer la performance du marché. Delipalla et Keen (1992) avaient au préalable déjà considéré une combinaison des deux taxes *ad valorem* et *unitaire* qui maximise le bien-être sous la contrainte que les deux instruments de politiques soient non négatifs. Mais Delipalla et Keen (1992) ne s'intéressaient pas aux effets d'une combinaison optimale des deux types de taxes. Bien que la taxe *ad valorem* soit montrée dominante sur la taxe *unitaire*, cela n'élimine pas la possibilité que l'utilisation simultanée des deux taxes (sous l'hypothèse de négativité) puisse escompter des

---

1. Le prix de Ramsey est issu d'un processus de production où l'Etat maximise le bien-être social tandis qu'il collecte des revenus en l'absence de taxes forfaitaires.

effets qu'aucun des instruments ne pourrait atteindre individuellement. Dans son article, Myles (1996) prouve donc que la combinaison des deux types de taxes conduit au même prix de Ramsey dans une économie de propriété privée avec compétition imparfaite. Cette combinaison élimine la perte du bien-être qui est générée dans le cas du comportement monopolistique.

Dans tous les cas présentés ci-dessus, les biens sont homogènes. Anderson et al. (2001b) étudient l'impact des taxes *ad valorem* et *unitaire* sur un oligopole différencié sur les marchés imparfaits. Les auteurs conduisent cette analyse aussi bien pour une compétition *à la Cournot* que pour une *à la Bertrand*. En justifiant le fait que la plupart des formes de marché est de type oligopolistique, il est important de voir de quelle manière les différentes taxes affectent l'économie dans son ensemble. Les conclusions auxquelles ils aboutissent diffèrent en fonction du temps et de l'asymétrie dans les coûts. Les auteurs prouvent que la taxe *ad valorem* est associée à un niveau de prix bas pour les consommateurs et à un profit bas pour les firmes. Le résultat est conforme au modèle de Cournot avec des biens homogènes. Ils démontrent qu'à court terme, l'efficacité de la taxe *ad valorem*, dans une compétition *à la Cournot*, surpasse celle de la taxe *unitaire*. L'impact de cette dernière peut être plus importante dans le cas d'une compétition *à la Bertrand*. Anderson et al. (2001b) analysent les effets des taxes en deux étapes : une phase de court terme et une autre de long terme. A court terme, sous certaines conditions, l'augmentation du profit sous une taxe *unitaire* est une condition nécessaire pour que le profit s'accroisse également sous la taxe *ad valorem*. L'augmentation du prix du producteur sous la taxe *unitaire* implique celle *ad valorem*. Les prix des consommateurs augmentent avec les deux types de taxes, aussi bien à court qu'à long terme.

Le but de cette section est d'analyser la taxation dans une compétition en quantités dans l'esprit Cournotien. L'approche proposée se distingue de celle développée par Anderson et al. (2001b) à deux niveaux. Premièrement, par son caractère d'analyse uniquement en quantités qui se rapproche le plus de la réalité. A ce niveau, les entreprises en situation d'oligopole ou de monopole manipulent en réalité les prix à travers la quantité de bien qu'elles offrent au marché. Deuxièmement, du fait qu'il tient compte du prix des autres biens en proposant ainsi une analyse en équilibre général. La différence de cette approche avec les modèles de taxation similaires en équilibre général est que le bien de l'oligopoleur

est différencié de celui de son concurrent. Le modèle de différenciation en environnement stratégique présenté au chapitre 2, comme sur tout marché imparfait, provoque des dysfonctionnements de l'économie. Ainsi, des mesures publiques deviennent inévitables afin de restaurer un temps soit peu le bien-être des agents économiques. Il est appliqué une approche des proposée par certains auteurs tels que Gabszewicz et Grazzini (1998); Grazzini (2006) qui considèrent une collecte de ressources auprès des oligopoleurs et redistribution afin de réduire les distorsions issues du marché. Cette section est présentée en deux principales parties. Dans une première partie, nous proposons des politiques fiscales qui s'inspirent de notre modèle du chapitre 2 et dans une deuxième partie, nous formulons les conclusions qui en découlent.

### 3.1.2 Le modèle avec taxation

Afin de corriger les distorsions, l'approche mise en œuvre propose de collecter des ressources auprès des oligopoleurs et de les redistribuer à un agent économique ne disposant pas de dotations initiales. Il s'agit d'analyser les conséquences en termes de politiques publiques de l'équilibre Cournot-Walras sur produit différencié présenté dans le chapitre 2. La taxation soulève deux problèmes que sont le problème d'information et celui de l'anonymat. Nous supposons tout comme dans le chapitre 2 que le modèle est réalisé sous information complète et il ne reste qu'à résoudre le second problème. Afin de résoudre ce dernier, chaque type de bien sera taxé dans les mêmes proportions<sup>2</sup>. Cela veut dire que pour les oligopoleurs  $\alpha = 1, \dots, n$  possédant le bien différencié  $k$ , nous aurons la taxe  $t^k$  qui sera la même,  $\forall k = 1, \dots, (L - 1)$ .  $t^k$  désignant la taxe adressée à l'oligopoleur détenant le bien différencié  $k$ .

#### Taxation des transactions

##### **Résultat 3.1 :**

*Une taxation des transactions fait augmenter le prix sans modifier l'allocation des oligopoleurs, mais baisse les allocations des agents concurrentiels.*

---

2. Raisons de symétrie dans les comportements.

**Preuve :**

Il est présenté dans cette preuve, les résultats de la taxation des transactions pour les économies Cobb-Douglas et quasi-linéaire/Cobb-Douglas.

**(a) L'économie Cobb-Douglas**

En reprenant l'équation (2.11), nous avons :

$$p_k = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{\left[ \sum_{\alpha=1}^n (1 - t^k) e_{\alpha k} \right]} \quad (3.1)$$

La fonction d'utilité indirecte est donc :

$$\text{Max.}_{\{e_{\alpha k}\}} V(e_{\alpha k}, e_{-\alpha k}) = (1 - e_{\alpha k}) \left( \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right]}{2m} \frac{e_{\alpha k}}{(1 - t^k) \left[ \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} \right]} \right)^\gamma \quad (3.2)$$

En appliquant les CPO à  $V(e_{\alpha k}, e_{-\alpha k})$  par rapport à  $e_{\alpha k}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial e_{\alpha k}} = 0$  :

$$\left( \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right]}{2m} \frac{1}{1 - t^k} \right)^\gamma \left[ - \left( \frac{e_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k}} \right)^\gamma + \gamma(1 - e_{\alpha k}) \left( \frac{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} - e_{\alpha k}}{\left( \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} \right)^2} \right) \left( \frac{e_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k}} \right)^{\gamma-1} \right] = 0 \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow - \left( \frac{e_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k}} \right) + \gamma(1 - e_{\alpha k}) \left( \frac{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} - e_{\alpha k}}{\left( \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} \right)^2} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow - e_{\alpha k} \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} + \gamma(1 - e_{\alpha k}) \left( \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} - e_{\alpha k} \right) = 0 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow - e_{\alpha k} (n e_{\alpha k}) + \gamma(1 - e_{\alpha k}) ((n - 1) e_{\alpha k}) = 0 \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow - [n + \gamma(n - 1)] e_{\alpha k} + (n - 1) = 0 \quad (3.7)$$

$$\tilde{e}_{\alpha k} = \frac{\gamma(n-1)}{n + \gamma(n-1)} \quad \forall \quad k = 1, \dots, L-1 \text{ et } \alpha = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Une taxation des transactions fait augmenter le prix sans modifier l'allocation des oligopoleurs. Néanmoins, les allocations des agents concurrentiels baissent et par voie de conséquence la fonction de bien-être agrégée des consommateurs.

### (b) L'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas

En considérant le même prix que précédemment, le programme à résoudre pour l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas est :

$$\text{Max}_{\{e_k\}} V(e_{\alpha k}, -e_{\alpha k}) = (1 - e_{\alpha k}) + \gamma \text{Log} \left( \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right]}{2m} \frac{e_{\alpha k}}{(1 - t^k) \left[ \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} \right]} \right)$$

$$\text{Avec } k = 1, \dots, L-1 \text{ et } \alpha = 1, \dots, n$$

En dérivant  $V(e_{\alpha k}, -e_{\alpha k})$  par rapport à  $e_{\alpha k}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \Rightarrow -1 + \gamma \left[ \frac{1}{e_{\alpha k}} - \frac{1}{e_{\alpha k} + \sum_{\alpha' \neq \alpha}^n e_{\alpha'k}} \right] &= 0 \\ \Rightarrow -1 + \gamma \left[ \frac{1}{e_{\alpha k}} - \frac{1}{e_{\alpha k} + (n-1)e_{\alpha k}} \right] &= 0 \\ \Rightarrow \left[ \frac{1}{e_{\alpha k}} - \frac{1}{ne_{\alpha k}} \right] &= \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

Alors

$$\tilde{e}_{\alpha k} = \frac{(n-1)}{n} \gamma \quad \forall \quad k = 1, \dots, L-1 \text{ et } \alpha = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

Les conclusions restent similaires au cas de l'économie Cobb-Douglas. Ainsi, une taxation des dotations initiales dans le cas d'une fonction quasi-linéaire pour les oligopoleurs laisse invariant le prix et les allocations des oligopoleurs par rapport aux résultats du cas de non taxation.

Avec les deux types d'économies proposées dans le chapitre 2, la taxation des transactions ne modifie pas la stratégie des oligopoleurs. Elle affecte néanmoins les allocations des agents concurrentiels en biens différenciés car leur fonction de demande pour le bien différencié  $k$  est une fonction décroissante du prix pour ce bien. Une taxation des transactions va donc détériorer le bien-être des agents concurrentiels.

### Taxation des dotations initiales

Dans cette sous-section, nous analysons les impacts de la taxation des dotations initiales des agents économiques.

#### (a) L'économie Cobb-Douglas

En considérant l'équation (2.25) du chapitre 2, et en taxant les dotations initiales des oligopoleurs, leurs fonctions d'utilité indirectes s'écrivent :

$$\text{Max}_{\{e_{\alpha k}\}} V_{\alpha k}(e_{\alpha k}, e_{-\alpha k}) = (1 - t^k - e_{\alpha k}) \left( \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right]}{2m} \frac{e_{\alpha k}}{\left[ \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} \right]} \right)^{\gamma} \quad (3.10)$$

En dérivant par rapport à  $e_{\alpha k}$ , nous avons  $\frac{\partial V}{\partial e_{\alpha k}} = 0$  :

$$\left[ - \left( \frac{e_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k}} \right)^{\gamma} + \gamma(1 - t^k - e_{\alpha k}) \left( \frac{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} - e_{\alpha k}}{\left( \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} \right)^2} \right) \left( \frac{e_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k}} \right)^{\gamma-1} \right] = 0 \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow - \left( \frac{e_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k}} \right) + \gamma(1 - t^k - e_{\alpha k}) \left( \frac{\sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} - e_{\alpha k}}{\left( \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} \right)^2} \right) = 0 \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow - e_{\alpha k} \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} + \gamma(1 - t^k - e_{\alpha k}) \left( \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} - e_{\alpha k} \right) = 0 \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow - e_{\alpha k}(n - e_{\alpha k}) + \gamma(1 - t^k - e_{\alpha k})((n - 1)e_{\alpha k}) = 0 \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \left[ n + \gamma(n - 1) \right] + \gamma(1 - t^k)(n - 1) = 0 \quad (3.15)$$



$$\tilde{e}_{\alpha k}(t^k) = \frac{\gamma(1-t^k)(n-1)}{n+\gamma(n-1)} \quad \forall k = 1, \dots, L-1 \text{ et } \alpha = 1, \dots, n \quad (3.16)$$

En conséquence, le prix  $p_k$  est égal à :

$$p_k(t^k) = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2} \frac{1}{m} \frac{1}{n} \frac{\left[ n + \gamma(n-1) \right]}{\left[ \gamma(1-t^k)(n-1) \right]}$$

Les allocations des agents de notre économie se présentent donc comme suit :

Pour les **oligopoleurs** :  $\forall k = 1, \dots, L-1$  et  $i = 1, \dots, n$

$$x_k^k = 1 - t^k - e_{\alpha k} = (1 - t^k) \left( 1 - \frac{\gamma(n-1)}{\left[ n + \gamma(n-1) \right]} \right) \quad (3.17)$$

$$x_k^L = p_k \cdot \tilde{e}_{\alpha k} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2} \frac{1}{m} \frac{1}{n} \quad (3.18)$$

Pour les **agents concurrentiels** :  $\forall i = 1, \dots, m$

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih}}{2} \frac{1}{m} \frac{1}{p_h} = \frac{\alpha_{ih}}{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ih} \right]} \frac{n}{2} \frac{\gamma(1-t^k)(n-1)}{n+\gamma(n-1)} \quad \forall h = 1, \dots, L-1 \quad (3.19)$$

$$x_i^L = \frac{1}{2} \frac{1}{m} \quad (3.20)$$

Lorsque les oligopoleurs ont une fonction d'utilité de type Cobb-Douglas, leur stratégie en présence de taxation est fonction de la taxe de l'autorité publique et est égale à :  $\tilde{e}_{\alpha k}(t^k) = \frac{\gamma(1-t^k)(n-1)}{n+\gamma(n-1)}$ ,  $\forall k = 1, \dots, L-1$  et  $\alpha = 1, \dots, n$ . Les dotations des agents sont affectées par  $t^k$ . Les prix augmentent mais les demandes des agents concurrentiels baissent. Quand le niveau de taxe augmente, la stratégie de l'oligopoleur baisse car  $\frac{\partial \tilde{e}_{\alpha k}(t^k)}{\partial t^k} < 0$ .

(b) L'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas

**Résultat 3.2 :**

*La taxation des dotations initiales pour une fonction de type quasi-linéaire pour les oligopoleurs laisse invariant le prix et les allocations des agents de notre modèle.*

Preuve :

La fonction d'utilité indirecte de l'oligopoleur  $\alpha k$  s'écrit :

$$\text{Max.}_{\{e_{\alpha k}\}} V_{\alpha k}(e_{\alpha k}, e_{-\alpha k}) = (1 - t^k - e_{\alpha k}) + \gamma \text{Log} \left( \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right]}{2m} \frac{e_{\alpha k}}{\left[ \sum_{\alpha'=1}^n e_{\alpha'k} \right]} \right)$$

Les CPO par rapport à  $e_{\alpha k}$  nous donne :

$$\frac{\partial V}{\partial e_{\alpha k}} = -1 + \gamma \left[ \frac{1}{e_{\alpha k}} - \frac{1}{e_{\alpha k} + \sum_{\alpha' \neq \alpha}^n e_{\alpha'k}} \right] = 0$$

Nous retrouvons exactement l'équation (2.41) du chapitre 2. La quantité  $(1 - t^k)$  est donc considérée comme appartenant au stock d'inventu et n'a donc pas affecté la stratégie de l'oligopoleur. Les conclusions dans un cas de taxation des dotations initiales, pour les préférences quasi-linéaires des oligopoleurs, restent équivalentes au cas de non taxation. Du fait de la quasi-linéarité en bien différencié, la demande en bien concurrentiel de l'oligopoleur est indépendante de sa richesse. D'où la pleine justification de l'invariance du prix et donc l'allocation des agents de notre économie.

### 3.1.3 Analyse du bien-être

Les conclusions issues de la politique de taxation des dotations initiales sont déduites en analysant les différences dans les fonctions de bien-être des agents de l'économie Cobb-Douglas.

**Comparaison de l'utilité des agents avant et après taxation**

Les fonctions d'utilité des oligopoleurs dans un cas de non taxation et de taxation sont respectivement :

$$U_k^s = \left(1 - \frac{(n-1)\gamma}{n + \gamma(n-1)}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{n}\right)^\gamma \quad (3.21)$$

$$U_k^s(t^k) = (1 - t^k) \left(1 - \frac{(n-1)\gamma}{n + \gamma(n-1)}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{n}\right)^\gamma \quad (3.22)$$

**Résultat 3.3 :**

*Une taxation des dotations initiales réduit le bien-être des agents économiques, mais également le prix du bien différencié.*

Preuve :

**(a) Cas des oligopoleurs :**

En considérant les équations (3.21) et (3.22), alors  $U_k^s(t^k) < U_k^s, \forall k = 1, \dots, n$ .  
Cqfd.

**(b) Cas des agents concurrentiels :**

$$U_i^s = \frac{1}{2m} \prod_{k=1}^{L-1} \left[ \frac{\alpha_{ik}n}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}} \frac{\gamma(n-1)}{n + \gamma(n-1)} \right]^{\alpha_{ik}} \quad (3.23)$$

et

$$U_i^s(t^k) = \frac{1}{2m} \prod_{k=1}^{L-1} \left[ \frac{\alpha_{ik}n}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}} \frac{\gamma(n-1)(1-t^k)}{n + \gamma(n-1)} \right]^{\alpha_{ik}} \quad (3.24)$$

Des équations (23) et (24), nous retenons que :

$$U_i^s(t^k) - U_i^s = \prod_{k=1}^{L-1} (1 - t^k)^{\alpha_{ik}} - 1 < 0 \quad (3.25)$$

Et donc

$$U_i^s(t^k) < U_i^s \quad (3.26)$$

Taxer les dotations initiales n'affecte ni les stratégies des oligopoleurs, ni les prix. Anticipant la taxation de leur dotation initiale en bien différencié  $k$ , les oligopoleurs réduisent la quantité de bien qu'ils apportent sur le marché  $k$  pour les échanges et cela réduit les prix. En revanche, cette taxation affecte les fonctions d'utilité des agents concurrentiels par confiscation d'une partie de leur demande.

### Analyse de la fonction de bien-être agrégé

Il s'agit de comparer les fonctions utilités agrégées dans une économie non taxée et qui le devient par la suite. La démarche étant d'apprécier ce qui se passe en termes d'« économie du bien-être ». Nous allons chercher à déterminer parmi deux situations données, laquelle est la meilleure en termes de bien-être. Chacune des deux situations se distinguent par la manière dont les ressources et les revenus sont répartis. L'on est amené à agréger les fonctions d'utilité des agents économiques afin de construire une Fonction de Bien-Être Sociale (FBES par la suite) dans un but de comparaison du bien-être des agents.

Agréger des fonctions d'utilités individuelles des agents afin d'obtenir une fonction d'utilité sociale n'est pas objectif et réalisable<sup>3</sup>. Cela s'explique par le caractère ordinal des fonctions d'utilités. Afin de contourner cette difficulté, le choix se porte le plus souvent dans la littérature sur la règle d'agrégation la plus satisfaisante, en l'occurrence le critère de Pareto qui est une norme raisonnable et minimale et s'appuie sur deux principes qualifiés d'*individualisme philosophique*.

---

3. D'après le théorème d'impossibilité d'Arrow (1963), cinq principales conditions sont à satisfaire : (1) absence de dictateur, (2) domaine universel, (3) de relation d'ordre social qui doit être transitive, (4) d'unanimité, (5) et enfin d'indépendance.

- **Principe 1** : Individualisme : On prend en compte le goût des individus qui ne se préoccupent que de leurs propres consommations, abstraction faite de celles des autres agents. Ils sont les seuls à connaître la situation qui leur est favorable ;
- **Principe 2** : la consommation constitue la finalité de la production. La production est effectuée à des fins de consommation ;

Considérons la fonction d'utilité des individus qui est fonction des quantités des différents biens que l'agent consomme. Étant donné les prix, les quantités consommées par l'agent économique sont des fonctions croissantes de son revenu et donc la fonction d'utilité indirecte devient une fonction croissante du revenu. On conclut que le bien-être est une fonction croissante du revenu des agents et que le bien-être social serait alors une fonction croissante de chaque revenu individuel. La FBES est donc ordinaire, continue et croissante dans les revenus. Elle doit aussi respecter la symétrie parmi les individus, c'est-à-dire un changement du revenu de l'un des agents ne doit pas changer la valeur de la fonction. Compte tenu du caractère ordinal de la fonction d'utilité, toute transformation croissante et continue peut alors se percevoir. En d'autres termes, travailler donc avec la transformation de la FBES donne les mêmes conclusions que la FBES elle-même.

Dans le cas de l'analyse fiscale proposée à partir du modèle différencié, le produit des fonctions d'utilité individuelles donne une FBES de type Nash. Une transformation par la fonction **Log** nous donnerait un caractère cardinal afin de comparer les différentes fonctions d'utilités agrégées du point de vue Parétien. Tous les agents de l'économie possèdent une fonction d'utilité de type Cobb-Douglas et cela justifie donc l'agrégation des fonctions d'utilité par la suite.

La fonction d'utilité agrégée pour l'ensemble des oligopoleurs de l'économie Cobb-Douglas est donnée par :

$$A(t^k) = \sum_{k=1}^{L-1} n(1-t^k) \left(1 - \frac{(n-1)\gamma}{n + \gamma(n-1)}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m} \frac{1}{n}\right)^\gamma \quad (3.27)$$

$$= \sum_{k=1}^{L-1} (1-t^k) \left(\frac{n^{2-\gamma}}{n + \gamma(n-1)}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2m}\right)^\gamma \quad (3.28)$$

$$A(t^k) = \left(\frac{1}{2m}\right)^\gamma \left(\frac{n^{2-\gamma}}{n + \gamma(n-1)}\right) \sum_{k=1}^{L-1} (1-t^k) \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}\right)^\gamma \quad (3.29)$$

De manière analogue, la fonction d'utilité agrégée de l'économie non taxée est :

$$A = \left(\frac{1}{2m}\right)^\gamma \left(\frac{n^{2-\gamma}}{n + \gamma(n-1)}\right) \sum_{k=1}^{L-1} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}\right)^\gamma \quad (3.30)$$

De même pour les **agents concurrentiels**, la fonction est donnée par :

$$B(t^k) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2m} \prod_{k=1}^{L-1} \left( \frac{(n-1)\gamma(1-t^k)}{[n + \gamma(n-1)]} \frac{n\alpha_{ik}}{\sum_{i'=1}^m \alpha_{i'k}} \right)^{\alpha_{ik}} \quad (3.31)$$

$$B(t^k) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^{L-1} (1-t^k)^{\alpha_{ik}} \left[ \frac{n\alpha_{ik}}{\sum_{i'=1}^m \alpha_{i'k}} \right]^{\alpha_{ik}} \left[ \frac{n(n-1)\gamma}{[n + \gamma(n-1)]} \right]^{\alpha_{ik}} \quad (3.32)$$

Pour l'économie non taxée :

$$B = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^{L-1} \left[ \frac{n\alpha_{ik}}{\sum_{i'=1}^m \alpha_{i'k}} \right]^{\alpha_{ik}} \left[ \frac{n(n-1)\gamma}{[n + \gamma(n-1)]} \right]^{\alpha_{ik}} \quad (3.33)$$

### Résultat 3.4 :

*Le bien-être de l'ensemble des agents, dans un cadre de taxation des dotations initiales, est Pareto-dominée, eu égard à la même économie où les dotations initiales ne sont pas taxées.*

Preuve :

Lorsqu'on agrège les fonctions d'utilité des *oligopoleurs* et en faisant l'hypothèse de symétrie dans les comportements, c'est-à-dire  $t^k = t^*$  et  $\alpha_{ik} = \bar{\alpha}_i$  pour tout  $k = 1, \dots, (L-1)$ ,

$$A = \left(\frac{1}{2m}\right)^\gamma \left(\frac{n^{2-\gamma}}{n + \gamma(n-1)}\right) \left(\sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i\right)^\gamma (L-1) \quad (3.34)$$

$$A(t^k) = \left(\frac{1}{2m}\right)^\gamma \left(\frac{n^{2-\gamma}}{n + \gamma(n-1)}\right) \left(\sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i\right)^\gamma (1-t^*)(L-1) \quad (3.35)$$

D'après les équations (3.34) et (3.35) alors le signe de  $A - A(t^k)$  dépend de  $\left[1 - (1-t^*)\right] = (L-1)t^* > 0$ . Donc

$$A > A(t^k) \quad (3.36)$$

De même, pour les *agents concurrentiels*, nous avons :

$$B = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \underbrace{\left[ \frac{n\bar{\alpha}_i}{\sum_{i'=1}^m \bar{\alpha}_{i'}} \right]^{\bar{\alpha}_i(L-1)} \left[ \frac{n(n-1)\gamma}{[n + \gamma(n-1)]} \right]^{\bar{\alpha}_i(L-1)}}_{\Omega_i} \quad (3.37)$$

$$B(t^k) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (1-t^*)^{\bar{\alpha}_i(L-1)} \Omega_i \quad (3.38)$$

Lorsque nous considérons les équations (3.37) et (3.38), le signe de  $B - B(t^k)$  dépend de  $\psi(\bar{\alpha}_i) = \left[1 - (1-t^*)^{\bar{\alpha}_i(L-1)}\right]$ . Comme  $\psi(\bar{\alpha}_i)$  représente une famille de fonctions croissantes pour  $t^* \in ]1; 0[$  (Confère figure 1).

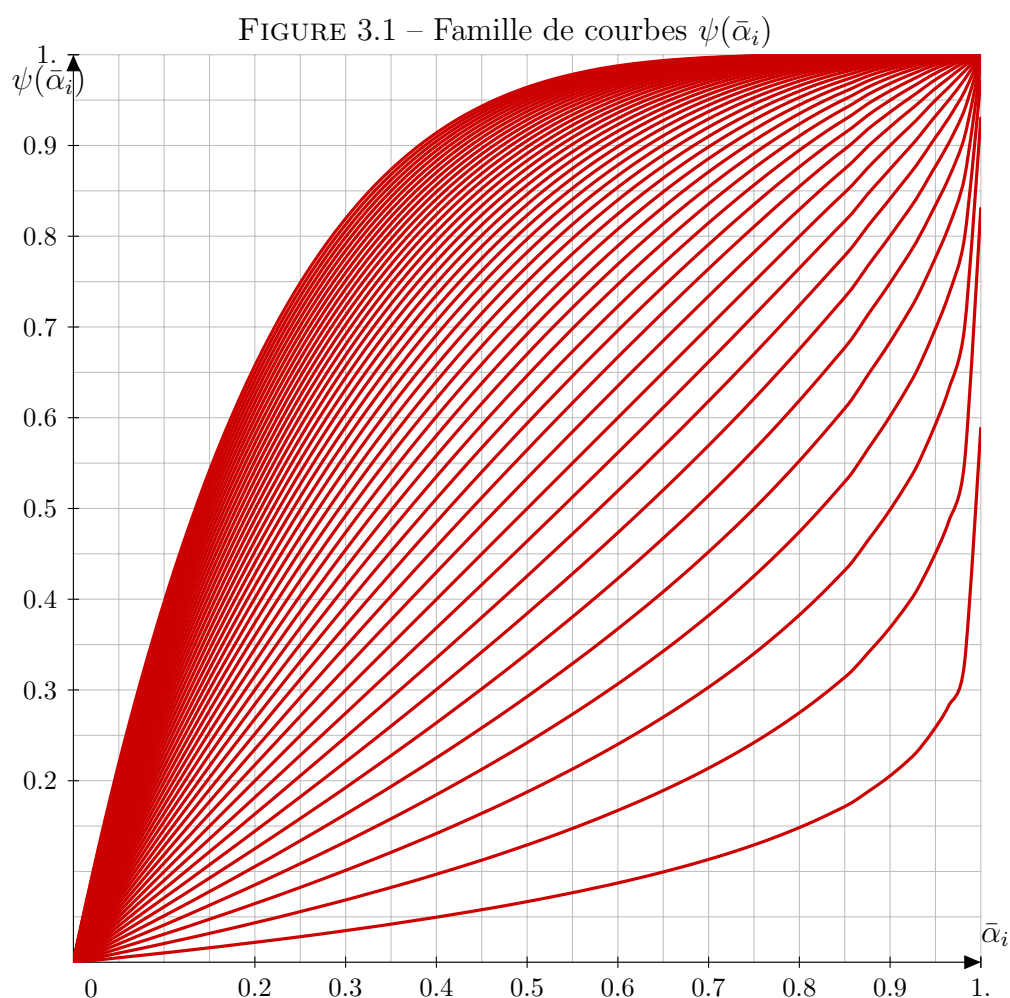
Nous avons donc :

$$B > B(t^k) \quad (3.39)$$

En considérant les équations (36) et (39), la FBES qui est  $T(t^k)$  est :

$$T(t^k) = A(t^k) + B(t^k) \leq A + B \quad (3.40)$$

Cqfd.



Nous concluons donc que la taxation des dotations initiales pour les oligopoleurs dans une économie Cobb-Douglas réduit globalement le bien-être des agents économiques. Cette réduction se constate aussi bien au niveau des oligopoleurs que des agents concurrentiels. La stratégie des oligopoleurs étant affectée par le niveau de taxe du décideur public, elle affecte aussi la demande des agents concurrentiels pour le bien différencié. Normalement, la redistribution du revenu perçu de la taxation devrait permettre de résorber la



perte subie par le surplus de l'agent concurrentiel. Cette redistribution pourrait se faire par des mesures sociales ou même des primes.

### Répartition de la taxation et détermination de la taxe optimale

Afin de déterminer la taxe optimale, nous maximisons l'utilité agrégée des agents oligopoleurs sous la contrainte de redistribution à un agent neutre (ici le décideur public) ne disposant pas de dotations initiales. Cet agent pourrait être l'Etat qui collecte les taxes pour la redistribution, par exemple, afin de corriger les distorsions dues à une situation de concurrence imparfaite.

Aussi, nous faisons l'hypothèse que cet agent qui va bénéficier du revenu de la taxe a deux spécificités. Premièrement, il a un niveau d'utilité donnée  $\bar{U}$  et deuxièmement, il a la même utilité que les autres agents concurrentiels.

#### **Résultat 3.5 :**

*La taxe optimale dans un modèle de différenciation à la Cournot-Walras avec taxation des dotations initiales en présence d'une fonction d'utilité de type Cobb-Douglas pour les agents stratégiques est  $t^* = \frac{n+\gamma(n-1)}{n(n-1)\gamma} {}^{(L-1)\bar{\alpha}_i}\sqrt[L]{\bar{U}}$  où  $\lim_{n \rightarrow \infty} t^* = 0$ .*

Preuve :

$$\begin{aligned} & \text{Max. } A(t^k) \\ \text{s.c. } & \prod_{k=1}^{L-1} \left( t^k \cdot n \cdot \tilde{e}_{\alpha k} \right)^{\alpha_{ik}} = \bar{U} \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.41)$$

Cela revient à :

$$\begin{aligned} & \text{Max. } \left( \frac{1}{2m} \right)^\gamma \left( \frac{n^{2-\gamma}}{n + \gamma(n-1)} \right) \sum_{k=1}^{L-1} (1 - t^k) \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right)^\gamma \\ \text{s.c. } & \prod_{k=1}^{L-1} \left( t^k \cdot n \cdot \tilde{e}_{\alpha k} \right)^{\alpha_{ik}} = \bar{U} \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.42)$$

En reprenant la contrainte et en considérant l'hypothèse de symétrie de comportement faite dans la sous-section précédente, nous avons  $t^k = t^*$  et  $\alpha_{ik} = \bar{\alpha}_i \forall k = 1, \dots, L-1$  :

$$\prod_{k=1}^{L-1} \left( t^k \cdot n \cdot \tilde{e}_{\alpha k} \right)^{\alpha_{ik}} = \bar{U} \implies \left( t^* \frac{n(n-1)\gamma}{n + \gamma(n-1)} \right)^{(L-1)\bar{\alpha}_i} = \bar{U} \quad (3.43)$$

$$\implies \left( t^* \right)^{(L-1)\bar{\alpha}_i} = \frac{n + \gamma(n-1)}{n(n-1)\gamma} \bar{U} \quad (3.44)$$

$$t^* = \frac{n + \gamma(n-1)}{n(n-1)\gamma} {}^{(L-1)\bar{\alpha}_i}\sqrt{\bar{U}} \quad (3.45)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t^* = 0 \quad (3.46)$$

Cqfd.

Quand le nombre d'oligopoleurs répliqués pour un bien différencié devient grand, on tend vers une situation concurrentielle et donc l'autorité publique n'a plus besoin de taxer. Cela justifie le fait que la taxation optimale est nulle.

Aussi, étant donné que  $\frac{\partial t^*}{\partial \gamma} = -\frac{1}{(n-1)\gamma^2}$ , alors la taxe optimale est une fonction décroissante du paramètre de préférence du bien concurrentiel.

**Résultat 3.6 :**

*A l'équilibre, la taxe optimale  $t^* = \frac{n + \gamma(n-1)}{n(n-1)\gamma} {}^{(L-1)\bar{\alpha}_i}\sqrt{\bar{U}}$  ne permet pas d'atteindre une allocation Pareto optimale.*

Preuve :

Les allocations des agents de notre économie se présentent comme suit :

(a) Pour les **oligopoleurs** :  $\forall k = 1, \dots, L-1$  et  $i = 1, \dots, n$

$$x_k^k = (1 - t^k - e_{\alpha k}) = \left(1 - \frac{n + \gamma(n-1)}{n(n-1)\gamma} {}^{(L-1)\bar{\alpha}_i}\sqrt{\bar{U}}\right) \left(1 - \frac{\gamma(n-1)}{[n + \gamma(n-1)]}\right) \quad (3.47)$$

$$x_k^L = p_k \cdot \tilde{e}_{\alpha k} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}}{2} \frac{1}{m} \frac{1}{n} \quad (3.48)$$

(b) Pour les **agents concurrentiels** :  $\forall i = 1, \dots, m$

$$x_i^h = \frac{\alpha_{ih}}{2} \frac{1}{m} \frac{1}{P_l h} = \frac{\alpha_{ih} n}{\left[\sum_{i=1}^m \alpha_{ih}\right]} \frac{\gamma \left(1 - \frac{n + \gamma(n-1)}{n(n-1)\gamma} {}^{(L-1)\bar{\alpha}_i}\sqrt{\bar{U}}\right) (n-1)}{n + \gamma(n-1)} \quad \forall h = 1, \dots, L-1 \quad (3.49)$$

$$x_i^L = \frac{1}{2} \frac{1}{m} \quad (3.50)$$

L'analyse des Taux Marginaux de Substitution (TMS) donne :

(a) Pour les **oligopoleurs** :  $\forall k = 1, \dots, L-1$  et  $\alpha = 1, \dots, n$

$$TMS_{k/L}^k = \frac{\gamma x_k^{k*}}{x_k^{L*}} \quad (3.51)$$

(b) Pour les **agents concurrentiels** :  $\forall i = 1, \dots, m$

$$TMS_{k/L}^i = \frac{\gamma \left(x_i^{k*}\right)^{2-\alpha_{ik}}}{\alpha_{ik} x_i^{L*}} \quad (3.52)$$

(c) **Agent neutre (Etat)** :  $i = m+1$

$$TMS_{k/L}^i = \frac{\gamma \left(nt^*\right)^{2-\alpha_{ik}}}{\alpha_{il} x_i^{L*}} \quad (3.53)$$

Ainsi,

$$TMS_{l/L}^i \neq TMS_{k/L}^k \quad (3.54)$$

Cqfd.

La non égalité des TMS confirme que la taxation ne nous donne pas un optimum de premier rang. L'optimum que nous obtenons est donc de second rang et est dû à la politique corrective de l'État.

### 3.1.4 Discussion avec la littérature

Dans le présent chapitre, nous cherchons à évaluer les politiques publiques qui peuvent découler d'un modèle d'oligopole différencié à la C-W. Les comportements stratégiques créent des distorsions dans l'économie (Ramsey (1927), Mirrlees (1971), Myles (1989), Guesnerie et Laffont (1978)) qui conduisent à des équilibres de second rang et détruisent le premier théorème de bien-être. Une manière de résorber ces distorsions dans un cadre d'équilibre général est de taxer les agents stratégiques. D'après la littérature, le type de taxation appliqué dépend des objectifs à atteindre. Nous pouvons soit taxer les dotations initiales (*unitaires*), soit les transactions (*ad valorem*). Le choix de l'une de ces méthodes de taxation conduit à des conclusions différentes dans la littérature et dépend de la nature de l'agent économique : soit producteur, consommateur ou autorité publique, liée à l'objectif à atteindre par chaque type d'agent.

Il ressort de nos analyses qu'une taxation des transactions conduit à une invariance des allocations des oligopoleurs, mais également à une augmentation du prix des biens différenciés, et donc, à une baisse des allocations des agents concurrentiels. En effet, dans nos différents modèles, les prix issus de la taxation sont des fonctions croissantes du niveau de taxe. Les allocations des consommateurs qui dépendent alors de ces prix vont donc diminuer. Compte tenu de leur richesse, les agents ne peuvent se procurer qu'une quantité faible du bien en question. Dans le cas d'une taxation des dotations initiales, comme premier résultat, il ressort que les prix et allocations des agents ne sont pas affectés quand il s'agit d'une fonction quasi-linéaire. Cette conclusion fait suite aux caractéristiques de la fonction quasi-linéaire qui produit des demandes indépendantes du niveau de revenu (**Théorème de**

**Coase**). Du point de vue de l'analyse du bien-être, une taxation des dotations initiales des agents stratégiques pour une fonction de type Cobb-Douglas détruit le bien-être des agents concurrentiels comparé au cas de non taxation, mais les revenus de l'agent neutre (état) augmentent. Nos résultats semblent en accord avec la littérature existante qui considère que les consommateurs ont une appétence pour une taxation *ad valorem* (Delipalla et Keen (1992), Keen (1998)). Il y a ainsi une détérioration de l'utilité des oligopoleurs et donc de l'économie entière. Ce résultat apparaît contraire à la littérature car les oligopoles préfèrent une taxation *unitaire*. Nous expliquons ce phénomène par le fait que dans notre modèle chaque agent ne consomme que le bien concurrentiel mais pas celui de son concurrent direct.

Enfin en recherchant la taxe optimale qui pourrait s'appliquer, la taxe obtenue dépend du paramètre de préférence du bien concurrentiel, du nombre d'oligopoleurs par bien différencié. Cette taxe est une fonction décroissante du paramètre de préférence du bien concurrentiel. Elle tend vers zéro quand le nombre d'agents oligopoleurs devient très grand. Un prolongement possible à cette recherche serait de s'intéresser au cas d'analyse proposé par Myles (1996). Il pourrait également être pertinent d'analyser une combinaison d'une taxe *ad valorem* et *unitaire*.

## 3.2 Une note sur la taxation en échange stratégique bilatéral

Cette section renvoie à un article co-écrit avec les professeurs Ludovic JULIEN et Louis de MESNARD et qui s'intitule « *A note on taxation in strategic bilateral exchange* » (Elegbede et al., 2017). Celui-ci examine les politiques fiscales dans un échange stratégique multilatéral. Il s'agit de généraliser les modèles de Gabszewicz et Grazzini (1998) et Grazzini (2006) dans un cadre de préférence CES (*Constant Elasticity of Substitution*) pour les agents économiques.

La note s'appuie le modèle stratégique multilatéral en échange pur proposé par Gabszewicz et Grazzini (2001). Gabszewicz et Grazzini (2001) considèrent une économie d'échange avec deux biens et donc deux types d'agents économiques qui sont dotés de

l'un des deux biens et un agent neutre sans aucune dotation. Les agents de l'économie se comportent stratégiquement durant les échanges tandis que l'agent neutre ne participe en aucun cas à l'échange. Les auteurs s'intéressent à trois types de politiques fiscales : la première politique de taxation consiste à taxer les transactions, la deuxième à taxer les dotations initiales et la troisième à taxer les dotations initiales suivi d'une subvention accordée aux *traders*. Avec des préférences Cobb-Douglas pour les *traders*, les auteurs montrent que les deux premières politiques fiscales avec transferts conduisent à un équilibre de second rang, tandis que la dernière politique conduit à un optimum de Pareto. La principale raison est que sans transfert entre les agents, de telles politiques ne sont pas assez puissantes pour neutraliser le pouvoir de marché dû à la stratégie des agents. Cette section se consacre à vérifier sous quelles conditions ce résultat dépasse les limites des préférences Cobb-Douglas des agents. Cela nous a conduit à considérer un modèle d'oligopole bilatéral où les préférences des agents stratégiques et celui de l'agent neutre sont des fonctions d'utilité de type CES. Il s'agit d'une approche avec fonctions d'utilité CES mise en œuvre par Bloch et Ferrer (2001a) afin de déterminer si les offres des *traders* sont des compléments ou des substituts. Cet article s'est concentré sur l'efficacité et les implications de bien-être des politiques fiscales en échange stratégique multilatéral. Le cadre d'analyse pour étudier le comportement stratégique des *traders* est le modèle d'oligopole bilatéral qui est initié par Gabszewicz et Michel (1997) et exploré par Bloch et Ghosal (1997), Dickson et Hartley (2008) et Amir et Bloch (2009). Le modèle présenté est une version des modèles de JSM finis à deux biens où la concurrence des *traders* est en quantités (Amir et al., 1990; Sahi et Yao, 1989; Shapley et Shubik, 1977). Selon l'approche d'oligopole bilatéral, chaque *trader* a des dotations en coin<sup>4</sup> mais veut consommer l'ensemble des deux biens de l'économie. Ce modèle génère un jeu non-coopératif de marché dans lequel les *traders* sont les joueurs, les stratégies sont les offres et les gains sont les fonctions d'utilité atteintes par les agents à l'équilibre. L'équilibre Cournot-Nash représente le revenu du marché.

Le modèle considère comme dans Gabszewicz et Grazzini (2001) deux types de taxes et schémas de transfert. Le premier type de politique fiscale consiste à lever une taxe uniforme sur les transactions. Il s'agit d'une taxe *ad valorem* ou d'une taxe par unité

---

4. Il s'agit de dotations initiales pour un seul bien, les autres étant nulles.

vendue (taxe unitaire) sur les stratégies (Grazzini, 2006). Le second type de taxe consiste à lever une taxe uniforme sur les dotations. Dans tous les cas de figure, le produit issu de la taxe est transféré à un agent neutre sous la contrainte qu'il atteigne un niveau d'utilité fixé.

La présentation du document est la suivante. Une première sous-section est consacrée à la description du modèle utilisé. Dans une deuxième sous-section, il est calculé les équilibres stratégiques sous influence de la taxation. La sous-section 3 est dédiée à la question d'optimalité où il est vérifié sous quelles conditions les politiques conduisent à un optimum social. La sous-section 4 compare les trois types de taxation et enfin la dernière sous-section présente les grandes conclusions de cette recherche.

### 3.2.1 Le modèle

#### L'économie d'échange

Considérons une économie d'échange  $\mathcal{E}$  avec deux biens  $X$  et  $Y$ , dont les prix sont respectivement  $p_x$  et  $p_y$ . Nous supposons que le bien  $Y$  est le numéraire, ainsi  $p_Y = 1$ . L'économie englobe  $n + 1$  agents dont  $n$  *traders* qui ont des dotations en coin et un dernier agent économique qui a la propriété d'être neutre (nommé  $n + 1$ ) et qui est sans dotation initiale et qui ne participe pas à l'échange. Les  $n$  *traders* sont répartis équitablement en deux types pour chaque type de bien, soit  $\frac{n}{2}$  *traders* possédant chaque type de bien.

La fonction d'utilité de tous les agents de l'économie est de type CES avec des parts de consommation *unitaire* :

$$u_i(x_i, y_i) = ((x_i)^\rho + (y_i)^\rho)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \rho \leq 1, \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (3.55)$$

Où le paramètre  $\rho \equiv \frac{\sigma - 1}{\sigma}$ , avec  $\sigma$  l'élasticité de substitution entre les biens  $X$  et  $Y$ . Pour rappel, lorsque  $\rho \rightarrow -\infty$ , les biens sont complémentaires, tandis que lorsque  $0 < \rho \leq 1$ , les biens sont des substituts. Lorsque  $\rho = 0$ , cela correspond au cas de l'économie d'échange étudiée par Gabszewicz et Grazzini (2001) avec des préférences Cobb-Douglas.

Les dotations initiales des agents économiques sont :

$$\begin{aligned}\omega_i &= (1, 0), \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \\ \omega_i &= (0, 1), \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \\ \omega_{n+1} &= (0, 0)\end{aligned}\tag{3.56}$$

L'économie d'échange  $\mathcal{E}$  possède un équilibre concurrentiel intérieur lorsque  $\rho < 1$  et donné par  $\frac{p_X}{p_Y} = 1$  avec  $(x_i^*, y_i^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et  $(x_{n+1}^*, y_{n+1}^*) = (0, 0)$ . Lorsque  $\rho = 1$ , nous retrouvons un continuum d'équilibre concurrentiel. À l'optimum, puisqu'il n'y a plus de distorsion de marché, la politique fiscale n'est donc plus nécessaire et l'agent neutre atteint une allocation nulle.

### Le jeu de marché sans taxation

À l'économie d'échange présenté ci-dessus est associé un jeu de marché  $\Gamma$  qui englobe l'ensemble des *traders*. Le jeu de marché proposé est un jeu simultané en quantités sous information complète avec des dotations en coin à l'instar du modèle de dans Gabszewicz et Michel (1997). Les stratégies des agents sont données par :

$$S_i = \{(q_i, b_i) \in \mathbb{R}_+^2 : q_i \leq 1, b_i = 0\}, i = 1, \dots, \frac{n}{2}\tag{3.57}$$

$$S_i = \{(q_i, b_i) \in \mathbb{R}_+^2 : q_i = 0, b_i \leq 1\}, i = 1, \dots, \frac{n}{2}\tag{3.58}$$

Où  $q_i$  et  $b_i$  représentent les stratégies pures du *trader*  $i$ . Considérant un n-uplet de stratégies  $(\mathbf{q}; \mathbf{b}) \in S_1 \times \dots \times S_n$ , le prix de marché  $p_X$  est issu du mécanisme de prix qui ressemble au mécanisme de Sahi et Yao (1989)<sup>5</sup> :  $\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k = p_X \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k$ . Ainsi, le prix du bien  $X$  est :

$$p_X(\mathbf{q}; \mathbf{b}) = \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}\tag{3.59}$$

---

5. La différence réside dans les dotations initiales dans Sahi et Yao (1989) où les agents ont les dotations pour tous les biens.



Les allocations finales des agents sont :

$$(x_i, y_i) = \left(1 - q_i, \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} q_i\right), \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.60)$$

$$(x_i, y_i) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} b_i, 1 - b_i\right), \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.61)$$

Les gains du jeu  $\Gamma$  sont :

$$\pi_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}, \mathbf{b}) = \left((1 - q_i)^\rho + \left(\frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} q_i\right)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.62)$$

$$\pi_i(\mathbf{q}, b_i, \mathbf{b}^{-i}) = \left(\left(\frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} b_i\right)^\rho + (1 - b_i)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.63)$$

L'équilibre Cournot-Nash est un équilibre stratégique donné par un n-uplet de stratégies  $(\tilde{\mathbf{q}}; \tilde{\mathbf{b}}) = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{\frac{n}{2}}, \tilde{b}_{\frac{n}{2}+1}, \dots, \tilde{b}_n)$  avec  $(\tilde{\mathbf{q}}; \tilde{\mathbf{b}}) \in S_1 \times \dots \times S_n$ , tel qu'aucun *trader* n'a intérêt à dévier unilatéralement de son choix.

Afin d'obtenir l'équilibre Cournot-Nash (ECN par la suite), on maximise les équations (3.62) et (3.63) sous les contraintes respectives de  $q_i$  et  $b_i$ . Ainsi, les CPO donnent  $\frac{\partial \pi_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}, \mathbf{b})}{\partial q_i} = 0$  et  $\frac{\partial \pi_i(\mathbf{q}, b_i, \mathbf{b}^{-i})}{\partial b_i} = 0$ .

**Proposition 3.1 :**

*L'unique équilibre Cournot-Nash symétrique du jeu  $\Gamma$  est donné par le profil de stratégies :*

$$(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}}, \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}} \right) \quad (3.64)$$

*Preuve :*

Le profil de stratégie  $(\tilde{\mathbf{q}}; \tilde{\mathbf{b}})$  est solution de :

$$\begin{aligned} \operatorname{argmax}_{q_i} \pi_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}, \mathbf{b}) &= \left( (1 - q_i)^\rho + \left( \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} q_i \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \\ \operatorname{argmax}_{b_i} \pi_i(\mathbf{q}, b_i, \mathbf{b}^{-i}) &= \left( \left( \frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} b_i \right)^\rho + (1 - b_i)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \end{aligned}$$

Les CPO sont données par :

$$A \left[ - (1 - q_i)^{\rho-1} + \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k \right)^2} \left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k - q_i \right) \left( \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} q_i \right)^{\rho-1} \right] = 0 \quad (3.65)$$

$$B \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\left( \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k \right)^2} \left( \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k - b_i \right) \left( \frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\left( \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k \right)^2} \right)^{\rho-1} - (1 - b_i)^{\rho-1} \right] = 0 \quad (3.66)$$

Où  $A \equiv ((1 - q_i)^\rho + (p_X q_i)^\rho)^{\frac{1-\rho}{\rho}} > 0$  et  $B \equiv ((\frac{1}{p_X} b_i)^\rho + (1 - b_i)^\rho)^{\frac{1-\rho}{\rho}} > 0$ . A l'équilibre général symétrique (un comportement similaire du même côté du marché),  $\tilde{q}_i = \tilde{q}$ ,  $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$  et  $\tilde{b}_i = \tilde{b}$ ,  $i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$  et  $\tilde{q} = \tilde{b}$ . Alors les équations (3.65) et (3.66) donnent :

$$-(1 - \tilde{q}_i)^{\rho-1} + \frac{n-2}{n}(\tilde{q}_i)^{\rho-1} = 0, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.67)$$

$$\frac{n-2}{n}(\tilde{b}_i)^{\rho-1} - (1 - \tilde{b}_i)^{\rho-1} = 0, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.68)$$

D'où l'équation (3.64). Lorsque  $\rho = 0$ , dans le cas de l'économie Cobb-Douglas  $(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left(\frac{n-2}{2(n-1)}, \frac{n-2}{2(n-1)}\right)$  (Gabszewicz et Grazzini, 2001). Lorsque  $\rho = 1$ , c'est-à-dire  $\sigma \rightarrow \infty$ , les biens sont de parfaits substituts et cela s'apparente au cadre d'analyse de Cordella et Gabszewicz (1998) où les préférences des agents sont linéaires. L'ensemble des équilibres stratégiques du jeu  $\Gamma$  contient l'équilibre autarcique qui peut être « *nice* » et/ou un n-uplet d'équilibres concurrentiels où les *traders* offrent l'ensemble de leur dotations pour l'échange (Voir Chapitre 1, section 2.5.1). Lorsque  $\rho \rightarrow -\infty$ , c'est-à-dire  $\sigma \rightarrow 0$ , les biens sont complémentaires et le seul équilibre stratégique est  $(\tilde{q}, \tilde{b}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Il ressort lorsque  $\rho \in (-\infty, 1]$ , les équilibres Cournot-Nash sont inefficaces du point de vue du bien-être. . IL en résulte que des mesures correctives doivent être mises en œuvre, ce qui nous conduit à aborder le modèle d'oligopole bilatéral avec taxation

### Le jeu de marché avec taxation

Cette section présente les trois mesures fiscales avec des transferts en faveur d'un agent neutre. Les mesures fiscales sont successivement, la taxation *ad valorem*, la taxation *unitaire* et la taxation des dotations initiales (Gabszewicz et Grazzini, 2001; Grazzini, 2006).

#### Taxation *ad valorem*

Il est considéré dans un premier temps une taxe *ad valorem* uniforme  $t \in [0, 1]$  qui est prélevée sur les offres des biens  $X$  et  $Y$  par l'autorité publique représentée par l'agent neutre. Après les échanges, le produit total de la taxe  $t \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k + t \sum_{\frac{n}{2}+1}^n b_k$  est transféré à l'agent neutre  $n+1$ . Étant donné les stratégies  $(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \in S_1 \times \dots \times S_n$  et la taxe uniforme  $t \in [0, 1]$ , le prix de marché  $p_X$  devient :

$$p_X = \frac{(1 - t \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}+1} b_k)}{(1 - t) \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} \quad (3.69)$$

Les allocations post-taxation sont :

$$(x_i, y_i) = (1 - q_i, p_X(1 - t)q_i), \forall i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.70)$$

$$(x_i, y_i) = (\frac{1}{p_X}(1 - t)b_i, 1 - b_i), \forall i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.71)$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (t \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k, t \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k) \quad (3.72)$$

Les gains du jeu avec une taxation *ad valorem* sont :

$$\pi_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}, \mathbf{b}; t) = \left( (1 - q_i)^\rho + \left( \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} (1 - t)q_i \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.73)$$

$$\pi_i(\mathbf{q}, b_i, \mathbf{b}^{-i}; t) = \left( \left( \frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} (1 - t)b_i \right)^\rho + (1 - b_i)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.74)$$

### Taxation *unitaire*

Lorsqu'on considère une taxation *unitaire*, l'agent neutre lève une taxe uniforme  $\tau \in (0, 1)$  sur les offres des biens  $X$  et  $Y$ . Le montant total de taxe transféré à l'agent neutre après les échanges est :  $\tau \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k + \tau \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k$ . Contrairement au cas de la taxation *ad valorem*, le prix du marché reste inchangé et égal à l'équation (59). Étant donné les stratégies  $(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \in S_1 \times \dots \times S_n$  et la taxe uniforme  $\tau \in (0, 1)$

Les allocations post-taxation sont :

$$(x_i, y_i) = (1 - q_i, (p_X - \tau)q_i), \forall i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.75)$$

$$(x_i, y_i) = \left( \left( \frac{1}{p_X} - \tau \right) b_i, 1 - b_i \right), \forall i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.76)$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left( \tau \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k, \tau \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k \right) \quad (3.77)$$

Les gains du jeu avec une taxation *unitaire* sont :

$$\pi_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}, \mathbf{b}; \tau) = \left( (1 - q_i)^\rho + \left( \left( \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} - \tau \right) q_i \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.78)$$

$$\pi_i(\mathbf{q}, b_i, \mathbf{b}^{-i}; \tau) = \left( \left( \left( \frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} - \tau \right) b_i \right)^\rho + (1 - b_i)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.79)$$

### Taxation des dotations initiales

En considérant également une taxe uniforme  $\nu \in (0, 1)$  sur les offres des biens  $X$  et  $Y$ , le montant total de taxe transféré à l'agent neutre après les échanges s'élève à :  $\nu \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k + \nu \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k$ . Dans ce cas-ci, l'ensemble des stratégies des agents est modifié et devient :

$$S_i = \{(q_i, b_i) \in \mathbb{R}_+^2 : q_i \leq 1 - \nu, b_i = 0\}, i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.80)$$

$$S_i = \{(q_i, b_i) \in \mathbb{R}_+^2 : q_i = 0, b_i \leq 1 - \nu\}, i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.81)$$

Le prix de marché  $p_X$  reste inchangé comme dans le cas précédent et les gains du jeu  $\Gamma$  avec dotations initiales peuvent être écrits de la manière suivante :

$$\pi_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}, \mathbf{b}; \nu) = \left( (1 - \nu - q_i)^\rho + \left( \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} q_i \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.82)$$

$$\pi_i(\mathbf{q}, b_i, \mathbf{b}^{-i}; \nu) = \left( \left( \frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} b_i \right)^\rho + (1 - \nu - b_i)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.83)$$

### 3.2.2 Equilibre stratégique avec taxation

Il s'agit de déterminer les équilibres stratégiques du jeu  $\Gamma$  pour chaque mécanisme de taxation et d'apprécier la variation de ces équilibres suite à une variation d'une unité de taxe.

**Proposition 3.2 :**

*Les ECN intérieurs du jeu  $\Gamma$  avec une taxation ad valorem, une taxation unitaire, et une taxation des dotations initiales sont respectivement données par les profils de stratégies :*

$$(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{1-t} \right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \left( \frac{n}{n-2} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}}, \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{1-t} \right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \left( \frac{n}{n-2} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}} \right) \quad (3.84)$$

$$(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left( \frac{1}{1 + (1-\tau) \left[ \frac{2}{(1-\tau)n-2} \right]^{\frac{1}{1-\rho}}}, \frac{1}{1 + (1-\tau) \left[ \frac{2}{(1-\tau)n-2} \right]^{\frac{1}{1-\rho}}} \right) \quad (3.85)$$

$$(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left( \frac{1-\nu}{1 + \left( \frac{n}{n-2} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}}, \frac{1-\nu}{1 + \left( \frac{n}{n-2} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}} \right) \quad (3.86)$$

*Preuve :*

Pour déterminer ces équilibres, il s'agit d'optimiser les gains du jeu  $\Gamma$ . Ainsi les triplet d'équations (3.73), (3.78), (3.82) et (3.74), (3.79), (3.83) peuvent par convenance se réécrire respectivement par les équations (3.87) et (3.88) ci-dessous :

$$\pi_i = \left( (1 - \nu - q_i)^\rho + \left( \left( \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} - \tau \right) (1 - t) q_i \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.87)$$

$$\pi_i = \left( \left( \left( \frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} - \tau \right) (1 - t) b_i \right)^\rho + (1 - \nu - b_i)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.88)$$

Les CPO par rapport à  $q_i$  pour  $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$  et par rapport à  $b_i$  pour  $i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$  donnent respectivement :

$$A \left\{ - (1 - \nu - q_i)^{\rho-1} + (1 - t) \left[ p_X \frac{\left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k - q_i \right)}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} - \tau \right] \left[ (p_X - \tau)(1 - t) q_i \right]^{\rho-1} \right\} = 0 \quad (3.89)$$

$$B \left\{ (1 - t) \left[ \frac{1}{p_X} \frac{\left( \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k - b_i \right)}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} - \tau \right] \left[ \left( \frac{1}{p_X} - \tau \right) (1 - t) b_i \right]^{\rho-1} - (1 - \nu - b_i)^{\rho-1} \right\} = 0 \quad (3.90)$$

Où  $A$  et  $B$  sont tels que  $A \equiv ((1 - \nu - q_i)^\rho + ((p_X - \tau)(1 - t) q_i)^\rho)^{\frac{1-\rho}{\rho}} > 0$  et  $B \equiv (((\frac{1}{p_X} - \tau)(1 - t) b_i)^\rho + (1 - \nu - b_i)^\rho)^{\frac{1-\rho}{\rho}} > 0$ . À l'équilibre général symétrique,  $\tilde{q}_i = \tilde{q}$ ,  $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$  et  $\tilde{b}_i = \tilde{b}$ ,  $i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$  et  $\tilde{q} = \tilde{b}$ . Alors les CPO peuvent être réécrites :

$$-(1 - \nu - \tilde{q})^{\rho-1} + \left( \frac{n-2}{n} - \tau \right) (1 - t)^\rho [(1 - \tau) \tilde{q}]^{\rho-1} = 0, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.91)$$

$$\left( \frac{n-2}{n} - \tau \right) (1 - t)^\rho [(1 - \tau) \tilde{b}]^{\rho-1} - (1 - \nu - \tilde{b})^{\rho-1} = 0, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.92)$$

Alors les stratégies d'équilibre sont :

$$\tilde{q} = \tilde{b} = \frac{1 - \nu}{1 + (1 - \tau) \left( \frac{1}{1-t} \right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \left( \frac{n}{(1-\tau)n-2} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}} \quad (3.93)$$

Ainsi lorsque  $\tau = \nu = 0$ , il s'agit de la taxation *ad valorem* et l'équation (3.84) est atteinte; quand  $t = \nu = 0$  la taxation est *unitaire* et l'équation (3.85) est atteinte; enfin quand  $\tau = t = 0$  nous sommes dans le cas de taxation des dotations initiales et l'équation (3.86) est atteinte.

Quand  $\rho = 0$  avec  $\tau = \nu = 0$ , cela correspond à la taxation *ad valorem* avec des préférences Cobb-Douglas pour les oligopoleurs. Ainsi l'unique équilibre intérieur est donné par :  $(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left( \frac{n-2}{2(n-1)}, \frac{n-2}{2(n-1)} \right)$  (Gabszewicz et Grazzini, 2001). Dans le cas d'une taxation *unitaire* pour des préférences Cobb-Douglas pour les agents c'est-à-dire  $\rho = 0$  avec  $t = \nu = 0$ , l'unique point intérieur est :  $(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left( \frac{(1-\tau)n-2}{2[(1-\tau)n-1]}, \frac{(1-\tau)n-2}{2[(1-\tau)n-1]} \right)$ . Enfin, une taxation des dotations initiales donnent pour les mêmes préférences Cobb-Douglas, c'est-à-dire  $\rho = 0$  avec  $\tau = t = 0$ ;  $(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left( \frac{(1-\nu)(n-2)}{2(n-1)}, \frac{(1-\nu)(n-2)}{2(n-1)} \right)$  (Gabszewicz et Grazzini, 2001).

Il est important d'analyser la propriété de ces équilibres intérieurs par rapport à la taxe.

### Propriété des équilibres

#### **Proposition 3.3 :**

*Supposant  $\rho < 1$ , les offres stratégiques sont croissantes avec une taxe ad valorem ou une taxe unitaire quand l'élasticité de substitution est plus faible que l'unité c'est-à-dire quand  $\sigma \in [0, 1)$ .*



*Preuve :*

**La taxe *ad valorem* :**  $t \in (0, 1)$

Considérons la stratégie optimale  $\tilde{q}_i = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}}$  pour tout  $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$ ,

la variation de  $\tilde{q}_i$  par rapport à  $t$  est :

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} = - \left[ \frac{\rho}{1-\rho} \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \right] / \left[ 1 + \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \right]^2 \quad (3.94)$$

Le signe de l'équation (94) dépend de  $-\frac{\rho}{1-\rho}$ . Et comme  $\rho = \frac{\sigma-1}{\sigma}$  alors le signe de  $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t}$  dépend du signe de  $-(\sigma-1)$ . Ainsi,

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \text{ quand } \sigma \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 1 \quad (3.95)$$

L'analyse reste similaire pour  $\tilde{b}_i$ ,  $i \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$

**La taxe *unitaire* :**

Considérons la taxe uniforme par unité  $\tau \in (0, 1)$ . De l'équilibre stratégique

$$\tilde{q}_i = \frac{1}{1 + (1-\tau) \left[ \frac{2}{(1-\tau)n-2} \right]^{\frac{1}{1-\rho}}}, \text{ il ressort :}$$

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tau} = \left\{ \left[ \frac{n}{(1-\tau)n-2} \right]^{\frac{1}{1-\rho}} - \frac{1-\tau}{1-\rho} \left( \frac{n}{(1-\tau)n-2} \right)^2 \left[ \frac{n}{(1-\tau)n-2} \right]^{\frac{1}{1-\rho}-1} \right\} (\tilde{q}_i)^2 \quad (3.96)$$

$$= \left[ \frac{n}{(1-\tau)n-2} \right]^{\frac{1}{1-\rho}} \left[ 1 - \frac{1-\tau}{1-\rho} \frac{n}{(1-\tau)n-2} \right] (\tilde{q}_i)^2 \quad (3.97)$$

Le signe de  $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tau}$  dépend du signe de  $\left[ 1 - \frac{1-\tau}{1-\rho} \frac{n}{(1-\tau)n-2} \right]$ . Ainsi,

$$1 - \frac{1-\tau}{1-\rho} \frac{n}{(1-\tau)n-2} \geq 0 \iff 1-\rho \geq \frac{(1-\tau)n}{(1-\tau)n-2} \quad (3.98)$$

$$\iff \frac{1}{\sigma} \geq \frac{(1-\tau)n}{(1-\tau)n-2} \quad (3.99)$$

Car  $\rho = \frac{\sigma - 1}{\sigma}$  et donc  $1 - \rho = \frac{1}{\sigma}$ .

Alors :

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tau} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \text{ quand } \sigma \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 1 - \frac{2}{(1 - \tau)n} \quad (3.100)$$

Avec  $\left[1 - \frac{2}{(1 - \tau)n}\right] \in [0, 1)$ . La même analyse peut être mise en oeuvre pour  $\tilde{b}_i$ ,  $i \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$ .

Considérant une taxe *ad valorem* et un *trader* de type 1, quand la taxe augmente, la consommation en bien  $Y$  baisse. Lorsque les biens sont des compléments (substituts), la consommation en bien  $X$  baisse (augmente), alors l'offre augmente (baisse). Mais pour une taxe *unitaire*, les quantités de bien qui représentent les stratégies des agents peuvent baisser pour une large gamme de valeurs de l'élasticité de substitution. Finalement, les offres sont toujours décroissantes dans le cadre d'une taxation des dotations initiales car :

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \nu} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}} < 0$$

Les résultats précédents soulignent que les offres peuvent croître avec la taxe pour une gamme de valeur du paramètre  $\rho$  et donc pour l'élasticité de substitution  $\sigma$  entre les biens  $X$  et  $Y$ , avec les taux marginaux de substitution égaux car ces taxes restituent les équilibres de premier rang. Cela produit le résultat suivant.

**Proposition 3.4 :**

*Considérant une taxe ad valorem et en supposant que l'équilibre stratégique est intérieur. Lorsque les taux marginaux de substitution ne varient pas entre les traders, alors l'élasticité de substitution est telle que  $\sigma \in [0, 1)$  c'est-à-dire ,  $\rho < 0$ .*

*Preuve :*

Considérons le  $TMS_{X/Y}^i = -\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{\partial u_i / \partial x_i}{\partial u_i / \partial y_i}$ . Pour les stratégies optimales sous une taxation *ad valorem* (équation 84),

$$TMS_{X/Y}^i = \frac{n-2}{n}(1-t)^\rho, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.101)$$

$$TMS_{X/Y}^i = \frac{n}{n-2} \left( \frac{1}{1-t} \right)^\rho, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.102)$$

Ainsi, l'égalité des TMS implique  $\frac{n-2}{n}(1-t)^\rho = \frac{n}{n-2} \left( \frac{1}{1-t} \right)^\rho$ . Alors  $\left( \frac{n-2}{n} \right)^2 (1-t)^{2\rho} = 1$  et donc :

$$\rho = \frac{\ln\left(\frac{n}{n-2}\right)}{\ln(1-t)} \quad (3.103)$$

$\rho < 0$  car comme  $t \in (0, 1)$ , alors  $(1-t) < 1$  et  $\ln(1-t) < 0$ . Aussi  $n > n-2$  donc  $\frac{n}{n-2} > 1$ . Cqfd.

$\rho < 0$  et  $\sigma \in [0, 1)$ . Il ressort donc que les TMS des agents coïncident lorsque les biens sont complémentaires. La *proposition 3.4* n'est valable que dans le cadre de la taxation *ad valorem* car lorsqu'on prend en compte les deux autres politiques fiscales, il ressort que :

### Taxation unitaire

$$TMS_{X/Y}^i = (1-\tau) - \frac{2}{n}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2}$$

$$TMS_{X/Y}^i = \frac{n}{(1-\tau)n-2}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$$

### Taxation des dotations initiales

$$TMS_{X/Y}^i = \frac{n-2}{n}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2}$$

$$TMS_{X/Y}^i = \frac{n}{n-2}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$$

L'hypothèse de complémentarité n'est pas nécessaire dans ces deux précédents cas de taxation car, les TMS ne dépendent plus de l'élasticité de substitution ou parfois même de la taxe. Lorsque les courbes d'indifférence sont linéaires (parfaite substituabilité) c'est-à-dire quand :  $\sigma \rightarrow +\infty$  ou  $\rho \rightarrow 1^-$ , nous avons l'égalité des TMS et du prix ( $\tilde{p} = 1$ ) et donc les *traders* font face au même prix. En outre, les gains du jeu avec la taxation *ad valorem*, la taxation *unitaire* et la taxation des dotations initiales sont :

$$\tilde{\pi}_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{b}}; t) = \frac{\left\{ (1-t)^\rho + \left[ \left( \frac{1}{1-t} \right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \left( \frac{n}{n-2} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \right]^\rho \right\}^{\frac{1}{\rho}}}{1 + \left( \frac{1}{1-t} \right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \left( \frac{n}{n-2} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.104)$$

$$\tilde{\pi}_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{b}}; \tau) = \frac{(1-\tau) \left\{ 1 + \left[ \frac{n}{(1-\tau)n-2} \right]^{\frac{\rho}{1-\rho}} \right\}^{\frac{1}{\rho}}}{1 + (1-\tau) \left[ \frac{n}{(1-\tau)n-2} \right]^{\frac{1}{1-\rho}}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.105)$$

$$\tilde{\pi}_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{b}}; \nu) = 2^{\frac{1}{\rho}} \frac{1-\nu}{1 + \left( \frac{n}{n-2} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.106)$$

A présent, l'optimalité du jeu  $\Gamma$  est analysé.

### 3.2.3 L'optimalité

Il est important de savoir si les politiques fiscales suscitées conduisent à un optimum social, c'est-à-dire si elles éliminent les distorsions du marché dues aux comportements imparfaits des *traders*. Toute allocation Pareto optimale qui résout :

max.  $n\tilde{\pi}_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{b}})$  s.c.  $\left( (h_2^n \tilde{q})^\rho + (h_2^n \tilde{b})^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} = \bar{u}_{n+1}$ ,  $h = t, \tau, \nu$ , ne parvient pas à une taxe égalisant les TSM des agents avec  $\rho \in [0, 1)$ . Les propositions (3.3) et (3.4) mettent en lumière le rôle joué par l'élasticité de substitution. La proposition suivante se rapporte à l'optimalité sous la taxation avec l'hypothèse de complémentarité dans la consommation.

**Proposition 3.5 :**

*Supposons qu'une taxe uniforme soit levée sur les dotations initiales et sur les transactions (soit une taxe ad valorem, soit une taxe unitaire). Étant donné le niveau d'utilité  $\bar{u}_{n+1}$  pour l'agent neutre  $n+1$ , si l'élasticité de substitution entre les deux biens  $X$  et  $Y$  est nulle, alors, il existe une taxe ad valorem  $\tilde{t}$ , unitaire  $\tilde{\tau}$ , et des taxes sur les dotations initiales  $\tilde{v}_h$  et  $\tilde{v}_\ell$  telles que lorsque le produit de la taxe est transféré à l'agent neutre, (i) l'ensemble des allocations résultant de ces transferts et des ECN du jeu  $\Gamma$  sont des bien-être optimaux, et (ii) l'utilité de l'agent neutre est  $\bar{u}_{n+1}$ .*

*Preuve :*

Il s'agit du cadre d'analyse d'une fonction d'utilité de type Leontief pour les oligopoles ( $\sigma = 0$ ). La fonction d'utilité s'écrit :  $u_i(x_i, y_i) = \min\{x_i, y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n+1$

### **Taxation *ad valorem***

Le problème de tout *trader* est :

$$\max_{\tilde{q}_i \in S_i} \min \left\{ 1 - q_i, \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} (1-t)q_i \right\}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.107)$$

$$\max_{\tilde{b}_i \in S_i} \min \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} (1-t)b_i, 1 - b_i \right\}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.108)$$

L'unique point intérieur est tel que :

$$1 - q_i = \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} (1-t)q_i$$

A l'EGS,  $1 - \tilde{q} = (1-t)\tilde{q}$  car  $\frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} = 1$  et  $q_i = \tilde{q} = b_i = \tilde{b}$ ,  $\forall i = 1, \dots, \frac{n}{2}$

Ainsi,  $\tilde{q} = \frac{1}{2-t}$ .

Ainsi, l'unique équilibre symétrique intérieur est donné par le profil de stratégies :

$$(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left( \frac{1}{2-t}, \frac{1}{2-t} \right), \forall i = 1, \dots, n$$

Le prix du marché est  $\tilde{p} = 1$ . Les gains correspondants sont :

$$\tilde{\pi}_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{b}}, t) = \min \left\{ \frac{1-t}{2-t}, \frac{1-t}{2-t} \right\}, \forall i = 1, \dots, n$$

Toute allocation Pareto optimale est solution de :

$$\begin{cases} \max_{\{\tilde{t}\}} & \frac{n}{2} \frac{1-t}{2-t} + \frac{n}{2} \frac{1-t}{2-t} \\ \text{s.c.} & \min \left\{ \frac{n}{2} t \frac{1}{2-t}, \frac{n}{2} t \frac{1}{2-t} \right\} = \bar{u}_{n+1} \end{cases}$$

Ainsi la taxe optimale *ad valorem* est telle que  $\frac{n}{2} t \frac{1}{2-t} = \bar{u}_{n+1}$  et est donnée par :

$$\tilde{t} = \frac{4\bar{u}_{n+1}}{n + 2\bar{u}_{n+1}} \quad (3.109)$$

Les allocations des *traders* et de l'agent neutre post-taxe sont :

$$\begin{cases} (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) &= \left( \frac{n - 2\bar{u}_{n+1}}{2n}, \frac{n - 2\bar{u}_{n+1}}{2n} \right), \text{ avec } \frac{n - 2\bar{u}_{n+1}}{2n} < \frac{n}{2}, i = 1, \dots, n \\ (\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) &= (\bar{u}_{n+1}, \bar{u}_{n+1}) \end{cases} \quad (3.110)$$

Le taux marginal de substitution n'est pas défini lorsque  $\tilde{x}_i = \tilde{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Néanmoins comme les biens sont des compléments parfaits, l'ensemble des allocations Pareto optimales sont localisées sur la diagonale principale de la boîte d'Edgeworth. Ainsi, puisque  $\frac{\tilde{y}_i}{\tilde{x}_i} = 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , les allocations concurrentielles qui résultent de l'interactions uniquement entre *traders* correspondent à l'équilibre intérieur stratégique de jeu  $\Gamma$ . De plus puisque  $\frac{\tilde{y}_{n+1}}{\tilde{x}_{n+1}} = 1$ , le total des transferts obtenus par l'agent  $n + 1$  est tel que l'ensemble des allocations soient Pareto optimales. Lorsque  $\bar{u}_{n+1} \rightarrow 0$ , les allocations stratégiques convergent vers celles qui sont concurrentielles car  $\frac{n - 2\bar{u}_{n+1}}{2n} = \frac{n \left[ 1 - \frac{\bar{u}_{n+1}}{n} \right]}{2n}$  et donc  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ .

**La taxe *unitaire***

Dans le cas présent, le problème de chaque *trader* est le suivant :

$$\max_{\tilde{q}_i \in S_i} \min \left\{ 1 - q_i, \left( \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} - \tau \right) q_i \right\}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.111)$$

$$\max_{\tilde{b}_i \in S_i} \min \left\{ \left( \frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} - \tau \right) b_i, 1 - b_i \right\}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.112)$$

Comme dans le cas précédent, l'unique point intérieur est :

$$(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left( \frac{1}{2 - \tau}, \frac{1}{2 - \tau} \right), \forall i = 1, \dots, n$$

Le prix du marché est  $\tilde{p} = 1$  et les allocations finales sont :

$$(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \left( \frac{1 - t}{2 - t}, \frac{1 - t}{2 - t} \right), \forall i = 1, \dots, n$$

Les gains correspondants sont :

$$\tilde{\pi}_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tau) = \min \left\{ \frac{1 - t}{2 - t}, \frac{1 - t}{2 - t} \right\}, \forall i = 1, \dots, n$$

La taxe optimale est alors :

$$\tilde{\tau} = \frac{4\bar{u}_{n+1}}{n + 2\bar{u}_{n+1}} \quad (3.113)$$

Ainsi,  $\tilde{\tau} = \tilde{t}$ . Cela conduit aux mêmes post-allocations que dans le cas de la taxation *ad valorem*.

**Taxation des dotations initiales**

Le programme à résoudre par tout *trader* est :

$$\max_{\tilde{q}_i \in S_i} \min \left\{ 1 - \nu - q_i, \frac{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k} q_i \right\}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (3.114)$$

$$\max_{\tilde{b}_i \in S_i} \min \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q_k}{\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n b_k} b_i, 1 - \nu - b_i \right\}, \quad i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \quad (3.115)$$

L'unique point intérieur est :

$$(\tilde{q}, \tilde{b}) = \left( \frac{1-\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2} \right), \forall i = 1, \dots, n$$

Le prix du marché est  $\tilde{p} = 1$  et les gains finaux sont :

$$\tilde{\pi}_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tau) = \min \left\{ \frac{1-\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2} \right\}, \forall i = 1, \dots, n$$

Toute allocation Pareto optimale est solution de :

$$\begin{cases} \max_{\{\tilde{\nu}\}} & \frac{n}{2} \frac{1-\nu}{2} + \frac{n}{2} \frac{1-\nu}{2} \\ \text{s.c.} & \min \left\{ \frac{n}{2} \nu \frac{1-\nu}{2}, \frac{n}{2} \nu \frac{1-\nu}{2} \right\} = \bar{u}_{n+1} \end{cases}$$

Déterminer  $\tilde{\nu}$  conduit à une équation du second degré en  $\nu$ . Nous résolvons donc,  $\frac{n}{2} \nu \frac{1-\nu}{2} = \bar{u}_{n+1}$ . La taxe  $\tilde{\nu}$  est solution de l'équation :  $\nu^2 - \nu + \frac{4\bar{u}_{n+1}}{n} = 0$ . Ainsi, les taxes optimales  $\tilde{\nu}_h$  et  $\tilde{\nu}_\ell$  sont :

$$\tilde{\nu}_{h,\ell} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}} \text{ avec } n \geq 16 \bar{u}_{n+1} \quad (3.116)$$

Alors les allocations post-taxation des *traders* correspondant respectivement aux taxes optimales  $\tilde{\nu}_h$  et  $\tilde{\nu}_\ell$  sont :



$$(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}} \right), \forall i = 1, \dots, n$$

$$(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}} \right), \forall i = 1, \dots, n$$

et l'allocation post-taxation de l'agent neutre est :

$$(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) = (\bar{u}_{n+1}, \bar{u}_{n+1})$$

Lorsque les biens sont des compléments, l'effet total de la taxe sur les allocations est motivé par l'effet revenu, quel que soit le mécanisme de taxation car l'effet de substitution est nul. Cela s'explique d'une part par le fait que les proportions sont fixes dans le cas des fonction d'utilité Leontieff et d'autre part par le fait qu'une variation des prix est sans effet sur les allocations finales. Le pouvoir de marché des *traders*, qui ont pour objectif de manipuler le prix du marché, exerce un effet d'échelle sur la consommation<sup>6</sup>. Cela explique notamment, avec le comportement symétrique, la coïncidence des allocations post-taxation entre la taxation *ad valorem* et *unitaire* quand  $\rho \rightarrow -\infty$ .

Nous retrouvons deux équilibres pour le mécanisme de taxation des dotations initiales. Les allocations correspondent à des équilibres stratégiques intérieurs et les transferts obtenus par l'agent neutre sont tels que les allocations qui émanent appartiennent à la diagonale de la boîte d'Edgeworth. Néanmoins, seule l'allocation

$\left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}} \right)$  converge vers l'allocation concurrentielle  $\left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  lorsque  $\bar{u}_{n+1} = 0, \forall i = 1, \dots, n$ .

### 3.2.4 Une comparaison entre les mécanismes de taxation

Cette sous-section compare les trois mesures fiscales quand les préférences des agents sont représentées par les fonctions d'utilité Cobb-Douglas et Leontieff. Une première partie compare les trois types de taxes et une seconde partie est consacrée à la comparaison des fonctions de bien-être agrégées.

---

6. Pour tout *trader*, le ratio de consommation  $\frac{y_i}{x_i}$  est constant le long des consommations optimales.

### Comparaison des taxes optimales

Cette comparaison s'effectue à trois niveaux : lorsque les préférences des agents sont de type Cobb-Douglas, ensuite lorsqu'il s'agit des fonctions d'utilité Leontieff et enfin une dernière partie est consacrée à la confrontation entre les différentes taxes avec les deux types de fonctions d'utilité.

#### *Préférences Cobb-Douglas pour les agents*

Lorsque les préférences des agents sont Cobb-Douglas, la détermination des taxes *ad valorem* et sur les dotations initiales se déduisent des deux programmes ci-dessous :

##### **Pour la taxe *ad valorem***

Toute allocation Pareto-optimale issue de la taxation *ad valorem* et fournissant à l'agent neutre un niveau d'utilité  $\bar{u}_{n+1}$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \max_{\{\tilde{t}\}} & \sum_{i=1}^n \pi_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{b}}) \\ \text{s.c.} & \left(\frac{n}{2}\tilde{t}\frac{(n-2)}{2(n-1)}\right)\left(\frac{n}{2}\tilde{t}\frac{(n-2)}{2(n-1)}\right) = \bar{u}_{n+1} \end{cases}$$

En considérant la contrainte, il ressort :  $\left(\frac{n}{2}\tilde{t}\frac{(n-2)}{2(n-1)}\right) = \sqrt{\bar{u}_{n+1}}$ , donc

$$\tilde{t} = \frac{4(n-1)\sqrt{\bar{u}_{n+1}}}{n(n-2)} \quad (3.117)$$

##### **Pour la taxe sur les dotations initiales**

Toute allocation Pareto-optimale issue de la taxation des dotations initiales et fournissant à l'agent neutre un niveau d'utilité  $\bar{u}_{n+1}$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \max_{\{\tilde{\nu}\}} & \sum_{i=1}^n \pi_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{b}}) \\ \text{s.c.} & \left(\frac{n}{2}\tilde{\nu}\right)\left(\frac{n}{2}\tilde{\nu}\right) = \bar{u}_{n+1} \end{cases}$$

de la même manière,

$$\tilde{\nu} = \frac{2\sqrt{\bar{u}_{n+1}}}{n} \quad (3.118)$$

Les deux programmes précédents peuvent être consultés dans Gabszewicz et Grazzini (2001). Pour la taxation *unitaire* la démarche reste la même.

### Pour la taxe *unitaire*

Toute allocation Pareto-optimale issue de la taxation *unitaire* et fournissant à l'agent neutre un niveau d'utilité  $\bar{u}_{n+1}$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \max_{\{\tilde{\tau}\}} & \sum_{i=1}^n \pi_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{b}}) \\ \text{s.c.} & \left( \frac{n}{2} \tau \frac{(1-\tau)n-2}{2[(1-\tau)n-1]} \right) \left( \frac{n}{2} \tau \frac{(1-\tau)n-2}{2[(1-\tau)n-1]} \right) = \bar{u}_{n+1} \end{cases}$$

De  $\frac{n}{2} \tau \frac{(1-\tau)n-2}{2[(1-\tau)n-1]} = \sqrt{\bar{u}_{n+1}}$ , nous obtenons un polynôme du second degré en  $\tau$ . Ainsi, les racines du polynôme sont :

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_h &= \frac{n-2+4\sqrt{\bar{u}_{n+1}}+\sqrt{\Delta}}{2n} \\ \tilde{\tau}_\ell &= \frac{n-2+4\sqrt{\bar{u}_{n+1}}-\sqrt{\Delta}}{2n} \end{cases} \quad (3.119)$$

$$\text{où } \Delta \equiv (n-2+4\sqrt{\bar{u}_{n+1}})^2 - 16\sqrt{\bar{u}_{n+1}}(n-1)$$

Des équations (3.117), (3.118) et (3.119) et de quelques calculs<sup>7</sup>, nous avons :  $\tilde{\tau}_h > \tilde{\mathbf{t}} > \tilde{\tau}_\ell > \tilde{\nu}$ . Pour prouver ce résultat, il suffit de montrer respectivement que :  $\tilde{\tau}_\ell - \tilde{\nu} > 0$ ,  $\tilde{\mathbf{t}} - \tilde{\tau}_\ell > 0$  et enfin  $\tilde{\tau}_h - \tilde{\mathbf{t}} > 0$ .

Il ressort que la taxe *unitaire* supérieure  $\tilde{\tau}_h$  est la plus grande des taxes dans un oligopole bilatéral avec des préférences Cobb-Douglas pour les agents économiques. Cela se justifie par le fait qu'une taxe *unitaire* renforce les distorsions dues au pouvoir de marché dans une compétition imparfaite. Les oligopoleurs préfèrent la taxe *unitaire* à la taxe *ad valorem* car les prix issus de cette taxe sont plus élevés. Ainsi, l'offre des oligopoleurs est donc plus faible sous ce type de politique fiscale que celle *ad valorem*. Ce résultat corrobore les travaux de Grazzini (2006) pour un modèle de production dans un environnement asymétrique. Ces arguments exposés justifient ainsi à *contrario* la préférence des consommateurs pour la taxe *ad valorem*.

7. Les signes ont été vérifiés à l'aide du logiciel Maple.

**Fonctions d'utilité Leontieff pour les agents**

Lorsque les préférences des agents économiques sont représentées par des fonctions d'utilité Leontieff, les taxes sont calculées à la sous-section (2.3) et sont :

$$\tilde{\tau} = \tilde{t} = \frac{4\bar{u}_{n+1}}{n + 2\bar{u}_{n+1}}, \quad \tilde{\nu}_h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{16}{n}\bar{u}_{n+1}} \text{ et } \tilde{\nu}_\ell = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{16}{n}\bar{u}_{n+1}}.$$

Afin de déterminer l'ordre des inégalités entre les quatre types de taxes, il faut déterminer le signe de  $\tilde{\nu}_\ell - \tilde{t}$  puisque  $\tilde{\tau} = \tilde{t}$  :

$$\tilde{\nu}_\ell - \tilde{t} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(n + 2\bar{u}_{n+1})(1 - \sqrt{1 - \frac{16}{n}\bar{u}_{n+1}})}{n + 2\bar{u}_{n+1}} \right] \quad (3.120)$$

Le signe dépend donc de :  $1 - \sqrt{1 - \frac{16}{n}\bar{u}_{n+1}}$  qui est positif. Alors, nous avons  $\tilde{\nu}_h > \tilde{\nu}_\ell > \tilde{\tau} = \tilde{t}$ .

La taxe supérieure sur les dotations initiales est la plus grande taxe lorsqu'on considère des fonctions d'utilité Leontieff pour les agents économiques. L'explication est que l'offre de tout trader sous la taxation *ad valorem* est plus faible que sous la taxation des dotations initiales. Cela se traduit dans cette étude par :  $\frac{1-\nu}{2} < \frac{1}{2-t}$ . En plus, la taxation des dotations initiales doit être plus grande pour atteindre le niveau d'utilité  $\bar{u}_{n+1}$ . Ce résultat fait écho aux travaux de Suits et Musgrave (1953) et Bishop (1968) Il s'agit dans ce cas présent d'une analyse dans un cadre symétrique sans une partie concurrentielle du marché. Aussi, notons que les taxes *unitaire* et *ad valorem* sont équivalentes.

**Fonctions d'utilité Cobb-Douglas VS Leontieff**

Finalement, supposons que les mêmes niveaux d'utilité,  $\bar{u}_{n+1}$ , sont atteints pour des préférences Cobb-Douglas et Leontieff. La comparaison concerne les deux plus grandes taxes  $\tilde{\nu}_h^L$  et  $\tilde{\tau}_h^C$  et les deux plus petites  $\tilde{\tau}^L = \tilde{t}^L$  et  $\nu^C$  sous les économies Cobb-Douglas et Leontieff<sup>8</sup>. Il en résulte que :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{16}{n}\bar{u}_{n+1}} > \frac{n - 2 + 4\sqrt{\bar{u}_{n+1}} + \sqrt{\Delta}}{2n} > \frac{2\sqrt{\bar{u}_{n+1}}}{n} > \frac{4\bar{u}_{n+1}}{n + 2\bar{u}_{n+1}} \quad (3.121)$$

8. Les indices C et L sont respectivement pour les fonctions d'utilités Cobb-Douglas et Leontieff

Et donc :  $\tilde{\nu}_h^L > \tilde{\tau}_h^C > \nu^C > \tilde{\tau}^L = \tilde{t}^L$ .

La taxe sur les dotations initiales, qui est la plus faible des taxes avec les préférences Cobb-Douglas, est plus grande que les plus faibles taxes sous les fonctions d'utilité Leontieff (taxes *unitaire* et *ad valorem*). La plus grande des taxes est celle des dotations initiales avec les fonctions d'utilité Leontieff.

Lorsqu'on considère une taxation des dotations initiales, l'offre des *traders* avec des préférences Leontieff est  $\frac{1-\nu}{2}$  et l'offre sous les préférences Cobb-Douglas sont :  $\frac{(1-\nu)(n-2)}{2(n-1)}$ . Remarquons que  $\frac{1-\nu}{2} > \frac{(1-\nu)(n-2)}{2(n-1)}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-\nu)(n-2)}{2(n-1)} = \frac{1-\nu}{2}$ . Avec les préférences Leontieff, puisque les prix sont neutralisés, le cadre d'analyse se comporte comme en concurrence pure et parfaite. La taxe correspondant au bien-être optimal de premier rang est plus grande que celle de second rang. Cette dernière n'élimine pas les distorsions causées par le comportements stratégiques.

### Bien-être

A présent, considérons le bien-être agrégé des *traders*. Appelons  $W$  une mesure de bien-être, avec  $W = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \pi_i + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \pi_i$ . Considérons par  $W^{av}$ ,  $W^u$ ,  $W^e$  le bien-être agrégé correspondant respectivement aux taxations *ad valorem*, *unitaire* et des dotations initiales.

### Cas des préférences Cobb-Douglas

Supposons que les préférences des agents sont représentées par les fonctions d'utilité Cobb-Douglas. Les fonctions de bien-être agrégé correspondant à chaque mécanisme de taxation sont :

$$\tilde{W}^{av} = n \frac{n(n-2) - 4(n-1)\sqrt{\tilde{u}_{n+1}}}{4(n-1)^2}, \quad \text{si } \tilde{t} = \frac{4(n-1)\sqrt{\tilde{u}_{n+1}}}{n(n-2)} \quad (3.122)$$

$$\tilde{W}^u = \begin{cases} \frac{(n+2-4\sqrt{\bar{u}_{n+1}}-\sqrt{\Delta})^2(n-2-4\sqrt{\bar{u}_{n+1}}-\sqrt{\Delta})}{(n-4\sqrt{\bar{u}_{n+1}}-\sqrt{\Delta})^2} & \text{si } \tilde{\tau}_h = \frac{n-2+4\sqrt{\bar{u}_{n+1}}+\sqrt{\Delta}}{2n} \\ \frac{(n+2-4\sqrt{\bar{u}_{n+1}}+\sqrt{\Delta})^2(n-2-4\sqrt{\bar{u}_{n+1}}+\sqrt{\Delta})}{(n-4\sqrt{\bar{u}_{n+1}}+\sqrt{\Delta})^2} & \text{si } \tilde{\tau}_\ell = \frac{n-2+4\sqrt{\bar{u}_{n+1}}-\sqrt{\Delta}}{2n} \end{cases} \quad (3.123)$$

$$\tilde{W}^e = \frac{(n-2)(n-2\sqrt{\bar{u}_{n+1}})^2}{4(n-1)^2}, \quad \text{si } \tilde{\nu} = \frac{2\sqrt{\bar{u}_{n+1}}}{n} \quad (3.124)$$

où  $\Delta \equiv (n-2+4\sqrt{\bar{u}_{n+1}})^2 - 16\sqrt{\bar{u}_{n+1}}(n-1)$ . Il est question de comparer ces fonctions de bien-être social. Il en ressort que :

$$\tilde{W}^{av} < \tilde{W}^e < \tilde{W}^u \quad (3.125)$$

Afin d'expliquer l'équation (3.125), nous avons eu recours aux indices de Lerner<sup>9</sup> qui sont définis par  $L_i := \frac{p_X - MRS_{X/Y}^i}{p_X}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$  avec  $MRS_{X/Y}^i = \frac{\tilde{y}_i}{\tilde{x}_i}$  et par  $L_i := \frac{\frac{1}{p_X} - MRS_{Y/X}^i}{1/p_X}$ ,  $\forall i \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$  avec  $MRS_{Y/X}^i = \frac{\tilde{x}_i}{\tilde{y}_i}$ .

Comme le problème est symétrique on ne traite ici que le cas  $i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$ . Aussi,  $L_i := \frac{p_X - MRS_{X/Y}^i}{p_X} = 1 - \frac{MRS_{X/Y}^i}{p_X} = 1 - MRS_{X/Y}^i$  car  $p_X = 1$ . Déterminons à présent les indices de Lerner pour chacune des dotations.

### Taxation des dotations initiales

$$\left\| \begin{array}{l} \tilde{x}_i = 1 - \nu - \tilde{q} \\ \tilde{y}_i = \tilde{q} \\ \tilde{\nu} = \frac{2\sqrt{\bar{u}_{n+1}}}{n} \\ \tilde{q} = \frac{(1-\nu)(n-2)}{2(n-1)} \end{array} \right.$$

9. L'indice de Lerner est un indice qui mesure le degré de monopole, c'est-à-dire du pouvoir de marché d'une firme ou d'une branche. En CPP, l'indice est égal à zéro.

Ainsi,

$$\begin{aligned} MRS_{X/Y} &= \frac{\tilde{q}}{1 - \nu - \tilde{q}} \\ &= \frac{n-2}{n} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$L_i(\tilde{\nu}) = 1 - \frac{n-2}{n} = \frac{2}{n} \quad (3.126)$$

### **Taxation *ad valorem***

De la même manière :

$$\left\| \begin{aligned} \tilde{x}_i &= (1 - \tilde{q}) \\ \tilde{y}_i &= (1 - t)\tilde{q} \\ \tilde{t} &= \frac{4(n-1)\sqrt{\bar{u}_{n+1}}}{n(n-2)} \\ \tilde{q} &= \frac{n-2}{2(n-1)} \end{aligned} \right.$$

$$MRS_{X/Y} = \frac{n(n-2) - 4(n-1)\sqrt{\bar{u}_{n+1}}}{n^2}$$

Par conséquent,

$$L_i(\tilde{t}) = 1 - MRS = \frac{2}{n} + \frac{4(n-1)\sqrt{\bar{u}_{n+1}}}{n^2} \quad (3.127)$$

### **Taxation *unitaire***

$$\left\| \begin{aligned} \tilde{x}_i &= (1 - \tilde{q}) \\ \tilde{y}_i &= (1 - \tau)\tilde{q} \\ \tilde{\tau}_h &= \frac{n-2 + 4\sqrt{\bar{u}_{n+1}} + \sqrt{\Delta}}{2n} \\ \tilde{\tau}_\ell &= \frac{n-2 + 4\sqrt{\bar{u}_{n+1}} - \sqrt{\Delta}}{2n} \\ \tilde{q} &= \frac{(1 - \tau)n - 2}{2[(1 - \tau)n - 1]} \end{aligned} \right.$$

De façon analogue, pour  $\tilde{\tau}_h$ ,

$$MRS_{X/Y} = \frac{n-2 - 4\sqrt{\bar{u}_{n+1}} - \sqrt{\Delta}}{2n}$$

Par conséquent,

$$L_i(\tilde{\tau}_h) = 1 - MRS = \frac{n + 2 + 4\sqrt{\bar{u}_{n+1}} + \sqrt{\Delta}}{2n} \quad (3.128)$$

$$L_i(\tilde{\tau}_\ell) = 1 - MRS = \frac{n + 2 + 4\sqrt{\bar{u}_{n+1}} - \sqrt{\Delta}}{2n} \quad (3.129)$$

D'après les équations (3.126), (3.127), (3.128) et (3.129), il ressort que :

$$L_i(\tilde{\nu}) < L_i(\tilde{t}) < L_i(\tilde{\tau}_h), L_i(\tilde{\tau}_\ell) \quad (3.130)$$

D'après les équations (3.125) et (3.130), il ressort que le bien-être agrégé et le pouvoir de marché sont les plus élevés sous une taxation *unitaire*. Néanmoins, le bien-être agrégé (pouvoir de marché) sous une taxe *ad valorem* est plus faible (plus élevé) que le bien-être agrégé (pouvoir de marché) sous une taxation des dotations initiales. Pour une possible explication, considérons un individu  $i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$ , son  $TMS(\tilde{t}) = \frac{n(n-2) - 4(n-1)\sqrt{\bar{u}_{n+1}}}{n^2} = \frac{n-2}{n} - \frac{4(n-1)\sqrt{\bar{u}_{n+1}}}{n^2} < TMS(\tilde{\nu}) = \frac{n-2}{n}$ . Aussi comme  $\tilde{t} > \tilde{\nu}$  (classement des taxes sous les préférences Cobb-Douglas), la consommation en bien Y est plus faible sous une taxation *ad valorem* que sous une taxation des dotation initiales. Le TMS est donc plus faible et, par ricochet, l'indice de Lerner.

La domination du bien-être de la taxation *unitaire* sur celle *ad valorem* corrobore les résultats des travaux de Grazzini (2006) dans un cadre d'analyse asymétrique où un côté du marché dispose des producteurs/consommateurs stratégiques, tandis qu'un autre côté du marché comprend uniquement des consommateurs *price-takers*. La différence entre cette approche et l'approche symétrique proposée tient du fait que le bien-être agrégé qui dépendait dans son cadre d'analyse de la taille relative du marché (du nombre d'oligopoleurs lié au nombre d'agents concurrentiels), dépend à présent de la taille absolue du marché (du nombre de *traders* stratégiques appartenant à chaque côté du marché).



**Cas des fonctions d'utilité Leontieff**

De la même manière que dans le cas précédent, le bien-être associé à chaque type de mécanisme de taxe est :

$$\tilde{W}^{av} = \frac{n - 2\bar{u}_{n+1}}{2}, \quad \text{si } \tilde{t} = \frac{4\bar{u}_{n+1}}{n + 2\bar{u}_{n+1}} \quad (3.131)$$

$$\tilde{W}^u = \frac{n - 2\bar{u}_{n+1}}{2}, \quad \text{si } \tilde{\tau} = \frac{4\bar{u}_{n+1}}{n + 2\bar{u}_{n+1}} \quad (3.132)$$

$$\tilde{W}^e = \begin{cases} \frac{n}{4} + \frac{n}{4} \sqrt{1 - \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}} & \text{si } \tilde{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}} \\ \frac{n}{4} - \frac{n}{4} \sqrt{1 - \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}} & \text{si } \tilde{\nu} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}} \end{cases} \quad (3.133)$$

Il ressort que  $\tilde{W}^{av} = \tilde{W}^u > \tilde{W}^e$  car :

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{av} - \tilde{W}^e &= \frac{n}{4} \sqrt{\left(1 - \frac{4}{n} \bar{u}_{n+1}\right)^2} - \frac{n}{4} \sqrt{\left(1 - \frac{16}{n} \bar{u}_{n+1}\right)} \\ &= \frac{n}{4} \sqrt{\left(1 - \frac{4}{n} \bar{u}_{n+1}\right)^2} - \frac{n}{4} \sqrt{\left(1 - \frac{8}{n} \bar{u}_{n+1}\right)^2 - \left(\frac{8}{n} \bar{u}_{n+1}\right)^2} > 0 \end{aligned}$$

Puisque le TMS des *traders* de notre économie n'est pas défini ( $\tilde{x}_i = \tilde{y}_i$ ) alors  $L_i(\tilde{t}) = L_i(\tilde{\nu}) = L_i(\tilde{\tau}_h) = L_i(\tilde{\tau}_\ell)$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Notons que plus la taxe est élevée, plus faible est le bien-être agrégé. Ce résultat provient du fait qu'avec les fonctions d'utilité Leontieff, l'efficacité du comportement imparfait ne tient plus. En effet, le comportement stratégique des *traders* n'a pas d'impact sur les prix, bien que ce comportement soit stratégique.

Les résultats précédents permettent d'étendre les propriétés des modèles de JSM où les préférences des *traders* sont représentées soit par des fonctions d'utilité Cobb-Douglas (Gabszewicz et Grazzini, 2001) soit par des fonctions linéaires (Gabszewicz et Grazzini, 1999).

En conclusion, nous pouvons dire que les distorsions dues aux interactions stratégiques peuvent être affaiblies en taxant les transactions ou les dotations initiales et en redistribuant le produit issu de cette taxation à un agent neutre (l'Etat par exemple) pour atteindre un niveau de revenu de marché plus efficace. Ce revenu est un optimum de premier rang si les biens sont des compléments. Lorsque les préférences des agents sont de type Cobb-Douglas, il en résulte une multiplicité de taxes *unitaire*. De façon analogue, lorsque les fonctions sont de type Leontieff, il en ressort une multiplicité de taxes sur les dotations initiales. Nous pouvons donc conclure que l'efficacité des politiques fiscales en termes de bien-être dépend du type de préférences pour les agents.

## CHAPITRE 4

---

### Modélisation avec un continuum d'agents

---

#### Contenu

---

|            |                                          |            |
|------------|------------------------------------------|------------|
| <b>3.1</b> | <b>Les politiques fiscales . . . . .</b> | <b>108</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Une note . . . . .</b>                | <b>128</b> |

---

Ce chapitre détermine l'équilibre Cournot-Walras sur un modèle différencié dans une structure d'économie mixte en équilibre général avec un continuum d'agents. L'économie considère, d'un côté, un continuum de *traders* sans atomes et de l'autre côté des *traders* atomiques. L'objectif est donc d'apprécier le comportement de ces « *petits* » agents vis-à-vis des « *grands* ». Dans le cadre d'analyse proposé, le comportement de la partie concurrentielle du modèle de différenciation dans les chapitres 2 et 3 est endogénéisé c'est-à-dire que les « *petits* » agents disposent à présent de pouvoir de marché sur un continuum.

## 4.1 Introduction

L'approche adoptée dans ce travail s'inspire de Okuno et al. (1980) qui proposent pour la première fois une analyse avec un continuum d'agents en équilibre général non coopératif avec une structure mixte. Il s'agit d'un modèle -à la Cournot-Nash- d'échanges non-coopératifs dont une partie des agents est regroupée en atomes (syndicats) et l'autre en une partie non atomique. Des analyses similaires ont été proposées plus tôt dans un cadre coopératif par des auteurs tels que Aumann (1964), Gabszewicz et Mertens (1971) et Shitovitz (1973) . Le but de leurs analyses était d'identifier les allocations Pareto optimales. Dans une économie d'échange avec un continuum de *traders*, Aumann (1964) qui est le premier à travailler sur la question, prouve que le noyau coïncide avec l'ensemble des allocations compétitives dans une économie sans atomes (théorème d'équivalence). Gabszewicz et Mertens (1971) étendent ce théorème en mettant une contrainte sur la taille des atomes. Ils prouvent que les agents atomiques peuvent être petits mais suffisamment grands pour influencer le prix. Shitovitz (1973), toujours dans l'optique d'étendre le théorème d'équivalence d'Aumann (1964), prouve qu'un marché de duopole où les duopolistes sont de même type<sup>1</sup> est parfaitement concurrentiel ; c'est-à-dire que son noyau coïncide avec l'ensemble des allocations concurrentielles.

Le principal apport d'Okuno et al. (1980) est d'expliquer comment chaque comportement compétitif parfait ou imparfait peut émerger de manière endogène dans ce genre de modèles. Ils supposent donc que tous les agents disposent d'un pouvoir de marché et en retour obtiennent des comportements qui peuvent être concurrentiels ou stratégiques.

---

1. Mêmes dotations initiales et mêmes fonctions d'utilité

N'étant pas satisfait du théorème B de Shitovitz (1973), les auteurs remplacent le concept de noyau présent dans les analyses précédentes par le concept d'équilibre de Nash d'un modèle d'échange non-coopératif. Ils utilisent le modèle non-coopératif dans la lignée des modèles de type Lloyd Shapley et Martin Shubik (voir le chapitre 1) largement développé par Busetto et al. (2011), Codognato et Ghosal (2000) et Sahi et Yao (1989) respectivement dans des économies d'échange avec une structure mixte, dans des économies non atomique avec un continuum de *traders* et dans des économies finies. Il s'agit ainsi d'un modèle d'échange mixte bilatéral où les agents possèdent tous les biens. À l'équilibre, lorsque l'économie possède deux atomes de même type et en formulant une demande pour les deux biens, Okuno et al. (1980) prouvent que les équilibres Cournot-Nash et Walrasienne ne coïncident pas. De la même manière dans une analyse non-coopérative, Codognato et Gabszewicz (1993) à travers le concept d'équilibre Cournot-Walras<sup>2</sup> analyse le comportement stratégique des oligopoleurs face aux « *petits* » agents « *price-takers* » dans un modèle à la Aumann (1964). Les auteurs démontrent que lorsque l'économie comporte un continuum d'oligopoleurs, ces derniers ne peuvent exploiter les « *petits* » agents. Le pouvoir de marché des oligopoleurs reste ainsi noyé dans le continuum.

La principale question posée dans ce chapitre est de savoir si que le comportement des agents concurrentiels émerge de manière endogène dans le cadre du modèle de différenciation proposé au chapitre 2. Pour répondre à cette question, nous utilisons le modèle d'oligopole bilatéral introduit par Gabszewicz et Michel (1997) et analysé par la suite par Dickson et Hartley (2008), Bloch et Ferrer (2001b) et Bloch et Ghosal (1997) entre autres. Il s'agit d'un modèle où nous supposons que les *traders* ont des dotations en coin.

Ce chapitre propose une ouverture vers des recherches futures et est présenté en deux parties. Après une succincte présentation du cadre général qui s'inspire de Codognato et al. (2015), des applications au modèle de différenciation des produits sont proposées. Les applications considèrent les deux économies présentes au chapitre 2 : une économie Cobb-Douglas et l'autre quasi-linéaire/Cobb-Douglas. Il ressort que le comportement concurrentiel émerge de manière endogène. Ce qui renforce ainsi l'utilisation d'un côté du marché se comportant de manière concurrentielle.

---

2. développé par Gabszewicz et Vial (1972) pour une économie avec production

## 4.2 Le modèle

Dans cette section, les hypothèses du modèle qui s'inspire de Codognato et al. (2015) sont présentées, de même que quelques définitions.

### 4.2.1 L'économie et les hypothèses

Considérons une économie d'échange pur avec de gros agents représentés par des atomes et de petits agents représentés par une partie non atomique. L'espace des agents économiques est mesuré par  $(T, \mathcal{T}, \mu)$  avec  $T$  l'ensemble des traders,  $\mathcal{T}$  la  $\sigma$ -algèbre<sup>3</sup> de tous les sous-ensembles  $\mu$ -mesurable de  $T$  et  $\mu$  est la mesure de comptage<sup>4</sup> non-négative additivement associée à  $\mathcal{T}$ . Nous supposons  $(T, \mathcal{T}, \mu)$  fini, c'est-à-dire  $\mu(T) < \infty$ . Cela implique que l'espace mesuré  $(T, \mathcal{T}, \mu)$  contient de manière comptable un grand nombre d'atomes. Désignons par  $T_2$  la partie non atomique de  $T$ <sup>5</sup>. L'ensemble des atomes est donc l'ensemble  $T_1 = T \setminus T_2$ . L'ensemble nul des *traders* est l'ensemble de mesure nulle. Ce qui n'est pas discuté ici. On considère une coalition  $S$ <sup>6</sup> telle que  $\mu(S) = 0$  c'est-à-dire  $\mu$ -négligeable. Cela signifie que pour chaque sous-coalition  $R \subseteq S$  de  $S$ ,  $\mu(S \setminus R) = 0$ .

Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mesurable est dite  $\mu$ -intégrable si  $\int |f| d\mu < +\infty$ . On pose dans ce cas  $\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu$ . Lorsque la mesure  $\mu$  est une mesure de Lebesgue<sup>7</sup> la fonction  $f$  dite *intégrale* sera considérée au sens de Lebesgue. Tout le long du chapitre, toute fonction intégrable l'est au sens de Lebesgue.

Considérons une économie d'échange comprenant deux biens. Un bien différencié par deux types d'atomes différents et un bien détenu par une partie non atomique. L'espace des biens appartient donc à  $\mathbb{R}^3$ . Chaque agent dispose d'un vecteur de dotations initiales  $\mathbf{w}$  qui respectent les hypothèses suivantes :

---

3.  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(T)$  est une  $\sigma$ -algèbre de sur  $T$  si : (i)  $T \in \mathcal{T}$  (ii)  $\forall (A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{T}, \cup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$  (iii)  $\forall A \in \mathcal{T}, A^c \in \mathcal{T}$

4.  $T = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(T)$  et  $\mu(A) = \text{card}(A)$

5. Il s'agit d'un continuum de *traders* posédant un pouvoir de marché.

6. Une coalition  $S$  représente un sous-ensemble non nul d'éléments de  $\mathcal{T}$  où les individus coordonnent leurs décisions d'offre.

7. La mesure de Lebesgue est une mesure  $\lambda$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  vérifiant : (i) pour tout intervalle  $]a, b[$ ,  $\lambda(]a, b[) = b - a$  (ii)  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{y : y - x \in A\})$

**Hypothèse 1.** Considérons la coalition  $S$  telle que  $\mathbf{w}^1(t) > 0$ ,  $\mathbf{w}^2(t) = 0$  pour tout  $t \in S$  et  $\mathbf{w}^1(t) = 0$ ,  $\mathbf{w}^2(t) > 0$  pour chaque  $t \in S^c$ .

Une allocation est une affectation  $x(t)$  telle que  $\int_T x(t) d\mu = \int_T \mathbf{w}(t) d\mu$ . Les préférences de chaque *trader*  $t \in T_1$  sont décrites par la fonction d'utilité  $u_t : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et pour chaque *trader*  $t \in T_2$  par la fonction d'utilité  $u_t : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfont aux hypothèses *infra*.

**Hypothèse 2.**  $u_t : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u_t : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sont supposées, pour des questions d'unicité de solution, continues, strictement monotones et strictement quasi-concaves pour chaque  $t \in T$ .

Considérons respectivement par  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$  et  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^3)$  les tribus des boréliens ( $\sigma$ -algèbre)<sup>8</sup>, de  $\mathbb{R}_+^2$  et  $\mathbb{R}_+^3$ . Considérons par  $\bigotimes_{i=1}^2 \mathcal{B}_i$  (resp  $\bigotimes_{i=1}^3 \mathcal{B}_i$ ) la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les ensembles  $\prod_{i=1}^2 E_i$  (resp.  $\prod_{i=1}^3 E_i$ ) tel que  $E_i \in \mathcal{B}_i$ ,  $i = 1, 2$  (resp.  $E_i \in \mathcal{B}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ). La  $\sigma$ -algèbre (tribu) engendrée par  $\prod_{i=1}^2 E_i$  est la plus petite tribu contenant  $E_1 \times E_2$ . Comme  $E_1 \times E_2$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) = \bigotimes_{i=1}^2 \mathcal{B}_i$ .

**Hypothèse 3.**  $u : T_1 \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , donné par  $u(t, x)$ , pour tout  $t \in T_1$  et pour chaque  $x \in \mathbb{R}_+^2$  est  $\bigotimes_{i=1}^2 \mathcal{B}_i$ -mesurable et  $u : T_2 \times \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , donné par  $u(t, x)$ , pour tout  $t \in T_2$  et pour chaque  $x \in \mathbb{R}_+^3$  est  $\bigotimes_{i=1}^3 \mathcal{B}_i$ -mesurable.

Une allocation  $y$  domine une autre  $x$  *via* une coalition  $S$  si  $u_t(y(t)) \geq u_t(x(t))$ ,  $\forall t \in S$ , et si  $u_t(y(t)) > u_t(x(t))$ ,  $\forall t \in S' \subset S$ , avec  $\int_S y(t) d\mu = \int_S \mathbf{w}(t) d\mu$ . Le noyau est l'ensemble des allocations qui n'est pas dominé par toute coalition non nulle.

Considérons le vecteur de prix  $p = (p_1, p_2, 1) \in \mathbb{R}_+^3$ . Les prix des biens sont exprimés en termes relatifs par rapport au troisième bien (qui correspond au bien  $L$  dans le chapitre 2). L'équilibre concurrentiel est la paire  $(\tilde{p}, \tilde{x})$  avec un vecteur de prix  $\tilde{p}$  et une allocation  $\tilde{x}$  tels que pour presque tout  $t \in T$ ,  $\tilde{x}$  est l'allocation maximale sous la contrainte budgétaire.

---

8. Si  $(X, \theta)$  est un espace topologique avec  $\theta$  l'ensemble des ouverts de  $X$  alors  $\sigma(\theta)$  est la tribu des boréliens de  $X$  et se note  $\mathcal{B}(X)$ .

Considérons un jeu stratégique de marché tel que proposé par Busetto et al. (2011) et Codognato et al. (2015) qui est une version reformulée du « *Shapley-window model* » (voir section 1.2 du chapitre 1). Les stratégies formulées par les agents dépendent, dans le modèle de la nature des agents. Dans le modèle différencié proposé au chapitre 2, les atomes agiront sur leur propre marché et le marché du bien de la partie non atomique tandis que les agents non atomiques, quant à eux, agiront sur l'ensemble des trois marchés. Nous supposons que les atomes formulent une offre nulle sur le marché du bien de leur concurrent car le bien de ce dernier est perçu comme un bien substituable. Une stratégie est la correspondance  $\mathbf{B} : T \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^6)$  tel que pour tout  $t \in T$ ,  $\mathbf{B}(t) = \{b \in \mathbb{R}_+^6 : \sum_{j=1}^3 b_{ij} \leq \mathbf{w}^i(t), i = 1, 2, 3\}$ , où  $b_{ij}$  représente la quantité de bien  $i$  que le *trader*  $t$  offre en échange du bien  $j$ . Une sélection de stratégie est une fonction intégrable  $\mathbf{b} : T \longrightarrow \mathbb{R}_+^6$  telle que pour chaque  $t \in T$ ,  $\mathbf{b}(t) \in \mathbf{B}(t)$ . Étant donné cette stratégie sélectionnée  $\mathbf{b}$ , la matrice agrégée est définie par :  $\bar{\mathbf{B}} = (\int_T \mathbf{b}_{ij}(t) d\mu)$ . La quantité  $\mathbf{b} \setminus b(t)$  représente la stratégie telle que nous considérons  $b(t)$  comme une déviation et/ou la stratégie sauf  $b(t)$ .

Dans cette approche le mécanisme de prix Sahi et Yao (1989) est utilisé. Nous proposons à cet effet, les deux définitions suivantes :

### 4.2.2 Définitions

#### Définition 1 :

Une matrice  $A$  est dite irréductible si pour toute paire  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ , il existe un entier positif  $k$  tel que  $a_{ij}^{(k)} > 0$ , où  $a_{ij}^{(k)}$  est l'élément à la ligne  $i$  colonne  $j$  de la matrice  $A^k$  de  $A$ .

#### Définition 2 :

Étant donné une stratégie  $\mathbf{b}$ , un vecteur de prix  $p$  est dit apurant le marché si :

$$p \in \mathbb{R}_{++}^3, \sum_{i=1}^L p^i \bar{\mathbf{b}}_{ij} = p^j \sum_{i=1}^L \bar{\mathbf{b}}_{ji}, \quad j = 1, 2, L \quad (4.1)$$

Sahi et Yao (1989) montrent que la matrice des stratégies de sélection  $B$  dispose d'un vecteur apurant le marché si et seulement si  $\bar{B}$  est complètement irréductible. Ce vecteur



de prix est unique (à un multiple près). Considérant le mécanisme de prix précédent, la demande du *trader*  $\alpha$  pour le bien  $j$  est :

$$\begin{cases} x^j(t, \mathbf{b}(t), p) = \mathbf{w}^j(t) - \sum_{i=1}^3 b_{ji}(t) + \sum_{i=1}^3 b_{ij}(t)(p_i/p_j) & \text{si } p \text{ satisfait (4.1)} \\ x^j(t, \mathbf{b}(t), p) = \mathbf{w}^j(t) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$j = 1, 2, L$$

Définissons à présent la notion de l'équilibre Cournot-Nash inspirée du modèle de Shapley et reformulée par Busetto et al. (2011).

**Définition 3 :** Une stratégie  $\hat{b}$  telle que  $\bar{\hat{B}}$  soit irréductible est un équilibre Cournot-Nash si  $u_t(x(t, \hat{b}, p(\hat{b}))) \geq u_t(x(t, \hat{b} \setminus b(t), p(\hat{b} \setminus b(t))))$ .<sup>9</sup>

## 4.3 Exemples

Trois computations d'équilibre Cournot-Walras symétrique sur une économie d'échange en structure mixte sont proposées. Les exemples sont intimement liés au chapitre 2 de la thèse. La différence avec la modélisation du chapitre 2 se situe par rapport au comportement des agents concurrentiels qui est endogène.

### 4.3.1 L'économie d'échange

L'économie que nous proposons contient donc deux parties, une partie atomique qui comprend deux types d'atomes  $T_1$  avec des offres différenciées et une partie non atomique  $T_2$ . L'économie contient alors  $T = T_1 \cup T_2$  agents économiques. Par ailleurs, dans les exemples présentés, le marché de chaque type de bien différencié est monopolistique dans une première approche puis ensuite oligopolistique. Nous supposons donc dans une première approximation un agent par bien différencié pour chaque type d'atome et par la suite  $n$  oligopoleurs par type d'atome.

---

9. Confère Codognato et al. (2015), définition 3.

L'économie comprend :  $T_1 = \{1, 2\}$  et  $T_2 = [0, 1]$ . Considérons le vecteur de prix  $p = (p_1, p_2, 1)$ . Chaque prix est exprimé en termes relatif par rapport au bien possédé par la partie non atomique.

### Dotations et fonctions d'utilité

$$\omega_k^k = (1, 0) \text{ et } U^k = x_k^k (x_k^L)^\gamma \quad \forall k = 1, 2 \quad (4.3)$$

$$\omega(t) = (0, 1) \text{ et } U(t) = x^L(t) \prod_{h=1}^2 (x^h(t))^{\alpha_{th}} \quad \forall t \in [0, 1] \quad (4.4)$$

### 4.3.2 Equilibre walrasien

Les programmes des agents sont :

$$\begin{aligned} \text{Max. } & U_k(x_k^k, x_k^L) = x_k^k (x_k^L)^\gamma \\ \text{s.c. } & p_k x_k^k + x_k^L \leq p_k \quad , \forall k = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Max. } & x^L(t) \prod_{h=1}^2 (x^h(t))^{\alpha_{th}} \quad , \forall t \in [0, 1] \\ \text{s.c. } & \sum_{h=1}^2 \alpha_{th} = 1 \quad \text{et} \quad p_1 x_1(t) + p_2 x^2(t) + x^L(t) \leq 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

A l'optimum, les demandes des :

**Agents non atomiques,  $\forall t \in [0, 1]$**

$$\left\| \begin{aligned} x^1(t) &= \frac{\alpha_{t1}}{[1 + \sum_{h=1}^2 \alpha_{th}]} \frac{1}{p_1} = \frac{\alpha_{t1}}{2p_1} \\ x^2(t) &= \frac{\alpha_{t2}}{[1 + \sum_{h=1}^2 \alpha_{th}]} \frac{1}{p_2} = \frac{\alpha_{t2}}{2p_2} \\ x^L(t) &= \frac{1}{1 + \sum_{h=1}^2 \alpha_{th}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right. \quad (4.7)$$

**Agents atomiques,  $k = 1, 2$**

$$\left\| \begin{array}{l} x_k^k = \frac{1}{\gamma+1} \\ x_k^L = \frac{\gamma}{\gamma+1} p_k \end{array} \right. \quad (4.8)$$

**À l'équilibre sur le marché du bien  $k = 1, 2$**

$$\int_0^1 \frac{\alpha_{tk}}{2} \frac{1}{p_k} d\mu(t) + \frac{1}{\gamma+1} = 1 \quad (4.9)$$

Ainsi le prix d'équilibre est :

$$p_k = \frac{[\int_0^1 \alpha_{tk} d\mu(t)]}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\gamma} \right] \quad k = 1, 2 \quad (4.10)$$

Les allocations donnent :

**Pour les agents atomiques,  $k = 1, 2$**

$$\left\| \begin{array}{l} x_k^k = \frac{1}{\gamma+1} \\ x_k^L = \frac{\int_0^1 \alpha_{tk} d\mu(t)}{2} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

**Pour les agents non atomiques,  $\forall t \in [0, 1]$**

$$\left\| \begin{array}{l} x^k(t) = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\alpha_{tk}}{[\int_0^1 \alpha_{tk} d\mu(t)]} \\ x^L(t) = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \forall k=1,2 \quad (4.12)$$

### 4.3.3 Équilibres stratégiques

Comme introduit ci-dessus, nous allons considérer un agent par atome, puis dans un second temps, nous allons considérer  $n$  agents par type d'atome. Il s'agira essentiellement de considérer deux types d'économies : une économie Cobb-Douglas où tous les agents ont des préférences Cobb-Douglas, puis deux types d'économies quasi-linéaire/Cobb-Douglas où les atomes ont des préférences Cobb-Douglas et la partie sans atomes des préférences quasi-linéaire et par la suite l'inverse. Les agents sans atomes vont émettre deux stratégies

dont la somme est intérieure pour les deux biens différenciés. Puisque les agents ont des comportements stratégiques, nous allons déterminer les prix *via* l'usage de mécanismes de prix à la Sahi et Yao (1989).

### Exemple 1 : Cas d'une économie avec un atome par bien différencié

Dans cet exemple-ci, l'économie Cobb-Douglas est juste étudié (pour l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas les calculs restent similaires). Le prix par bien différencié est :

$$p_k = \frac{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)}{q_k}, \quad k = 1, 2 \quad (4.13)$$

Le programme à résoudre est donc le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{q_k} (1 - q_k) \left( \frac{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)}{q_k} q_k \right)^\gamma, \quad k = 1, 2 \\ \text{Max}_{b_k(t)} \prod_{t \in [0,1]} \prod_{k=1}^2 \left( \frac{q_k}{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)} b_k(t) \right)^{\alpha_{tk}} (1 - b_1(t) - b_2(t)) \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Cela revient donc à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{q_k} (1 - q_k) \left( \int_0^1 b_k(t) d\mu(t) \right)^\gamma, \quad k = 1, 2 \\ \text{Max}_{b_k(t)} \underbrace{\prod_{t \in [0,1]} \prod_{k=1}^2 \left( \frac{q_k}{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)} b_k(t) \right)^{\alpha_{tk}}}_{(\alpha)} (1 - b_1(t) - b_2(t)) \end{array} \right. \quad (4.15)$$

L'équilibre obtenu est  $\tilde{b}_1(t) = \frac{\alpha_{t1}}{2}$  et  $\tilde{b}_2(t) = \frac{\alpha_{t2}}{2}$  <sup>10</sup>. Il reste à présent à résoudre,

$$\text{Max}_{q_k} (1 - q_k) \left( \frac{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)}{q_k} q_k \right)^\gamma, \quad k = 1, 2 \quad (4.16)$$

qui devient :

$$\text{Max}_{q_k} (1 - q_k) \left( \frac{\int_0^1 \alpha_{tk} d\mu(t)}{2} \right)^\gamma, \quad k = 1, 2 \quad (4.17)$$

$$\text{Car } \int_0^1 b_k(t) d\mu(t) = \frac{\int_0^1 \alpha_{tk} d\mu(t)}{2} \quad k = 1, 2$$

---

10. Confère exemple de réplcation par atome.

Cela conduit à :  $(q_1, q_2) = (0, 0)$  qui est l'équilibre trivial. Nous obtenons l'équilibre trivial avec un comportement concurrentiel pour la partie sans atome. Ce qui n'est rien d'autre que le *résultat 2.1* obtenu au chapitre 2.

Les exemples qui suivent considèrent  $n$  atomes par bien différencié. Nous reproduisons une réplication comme dans le cas du modèle développé au chapitre 2.

### Exemple 2 : Cas de l'économie Cobb-Douglas avec $n$ agents par type d'atomes

Nous rappelons que dans notre économie Cobb-Douglas, les agents économiques ont tous des préférences de type Cobb-Douglas. Dans la suite des exemples suivants, nous allons considérer à présent  $n$  agents par type d'atome. Ainsi l'économie dispose de  $A_1$  et  $A_2$ , une partition de l'ensemble des atomes  $T \setminus T_2$ . Chaque partition contient  $n$  atomes de même type. Deux traders  $\rho$  et  $\tau$  de la partition  $A_k$ ,  $k = 1, 2$  sont de même type s'ils ont les mêmes dotations et les mêmes préférences. Le cardinal de  $A_k$  se note  $|A_k|$  et est égal à  $n$  et de même  $|T_1| = 2$ . Le programme à résoudre est alors :

$$p_k = \frac{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)}{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha k}} \quad (4.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{q_{\alpha k}} \left( 1 - q_{\alpha k} \right) \left( \frac{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)}{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha k}} q_{\alpha k} \right)^\gamma, k = 1, 2 \\ \text{Max}_{b_k(t)} \prod_{t \in [0,1]} \underbrace{\left( \frac{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha k}}{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)} b_k(t) \right)^{\alpha_{tk}} (1 - b_1(t) - b_2(t))}_{(\alpha)} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

La quantité  $(\alpha)$  est égale à :

$$\text{Max}_{b_k(t)} \prod_{t \in [0,1]} \left( \frac{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha 1}}{\int_0^1 b_1(t) d\mu(t)} b_1(t) \right)^{\alpha_{t1}} \left( \frac{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha 2}}{\int_0^1 b_2(t) d\mu(t)} b_2(t) \right)^{\alpha_{t2}} (1 - b_1(t) - b_2(t))$$

Les CPO nous donnent  $\frac{\partial (\alpha)}{\partial b_1(t)} = 0$  :

$$-(b_1(t))^{\alpha_{t1}} + (1 - b_1(t) - b_2(t)) \times \alpha_{t1} \times (b_1(t))^{\alpha_{t1}-1} = 0 \quad (4.20)$$

$$(b_1(t))^{\alpha_{t1}-1} \left[ -b_1(t) + (1 - b_1(t) - b_2(t)) \times \alpha_{t1} \right] = 0 \quad (4.21)$$

De manière similaire  $\frac{\partial (\alpha)}{\partial b_2(t)} = 0$ , nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \alpha_{t1} - b_1(t)(1 + \alpha_{t1}) - b_2(t)\alpha_{t1} = 0 \\ \alpha_{t2} - b_1(t)\alpha_{t2} - b_2(t)(1 + \alpha_{t2}) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Cela nous donne :

$$\begin{cases} b_1(t)(1 + \alpha_{t1}) + b_2(t)\alpha_{t1} = \alpha_{t1} & (a) \\ b_1(t)\alpha_{t2} + b_2(t)(1 + \alpha_{t2}) = \alpha_{t2} & (b) \end{cases} \quad (4.23)$$

$$(b) \implies b_1(t) = \frac{1}{\alpha_{t2}} \left[ \alpha_{t2} - (1 + \alpha_{t2})b_2(t) \right] = 1 - \left( \frac{1 + \alpha_{t2}}{\alpha_{t2}} \right) b_2(t)$$

En remplaçant le résultat dans (a), ainsi :

$$\left[ 1 - \left( \frac{1 + \alpha_{t2}}{\alpha_{t2}} \right) \right] (1 + \alpha_{t1}) + b_2(t)\alpha_{t1} = \alpha_{t1} \quad (4.24)$$

$$\implies b_2(t) \left[ (1 + \alpha_{t1}) \frac{1 + \alpha_{t2}}{\alpha_{t2}} - \alpha_{t1} \right] b_2(t) = (1 + \alpha_{t1} - \alpha_{t1}) \quad (4.25)$$

$$\implies b_2(t) = \frac{\alpha_{t2}}{1 + \alpha_{t1} + \alpha_{t2}} \quad (4.26)$$

$$\implies \tilde{b}_2(t) = \frac{\alpha_{t2}}{2} \in [0, 1] \text{ car } \sum_{h=1}^2 \alpha_{th} = 1 \quad (4.27)$$

Il en ressort que :

$$\tilde{b}_1(t) = 1 - \left( \frac{1 + \alpha_{t2}}{\alpha_{t2}} \right) \frac{\alpha_{t2}}{2} = 1 - \frac{(1 + \alpha_{t2})}{2} = \frac{1 - \alpha_{t2}}{2} = \frac{\alpha_{t1}}{2} \quad (4.28)$$

Nous avons donc :  $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = (\frac{\alpha_{t1}}{2}, \frac{\alpha_{t2}}{2})$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ . Nous partons donc d'un comportement stratégique des agents non atomiques, l'approche débouche sur un comportement concurrentiel de la partie sans atome.

Avec  $\int_0^1 b_k(t) d\mu(t) = \frac{\int_0^1 \alpha_{tk} d\mu(t)}{2}$   $k = 1, 2$ , il ne reste qu'à résoudre :

$$\text{Max}_{q_{\alpha k}} (1 - q_{\alpha k}) \left( \frac{\int_0^1 \alpha_{tk} d\mu(t)}{2} \frac{q_{\alpha k}}{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha k}} \right)^\gamma, k = 1, 2 \quad (4.29)$$

$$\text{Posons } A = \frac{\int_0^1 \alpha_{tk} d\mu(t)}{2}$$

Nous sommes donc amenés à :

$$\text{Max}_{q_{\alpha k}} (1 - q_{\alpha k}) \underbrace{\left( A \frac{q_{\alpha k}}{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha k}} \right)^\gamma}_{(\beta)}, k = 1, 2$$

Les CPO nous donnent  $\frac{\partial (\beta)}{\partial q_{\alpha k}} = 0$  :

$$- \left( A \frac{q_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n q_{\alpha'k}} \right)^\gamma + \gamma (1 - q_{\alpha k}) A \left( A \frac{q_{\alpha k}}{\sum_{\alpha'=1}^n q_{\alpha'k}} \right)^{\gamma-1} \frac{\left( \sum_{\alpha'=1}^n q_{\alpha'k} - q_{\alpha k} \right)}{\left[ \sum_{\alpha'=1}^n q_{\alpha'k} \right]^2} = 0 \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow q_{\alpha k} \left( \sum_{\alpha'=1}^n q_{\alpha'k} \right) + \gamma (1 - q_{\alpha k}) \left( \sum_{\alpha' \neq \alpha}^n q_{\alpha'k} \right) = 0 \quad (4.31)$$

Cela implique :

$$\tilde{q}_{\alpha k} = \frac{\gamma \sum_{\alpha' \neq \alpha}^n q_{\alpha'k}}{S_k + \gamma \sum_{\alpha' \neq \alpha}^n q_{\alpha'k}} \quad k = 1, 2 \quad (4.32)$$

A l'EGS, nous avons :

$$\tilde{q}_{\alpha k} = \frac{\gamma(n-1)}{n + \gamma(n-1)} \quad (4.33)$$

Nous retombons exactement sur le résultat de l'analyse du chapitre 2.

**Proposition 4.1 :**

L'équilibre Cournot-Walras avec un continuum d'agents coïncide avec l'équilibre walrasien lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

On peut voir cette proposition d'une extension du théorème d'équivalence d'Aumann (1964) avec une variété de biens.

**Exemple 3 : Cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas**

L'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas telle que définie dans notre premier chapitre introduit de l'hétérogénéité dans les préférences des agents économiques. Les atomes ont des préférences de type quasi-linéaire tandis que dans la partie non-atomique des agents, ils possèdent des préférences de type Cobb-Douglas. Le programme à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{q_{\alpha k}} (1 - q_{\alpha k}) + \gamma \text{Log} \left( \frac{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)}{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha k}} q_{\alpha k} \right), k = 1, 2 \\ \text{Max}_{b_k(t)} \prod_{t \in [0,1]} \left( \frac{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha k}}{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)} b_k(t) \right)^{\alpha_{tk}} (1 - b_1(t) - b_2(t)) \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Cette analyse reste semblable à celle de l'exemple 2 car il n'y a que l'étape des atomes qui diffère et donc le reste est équivalent au cas du modèle de base.

**Exemple 4 : Cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas modifiée**

Dans cette partie, nous considérons l'inverse du problème de l'exemple 2. Les atomes auront une fonction de type Cobb-Douglas tandis que les agents de la partie non atomique posséderont des préférences quasi-linéaires<sup>11</sup>. Le problème à résoudre est donc :

---

11.  $U(x_1(t), x_2(t), x_L(t)) = x^L(t) + \text{Log} \left( \prod_{k=1}^2 (x^k(t))^{\alpha_{tk}} \right) = x^L(t) + \sum_{k=1}^2 \alpha_{tk} \text{Log } x^k(t)$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{q_{\alpha k}} (1 - q_{\alpha k}) \left( \frac{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)}{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha k}} q_{\alpha k} \right)^\gamma, k = 1, 2 \\ \text{Max}_{b_k(t), t \in [0,1]} \underbrace{(1 - b_1(t) - b_2(t)) + \sum_{k=1}^2 \alpha_{t1} \text{Log} \left( \frac{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha k}}{\int_0^1 b_k(t) d\mu(t)} b_k(t) \right)}_{(\alpha)} \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Les CPO impliquent que  $\frac{\partial (\alpha)}{\partial b_1(t)} = 0$  :

$$-1 + \alpha_{t1} \frac{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha 1} \times \int_0^1 b_k(t) d\mu(t)}{\left[ \int_0^1 b_1(t) d\mu(t) \right]^2} \times \frac{1}{\frac{\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha 1}}{\int_0^1 b_1(t) d\mu(t)}} = 0 \quad (4.36)$$

$$\implies -1 + \alpha_{t1} \frac{1}{b_1(t)} = 0 \quad (4.37)$$

$$\implies \tilde{b}_1(t) = \alpha_{t1}, \forall t \in [0, 1] \quad (4.38)$$

De la même manière  $\tilde{b}_2(t) = \alpha_{t2}, \forall t \in [0, 1]$ .

Et donc  $(\tilde{b}_1(t), \tilde{b}_2(t)) = (\alpha_{t1}, \alpha_{t2}), \forall t \in [0, 1]$

Avec des comportements concurrentiels supposés pour certains agents économiques, nous obtenons une équivalence avec le modèle en structure mixte. Ainsi, le modèle de Julien et Tricou (2005) étendu avec l'aspect de différenciation avec un nombre fini d'agents donnent les mêmes résultats avec deux biens.

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre 4 analyse la manière dont chaque comportement concurrentiel peut émerger de manière endogène dans un modèle avec un continuum d'agents dit « *petits* » d'une part et d'autre part un ensemble de « *gros agents* », les atomes. Ces der-

niers dans notre approximation différencient leurs biens par rapport à leurs concurrents. En supposant que la partie non atomique à un pouvoir de marché, nous débouchons sur un comportement concurrentiel. Ce qui corrobore entre autres les travaux de Aumann (1964) dans un cadre concurrentiel et Okuno et al. (1980) dans une approche non-coopérative. L'équilibre CW coïncide avec celui Walrasien à la limite.

---

## Conclusion Générale

---

Cette thèse ambitionne d'analyser les interactions stratégiques sur les marchés différenciés en équilibre général. Elle propose une modélisation qui se rapproche de plus en plus de la réalité où les firmes restreignent leur offre dans le but de manipuler le prix de leur bien. Il s'agit de l'approche de Cournot (1838). La réalité économique confère aux marchés la particularité de disposer d'une partie où les agents n'ont pas de pouvoir de marché et se comportent de manière concurrentielle. Il s'agit de l'analyse Walrasienne. La thèse réalisée est à la croisée des chemins entre ces deux analyses dans le but ultime de rendre compte efficacement de la concurrence entre les marchés. Gabszewicz et Vial (1972) proposent donc pour la première fois une analyse qui utilise l'approche Cournot-Walras mais pour une économie avec un secteur productif. Comme dans le modèle proposé, la production pose problème (exactement deux problèmes que sont la maximisation du profit et la normalisation des prix), des analyses similaires ont été proposées mais pour une économie d'échange (Codognato et Gabszewicz, 1991, 1993). Il existe une autre famille de modèles, celle des JSM, développée par les théoriciens Shapley (1977); Shapley et Shubik (1977). C'est une approche symétrique non-coopérative des échanges qui analyse les interactions stratégiques entre les individus pour des économies avec un nombre fini de *traders* (Voir Amir et al. (1990); Dubey et Shapley (1994); Dubey et Shubik (1978a); Mas-Colell (1982); Peck et al.

(1992); Sahi et Yao (1989)). Cette thèse utilise deux familles de modèles même si celle qui captive le plus l'attention est celle de Gabszewicz et Vial (1972). Il est défendu tout au long de ce manuscrit l'idée où les biens offerts pour l'échange sont des biens hétérogènes contrairement aux analyses préexistantes en équilibre général. L'ajout de l'hypothèse d'hétérogénéité aux modèles du genre modifie les équilibres et renchérit l'analyse en termes de stratégies des firmes, des consommateurs et même de l'autorité publique quant aux mesures correctives de la concurrence imparfaite à mettre en œuvre.

L'heure est à présent au bilan. Nous aborderons tout d'abord les contributions de notre recherche, suivi d'une discussion sur les principales limites des modèles proposés avant de conclure par la suggestion de quelques voies de recherche.

## **Contributions**

Cette section expose successivement les apports de la recherche sur un plan théorique dans la modélisation de la différenciation des produits en équilibre général, mais aussi en termes de politiques publiques.

### **Contribution sur les modèles de différenciation**

La littérature pour la plupart du temps en équilibre général considère, outre les travaux de Tonin (2013)<sup>12</sup>, que les biens offerts pour l'échange sont des biens homogènes. Dans la réalité des marchés en économie, les firmes s'affrontent afin d'avoir le monopole sur les biens qu'ils proposent. Cette thèse remet en cause l'hypothèse d'homogénéité des biens et se propose d'apprécier en quoi la levée d'une hypothèse aussi forte modifie les équilibres des modèles précédents. La thèse s'intéresse aux modèles d'équilibre général avec un nombre fini d'agents et de biens sauf pour le chapitre 4 où la modélisation concerne des économies avec une structure mixte. Traiter la différenciation nous a conduit à considérer les deux niveaux de différenciation à savoir celle objective où un ou plusieurs attributs du produit sont modifiés afin de le rendre différent de celui de son concurrent et celle subjective où la différence concerne les caractéristiques de base du produit. À la suite nous présentons

---

12. Tonin (2013) propose un modèle de différenciation avec un nombre infini de biens qui n'est pas l'approche adoptée dans cette thèse.

comment est abordée la différenciation des produits dans la modélisation présentée et les résultats obtenus.

### **Modélisation de la différenciation des produits**

Le modèle proposée est inspirée des modèles de Gabszewicz et Michel (1997) et Julien et Tricou (2005) qui proviennent originellement du modèle Gabszewicz et Vial (1972). Le cadre d'analyse symétrique de Julien et Tricou (2005) est adopté afin de bien prendre en compte les comportements différenciés entre les agents de l'économie. À ce cadre, il a été assigné à chaque agent concurrentiel de l'économie un vecteur fini de coefficients de différenciation qui sont les parts de revenu que l'agent est disposé à accorder afin de consommer toutes les variétés de biens différenciés disponibles. Ces coefficients sont une réplique des coefficients partiels affectant les quantités offertes dans le modèle de Singh et Vives (1984) et qui expriment la préférence des agents pour la diversité (Dixit et Stiglitz, 1977). Le prototype d'économie construite a également la particularité de considérer que les oligopoleurs ne consomment que deux biens : leur bien et le bien concurrentiel. Deux éléments plaident en faveur de ces choix. Premièrement, le bien du concurrent est considéré dans cette approche comme un bien substituable. Deuxièmement, la consommation de son bien est considéré comme un stock d'inventus que l'oligopoleur ne porte pas sur le marché dans un objectif de manipuler les prix (Safran, 1985). Nous définissons ainsi l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié.

### **Résultats**

En appliquant cet équilibre à deux économies, il ressort que pour que ces économies disposent d'un équilibre non trivial, il faut deux oligopoleurs par type de bien différencié qui offrent leur bien et deux agents concurrentiels qui désirent le bien différencié : il s'agit d'une extension de Dubey et Shubik (1978a) pour une variété de biens. Aussi, lorsque le coefficient de différenciation pour une variété de bien tend vers l'unité, nous sommes dans le cas d'un bien homogène et l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié coïncide avec l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur de Julien et Tricou (2005). Enfin,

les allocations et les prix de notre équilibre, sous certaines conditions, convergent vers l'équilibre walrasien.

## Contributions en politiques publiques

La littérature reste unanime sur le fait que la concurrence imparfaite génère des distorsions avec pour corollaire des allocations sous-optimales des ressources. D'où l'importance de mettre en œuvre des politiques pour atténuer les effets résultants de cette imparfaite concurrence. La littérature en politiques publiques fait évidemment recours aux politiques de taxation. Ces dernières ont principalement trois vertus : (i) elles servent à financer les dépenses publiques (Mirrlees, 1971; Ramsey, 1927); (ii) elles servent à contre-carrer les difficultés dues aux externalités (Sandmo, 1975); (iii) elles jouent un rôle de correcteur de la concurrence imparfaite (Gabszewicz et Grazzini, 1998; Guesnerie et Laffont, 1978; Myles, 1989). La contribution de la thèse en termes de politiques publiques concerne essentiellement le chapitre 3. Ce dernier contient deux analyses différentes mais complémentaires. La section 1 considère la taxation du modèle de différenciation du chapitre 2 tandis que la seconde section est une généralisation des modèles de Gabszewicz et Grazzini (2001, 1999); Grazzini (2006) pour des préférences CES pour les agents de l'économie (Elegbede et al. (2017) qui est une note co-écrite avec les professeurs Ludovic Julien et Louis de Mesnard).

## Politiques fiscales

Les deux sections cristallisent une forme d'analyse qui introduit un agent neutre sans dotations initiales qui capte tout le produit issu de la taxe. L'équilibre qui en ressort est de fait un optimum de second rang. Ainsi, pour les deux sections du chapitre 3, il est collecté des taxes auprès des oligopoleurs qui sont redistribuées à un individu neutre comme dans Gabszewicz et Grazzini (1999) et Grazzini (2006). Cette manière de faire est assez puissante pour réduire les distorsions du marché. Gabszewicz et Grazzini (2001) prouvent qu'une taxe sur les dotations initiales avec un transfert aux *traders* conduit à un optimum de Pareto tandis qu'une taxation des transactions et des dotations initiales sans transferts fournit un optimum de second rang. Dans la section 2, il était important de vérifier que ce

résultat n'était pas propre qu'aux préférences de type Cobb-Douglas pour les oligopoleurs. À cet effet, la section 2 considère un modèle d'oligopole bilatéral semblable à celui initié par Gabszewicz et Michel (1997) avec des fonctions CES pour l'ensemble des agents comme dans Bloch et Ferrer (2001b). Le modèle proposé en est un avec un nombre fini d'agents. La première section du chapitre 3 considère deux types de taxation : celle sur les dotations initiales et celle *ad valorem* (comme dans Gabszewicz et Grazzini (1998)) alors que la section 2 considère en plus des deux précédentes, une taxation unitaire (Grazzini, 2006).

## Résultats

De la section 1 il ressort qu'une taxation des transactions conduit à une invariance des allocations des oligopoleurs, mais également à une augmentation du prix des biens différenciés, tandis qu'une taxation des dotations initiales n'affecte pas les prix et les allocations des agents pour l'économie mixte. Du point de vue de l'analyse du bien-être, une taxation des dotations initiales des agents stratégiques dans le cas de l'économie Cobb-Douglas détruit le bien-être des agents concurrentiels comparé au cas de non taxation, mais les revenus de l'agent neutre (État) augmentent. Ce résultat fait écho avec la littérature car les agents concurrentiels préfèrent une taxation *ad valorem* (Delipalla et Keen, 1992; Keen, 1998).

De la section 2 trois principaux résultats émergent. Premièrement, les revenus issus de la taxation sont de premier rang quand les biens sont parfaitement complémentaires. Deuxièmement, l'efficacité et les implications en termes de bien-être dérivant des politiques fiscales sont fonction de la spécification des préférences des agents économiques. La taxe unitaire domine la taxe *ad valorem* du point de vue du bien-être. Cela renforce les résultats de Grazzini (2006) dans une économie d'échange avec un secteur productif dans un environnement asymétrique. En complément, il est important de noter que le modèle bilatéral de taxation peut produire des taxes d'équilibres multiples : des taxes unitaire et sur les dotations initiales multiples respectivement pour des préférences Cobb-Douglas et des préférences Leontieff des agents économiques.

## Limites de l'étude

Les limites de la thèse sont principalement de quatre ordres :

- Dans le chapitre 2, nous supposons l'existence de l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié. La démonstration de l'existence de cet équilibre n'est pas aisée et ferait l'objet de recherches futures. La difficulté peut-être liée à des fonctions de demande des agents concurrentiels qui ne sont pas toujours continues ;
- La modélisation part de l'allocation des dotations initiales. Il y aurait pu avoir une étape précédente, celle de la production. Cette étape a fait l'objet de recherches et n'est pas évidente à traiter (Confère Gabszewicz et Vial (1972)) ;
- La troisième limite concerne les choix des préférences Cobb-Douglas et quasi-linéaire pour les agents de l'économie dans la modélisation de la différenciation des produits du chapitre 2. Il s'agit de cas particuliers qui pourraient être généralisés par le choix des préférences CES pour les agents ;
- Enfin, dans le modèle de différenciation, les firmes concurrentes apparaissent simultanément dans la compétition. Ce qui peut être une limite car le modèle doit être ouvert et dans la réalité, l'économie comprendra donc des firmes *leaders* et d'autres firmes *followers*.

À la sortie de ce travail de thèse, ce dernier soulève des questions qui ouvrent des voies de recherches prometteuses pour les années à venir.

## Voies de recherches

Les voies de recherches énumérées ci-dessous ne sont pas exhaustives et pour certaines, elles sont en lien avec les limites de l'analyse tandis qu'une première très importante est abordée dans le chapitre 4 de la thèse.



## Modèle avec un continuum d'agents

Le chapitre 4, qui est l'une des voies de recherche, considère une économie avec une structure mixte : une partie atomique et une autre comprenant un continuum d'agents qui ont des pouvoirs de marché. Il s'agit de l'approche d'Okuno et al. (1980) qui n'impose pas le comportement concurrentiel de certains agents comme nous l'avons fait dans le chapitre 2. Ce comportement doit pouvoir émerger de manière endogène ou pas. Les travaux futurs vont être consacrés à prouver l'existence d'équilibre de ce genre de modèles pour des prototypes particuliers d'économies, mais aussi à computer les équilibres pour ces économies. Il serait également important de prouver les implications en termes d'économie publique de ces modèles.

## Modèle différencié à la Stackelberg

Une autre voie de recherche en lien avec la quatrième limite serait de modéliser une économie différenciée avec libre-entrée sur le marché et donc présence de firmes *leaders* et firmes *followers*. Cela pourrait être une variante du modèle de Julien (2013).

## Existence de l'équilibre Cournot-Walras symétrique sur produit différencié

Il s'agit dans une note de démontrer l'existence de l'équilibre Cournot-Walras symétrique dans un cas de différenciation des produits en faisant recours à des astuces mathématiques avancées.

Ainsi, nous mettons un terme à travers ces dernières lignes à ce travail doctoral, qui est l'aboutissement de long moments de réflexions et d'analyses dont la soutenance sanctionnera la fin.

---

## Bibliographie

---

- Amir, R. et Bloch, F. (2009), “Comparative statics in a simple class of strategic market games,” *Games and Economic Behavior*, 65, 7–24.
- Amir, R., Sahi, S., Shubik, M., et Yao, S. (1990), “A strategic market game with complete markets,” *Journal of Economic theory*, 51, 126–143.
- Anderson, S. P., de Palma, A., et Kreider, B. (2001a), “The efficiency of indirect taxes under imperfect competition,” *Journal of Public Economics*, 81, 231–251.
- (2001b), “Tax incidence in differentiated product oligopoly,” *Journal of Public Economics*, 81, 173–192.
- Arrow, K. (1963), *Social choice and individual values*, second edition ed., Yale University Press.
- Arrow, K. et Hahn, F. (1971), *General competitive analysis*, Holden-Day.
- Aumann, R. (1964), “Markets with a continuum of traders,” *Econometrica*, 32, 39–50.
- Bertrand, J. (1883), “Book review of *théorie mathématique de la richesse sociale* and of *recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*,” *Journal de savants*, 67, 499–508.

- Bishop, R. L. (1968), “The effects of specific and ad valorem taxes,” *Journal of Economics*, 82, 198–218.
- Bloch, F. et Ferrer, H. (2001a), “Strategic complements and substitutes in bilateral oligopolies,” *Economics letters*, 83–87.
- (2001b), “Trade fragmentation and coordination in strategic market games,” *Journal of Economic theory*, 101, 301–316.
- Bloch, F. et Ghosal, S. (1997), “Stable trading structures in bilateral oligopolies,” *Journal of Economic theory*, 74, 368–384.
- Busetto, F. et Codognato, G. (2006), “Very nice trivial equilibria in strategic market games,” *Journal of Economic Theory*, 131, 295–301.
- Busetto, F., Codognato, G., et Ghosal, S. (2011), “Noncooperative oligopoly in markets with a continuum of traders,” *Games and Economic Behavior*, 72, 38–45.
- Chamberlin, E. (1933), “Theory of monopolistic competition,” *The American Economic Review*, 23, 683–685.
- Coase (1960), “The problem of social costs,” *Journal of Law and Economics*, 3, 1–44.
- Codognato, G. et Gabszewicz, J. (1991), “Equilibres de Cournot-Walras dans une économie d’échange,” *Revue Economique*, 42, 1013–1026.
- (1993), “Cournot-Walras equilibria in markets with a continuum of traders,” *Economic Theory*, 3, 453–464.
- Codognato, G. et Ghosal, S. (2000), “Cournot-Nash equilibria in limit exchange economies with complete markets and consistent prices,” *Journal of Mathematical Economics*, 34, 39–53.
- Codognato, G., Ghosal, S., et Tonin, S. (2015), “Atomic Cournotian traders may be walrasian,” *Journal of Economic Theory*, 1–14.

- Cordella, T. et Gabszewicz, J. (1998), “Nice trivial equilibria in strategic market games,” *Games and Economic Behaviour*, 22, 162–169.
- Cournot, A. (1838), *Researches into the mathematical principles of the theory of wealth*, New York : The Macmillan company.
- D’Aspremont, C., Gabszewicz, J., et Thisse, J.-F. (1979), “On Hotelling’s « stability in competition »,” *Econometrica*, 47, 1145–1150.
- Debreu, G. et Scarf, H. (1963), “A limit theorem on the core of an economy,” *International Economic Review*, 4, 235–246.
- Delipalla, S. et Keen, M. (1992), “The comparaison between ad valorem and specific taxation under imperfect competition,” *Journal of Public Economics*, 49, 351–367.
- Dickson, A. et Hartley, R. (2008), “The strategic marshallian cross,” *Games and Economic Behavior*, 64, 514–532.
- (2013), “On nice and very nice autarkic equilibria in strategic market games,” *The Manshester School*, 81, 745–762.
- Dixit, A. et Stiglitz, J. (1977), “Monopolistic competition and optimum product diversity,” *The American Economic Review*, 67, 297–308.
- Dixit, J. (1976), “A model of duopoly suggesting a theory of entry barriers,” *Bell Journal of Economics*, 10, 20–32.
- Dubey, P. et Geanakoplos, J. (2001), “Insurance contracts designed by competitive pooling,” Technical report, Cowles Foundation.
- Dubey, P. et Sahi, S. (2003), “Price-mediated trade with quantity signals : an axiomatic approach,” *Journal of Mathematical Economics*, 39, 377–389.
- Dubey, P. et Shapley, L. (1994), “Noncooperative general exchange with a continuum of traders : two models,” *Journal of mathematical Economics*, 23, 253–293.

- Dubey, P. et Shubik, M. (1978a), “The noncooperative equilibria of a closed trading economy with market supply and bidding strategies,” *Journal of Economy Theory*, 1–20.
- (1978b), “A theory of money and financial institution. the profit maximizing-firm : Managers and stockholders,” Technical report, Cowles Foundation. 1-24.
- (1978c), “A theory of money and financial institutions. the non cooperative equilibria of a closed trading economy with market supply and bidding strategies,” *Journal of Economics Theory*, 17, 1–20.
- Eaton, C. et Lipsey, R. (1989), *Product differentiation*, vol. 1, chap. 12, North Holland.
- Elegbede, C. B. (2017), “A single general oligopoly equilibrium model with differentiated commodities,” Technical report, VIIth SI&GE workshop.
- Elegbede, C. B., Julien, L. A., et de Mesnard, L. (2017), “A note on taxation in strategic bilateral exchange,” Technical report, CREGO & EconomiX.
- Gabszewicz, J. et Grazzini, L. (1998), “Taxing market power,” Technical report, Core discussion Paper, 1-15.
- (2001), *Economic Essays, a Festschrift for Werner Hildenbrand*, chap. Strategic Multilateral Exchange and Taxes, springer-verlag ed., G. Debreu, and Neuefeind, and W. Trockel (Eds), pp. 109–126.
- Gabszewicz, J. et Mertens, J.-F. (1971), “An equivalence theorem for the core of an economy whose atoms are not « too » big,” *Econometrica*, 39, 713–721.
- Gabszewicz, J. et Michel, P. (1997), *Trade, Technology and Economics. Essays in Honour of Richard Lipsey*, chap. Oligopoly Equilibrium in Exchange Economies, Eaton, B. C. and Harris, R. G. (Eds), pp. 217–240.
- Gabszewicz, J. et Vial, J.-P. (1972), “Oligopoly à la Cournot in a general equilibrium analysis,” *Journal of Economy Theory*, 4, 381–400.

- Gabszewicz, J. J. (1968), "Cœurs et allocations concurrentielles dans des économies d'échanges avec un continuum de biens," PhD thesis, Université catholique de Louvain, Belgique.
- Gabszewicz, J. J. et Grazzini, L. (1999), "Taxing market power," *Journal of Public Economic Theory*, 1, 475–497.
- Gale, D. (1976), "The linear exchange model," *Journal of Mathematical economics*, 3, 205–209.
- Giraud, G. (2003), "Strategic market games : an introduction," *Journal of Mathematical Economics*, 39, 355–375.
- Grazzini, L. (2006), "A note on ad valorem and per unit taxation in an oligopoly model," *Journal of Economics*, 89, 59–74.
- Guesnerie, R. et Laffont, J.-J. (1978), "Taxing price makers," *Journal of Economic Theorie*, 19, 423–455.
- Hart, O. (1985), "Monopolistic competition in the spirit of chamberlin : Special results," *The economic journal*, 95, 889–908.
- Hotelling, H. (1929), "Stability in competition," *The Economic Journal*, 39, 41–57.
- Julien, L. (2013), "On stackelberg competition in strategic multilateral exchange," *Research in Economics*, 63, 59–75.
- Julien, L. et Tricou, F. (2005), "Specialized oligopolies in a pure exchange economy : the symmetric cournot-walras equilibrium," *Research in Economics*, 59, 280–292.
- Kay, J. et Keen, M. (1983), "How should commodities be taxed?" *European Economic Review*, 339–358.
- Keen, M. (1998), "The balance between specific and ad valorem taxation," *Fiscal studies*, 19, 1–37.

- Lahmandi-Ayed, R. (2001), "Oligopoly equilibria in exchange economies a limit theorem," *Economic theory*, 665–674.
- Lancaster, K. (1973), *Consumer demand : A New Approach*, vol. 11, New York : Colombia University Press.
- Mas-Colell, A. (1982), *Advances in Economic Theory*, chap. The Courontian foundations of Walrasian equilibrium theory, In Hidenbrand. W. (Ed), Cambridge University Press.
- Mertens, J. (2003), "The limit-price mechanism," *Journal of Mathematical Economics*, 39, 433–528.
- Mirrlees, J. A. (1971), "An exploration in the theory of optimum income taxation," *Review of Economic Studies*, 38, 175–208.
- Myles, G. (1996), "Imperfect competition and the optimal combinaison of ad valorem and specific taxation," *international Tax and Public Finance*, 3, 29–44.
- Myles, G. D. (1989), "Ramsey tax rules for economies with imperfect competition," *Journal of Public Economics*, 38, 95–115.
- Okuno, M., Postlewaite, A., et Roberts, J. (1980), "Oligopoly and competition in large markets," *The American Economic Review*, 70, 22–31.
- Peck, J., Shell, K., et Spear, S. (1992), "The market game : existence and structure of equilibrium," *Journal of Mathematical Economics*, 21, 271–299.
- Postlewaite, A. et Schmeidler, D. (1978), "Approximate efficiency of non walrasian-nash equilibria," *Econometrica*, 46, 127–135.
- Ramsey, F. P. (1927), "A contribution to the theory of taxation," *The Economic Journal*, 37, 47–61.
- Safra, Z. (1985), "Existence of equilibrium for walrasian endowment games," *Journal of Economic Theory*, 366–378.

- Sahi, S. et Yao, S. (1989), "The non-cooperative equilibria of a trading economy with complete markets and consistent prices," *Journal of Mathematical Economics*, 18, 325–346.
- Salop (1979), "Monopolistic competition with outside goods," *The Bell Journal of Economics*, 141–156.
- Sandmo, A. (1975), "Optimal taxation in the presence of externalities," *The Swedish Journal of Economics*, 77, 86–98.
- Shaked, A. et Sutton, J. (1982), "Relaxing price competition through product differentiation," *The Review of Economics Studies*, 49, 3–13.
- (1983), "Natural oligopolies," *Econometrica*, 51, 1469–1484.
- Shapley, L. (1977), *Theory and Measurement of Economic Externalities*, chap. Noncooperative General Exchange, New York : Academic Press, pp. 155–175.
- Shapley, L. et Shubik, M. (1977), "Trade using one commodity as a means of payment," *Journal of political Economy*, 85, 937–968.
- Shitovitz, B. (1973), "Oligopoly in markets with a continuum of traders," *Econometrica*, 41, 467–501.
- Shubik, M. (1972), "Commodity money, oligopoly, credit and bankruptcy in general equilibrium model," *Western Economic Journal*, 10, 24–38.
- (1990), *A game theoretic approach to the theory of money and financial institutions*, vol. I, chap. 5, Elsevier Sciences Publishers B.V., pp. 171–219.
- Shy, O. (1995), *Industrial Organisation : Theory and applications*, The MIT Press.
- Singh, N. et Vives, X. (1984), "Price and quantity competition in a differentiated duopoly," *The RAND Journal of Economics*, 14, 546–554.
- Skeath, S. et Trandel, G. (1994), "A pareto comparison of ad valorem and unit taxes in noncompetitive environments," *Journal of Public Economics*, 53, 53–71.



- Sorin, S. (1996), “Bluff and reputation,” *Revue d’économie politique*, 105, 583–600.
- Spence, M. (1976), “Product differentiation and welfare,” *American Economic Review*, 66, 407–414.
- Stackelberg, H. V. (1934), *Market Structure and Equilibrium*, Springer.
- Suits, D. et Musgrave, R. A. (1953), “Ad valorem and unit taxes compared,” *Quarterly Journal of Economics*, 67, 598–604.
- Tirole, J. (1988), *Théorie de l’organisation industrielle : Tome 2*, Economica.
- Tonin, S. (2013), “An example of Strategic Market Game with Infinitely Many Commodities,” Technical report, Warwick Economic research papers.
- (2015), “Strategic foundations of oligopolies in general equilibrium,” PhD thesis, University of Glasgow.
- Weyers, S. (2003), “A strategic market games with limit-price,” *Journal of Mathematical Economics*, 39, 529–558.

---

## Table des matières

---

|                                                   |           |
|---------------------------------------------------|-----------|
| Remerciements                                     | iv        |
| Sommaire                                          | vii       |
| Résumé                                            | viii      |
| Abstract                                          | x         |
| Introduction générale                             | 1         |
| <b>1 Revue de la littérature</b>                  | <b>10</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .                        | 11        |
| 1.2 Les mécanismes de prix dans les JSM . . . . . | 13        |
| 1.2.1 Les jeux à la Shapley-Shubik . . . . .      | 13        |
| Le modèle de Shubik (1972) . . . . .              | 14        |
| Le modèle de Shapley et Shubik (1977) . . . . .   | 17        |
| Mécanismes de formation des prix . . . . .        | 18        |
| 1.2.2 Le modèle d'Amir et al. (1990) . . . . .    | 19        |
| Hypothèses du modèle . . . . .                    | 20        |
| Formation des prix . . . . .                      | 20        |

|          |                                                                         |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.2.3    | Modèle de Sahi et Yao (1989)                                            | 21        |
|          | Les hypothèses du modèle                                                | 22        |
|          | Règle de prix                                                           | 22        |
|          | Commentaires sur le mécanisme des prix de Sahi et Yao (1989)            | 23        |
|          | Résultats                                                               | 24        |
|          | Matrice des « <i>bids</i> »                                             | 24        |
| 1.2.4    | Commentaires sur les mécanismes de prix                                 | 27        |
| 1.2.5    | Existence et convergence dans les jeux stratégiques de marché           | 30        |
|          | Existence de l'équilibre de Nash dans les jeux stratégiques de marché   | 30        |
|          | Convergence de l'équilibre de Nash dans les jeux stratégiques de marché | 32        |
| 1.3      | Les modèles de différenciation                                          | 35        |
| 1.3.1    | Familles de modèles différenciés                                        | 36        |
|          | Les modèles de non-localisation                                         | 37        |
|          | Les modèles de localisation ou de différenciation spatiale              | 37        |
| 1.4      | Le modèle de Dixit et Stiglitz (1977)                                   | 40        |
| 1.4.1    | Préférences                                                             | 40        |
|          | Le cas général                                                          | 41        |
|          | Le cas où la fonction $U(.)$ est une Cobb-Douglas                       | 45        |
| 1.5      | Le modèle de Julien et Tricou (2005)                                    | 47        |
| 1.5.1    | Le modèle général                                                       | 47        |
| 1.5.2    | Application du modèle général                                           | 50        |
| 1.5.3    | Résultats                                                               | 53        |
| 1.6      | Conclusion                                                              | 53        |
| 1.7      | Annexes : Le modèle de Julien (2013)                                    | 55        |
| 1.7.1    | Les hypothèses du modèle                                                | 55        |
| 1.7.2    | L'équilibre Stackelberg                                                 | 56        |
| 1.7.3    | Application du modèle général                                           | 58        |
| 1.7.4    | Résultats                                                               | 62        |
| <b>2</b> | <b>L'ECWS-PD</b>                                                        | <b>63</b> |
| 2.1      | Introduction                                                            | 64        |

|       |                                                                        |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.2   | L'équilibre Cournot-Walras . . . . .                                   | 67 |
| 2.2.1 | L'économie . . . . .                                                   | 67 |
| 2.2.2 | Hypothèses . . . . .                                                   | 67 |
|       | Hypothèse 1 : Les fonctions d'utilité des agents économiques . . . .   | 67 |
|       | Hypothèse 2 : Répartition des dotations initiales . . . . .            | 69 |
|       | Hypothèse 3 : L'ensemble des stratégies de l'oligopoleur $k$ . . . . . | 69 |
| 2.2.3 | L'équilibre . . . . .                                                  | 70 |
|       | Les coefficients de différenciation . . . . .                          | 70 |
|       | L'équilibre Cournot-Walras . . . . .                                   | 71 |
| 2.3   | Modèle avec un oligopoleur par bien différencié . . . . .              | 74 |
| 2.3.1 | Cas de l'économie Cobb-Douglas . . . . .                               | 76 |
| 2.3.2 | Cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas . . . . .                | 79 |
| 2.4   | Modèle à $n$ oligopoleurs . . . . .                                    | 81 |
| 2.4.1 | Cas d'une fonction de type Cobb-Douglas pour les oligopoleurs . . .    | 81 |
|       | Allocations à l'Equilibre Général Symétrique (EGS) (Cobb-Douglas)      | 83 |
| 2.4.2 | Cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas . . . . .                | 84 |
|       | Allocations à l'Equilibre Général Symétrique (EGS) . . . . .           | 85 |
| 2.5   | Etude des propriétés de l'équilibre . . . . .                          | 88 |
| 2.5.1 | Analyse des prix . . . . .                                             | 88 |
|       | Cas de la fonction de type Cobb-Douglas pour les oligopoleurs . . .    | 88 |
|       | Cas de la fonction de type quasi-linéaire pour les oligopoleurs . . .  | 89 |
| 2.5.2 | Allocations CW vs Allocations Walras . . . . .                         | 90 |
|       | Comparaison des allocations des oligopoleurs . . . . .                 | 90 |
|       | Comparaison des allocations des agents concurrentiels . . . . .        | 91 |
| 2.5.3 | Le Bien-être des agents économiques . . . . .                          | 93 |
|       | Économie Cobb-Douglas . . . . .                                        | 93 |
|       | Économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas . . . . .                         | 94 |
| 2.6   | Comparaison du modèle . . . . .                                        | 96 |
| 2.7   | Discussion . . . . .                                                   | 96 |
| 2.8   | Annexes . . . . .                                                      | 99 |
| 2.8.1 | Équilibre concurrentiel dans le cas de l'économie Cobb-Douglas . .     | 99 |

|          |                                                                                         |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.8.2    | Équilibre concurrentiel dans le cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas . . . . . | 101        |
| 2.8.3    | Tableau de signe de $\gamma(n)$ . . . . .                                               | 105        |
| 2.8.4    | Tableau de signe de $f(n) = e^{\frac{1}{n}} - n$ . . . . .                              | 106        |
| <b>3</b> | <b>Les Politiques publiques</b> . . . . .                                               | <b>107</b> |
| 3.1      | Les politiques fiscales . . . . .                                                       | 108        |
| 3.1.1    | Introduction . . . . .                                                                  | 108        |
| 3.1.2    | Le modèle avec taxation . . . . .                                                       | 112        |
|          | Taxation des transactions . . . . .                                                     | 112        |
|          | Taxation des dotations initiales . . . . .                                              | 115        |
| 3.1.3    | Analyse du bien-être . . . . .                                                          | 117        |
|          | Comparaison de l'utilité des agents avant et après taxation . . . . .                   | 118        |
|          | Analyse de la fonction de bien-être agrégé . . . . .                                    | 119        |
|          | Répartition de la taxation et détermination de la taxe optimale . . . . .               | 124        |
| 3.1.4    | Discussion avec la littérature . . . . .                                                | 127        |
| 3.2      | Une note . . . . .                                                                      | 128        |
| 3.2.1    | Le modèle . . . . .                                                                     | 130        |
|          | L'économie d'échange . . . . .                                                          | 130        |
|          | Le jeu de marché sans taxation . . . . .                                                | 131        |
|          | Le jeu de marché avec taxation . . . . .                                                | 134        |
| 3.2.2    | Equilibre stratégique avec taxation . . . . .                                           | 137        |
| 3.2.3    | L'optimalité . . . . .                                                                  | 143        |
|          | Taxation <i>ad valorem</i> . . . . .                                                    | 144        |
|          | La taxe <i>unitaire</i> . . . . .                                                       | 146        |
|          | Taxation des dotations initiales . . . . .                                              | 146        |
| 3.2.4    | Une comparaison entre les mécanismes de taxation . . . . .                              | 148        |
|          | Comparaison des taxes optimales . . . . .                                               | 149        |
|          | Bien-être . . . . .                                                                     | 152        |

|          |                                                                                           |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Modélisation avec un continuum d'agents</b>                                            | <b>158</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                                                    | 159        |
| 4.2      | Le modèle . . . . .                                                                       | 161        |
| 4.2.1    | L'économie et les hypothèses . . . . .                                                    | 161        |
| 4.2.2    | Définitions . . . . .                                                                     | 163        |
| 4.3      | Exemples . . . . .                                                                        | 164        |
| 4.3.1    | L'économie d'échange . . . . .                                                            | 164        |
| 4.3.2    | Equilibre walrasien . . . . .                                                             | 165        |
| 4.3.3    | Équilibres stratégiques . . . . .                                                         | 166        |
|          | Exemple 1 : Cas d'une économie avec un atome par bien différencié                         | 167        |
|          | Exemple 2 : Cas de l'économie Cobb-Douglas avec $n$ agents par type<br>d'atomes . . . . . | 168        |
|          | Exemple 3 : Cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas . . . . .                       | 171        |
|          | Exemple 4 : Cas de l'économie quasi-linéaire/Cobb-Douglas modifiée                        | 171        |
| 4.4      | Conclusion . . . . .                                                                      | 172        |
|          | <b>Conclusion Générale</b>                                                                | <b>174</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                                      | <b>181</b> |
|          | <b>Table des matières</b>                                                                 | <b>193</b> |

